"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

# MATEMÁTICA

## Questão 01

A, B e C são conjuntos não vazios de inteiros positivos e $|X|$ representa a cardinalidade de um conjunto $X$. Sabe-se que:

- $|A| = |B| = |C|$
- $\left|A \cap \overline{(B \cup C)}\right| = \left|\overline{A} \cap B \cap C\right|$
- $|A \cap B| < |A \cap C| < |B \cap C|$

O menor valor possível para a soma dos elementos de $A \cup B \cup C$ é:

a) 21
b) 36
c) 45
d) 55
e) 78

---

**Resolução**

Como $|A| = |B| = |C|$ e $|A \cap B| < |A \cap C| < |B \cap C|$, o menor número de elementos para cada um dos conjuntos A, B e C é 2, já que a segunda desigualdade ficaria 0 < 1 < 2.
Com dois elementos em cada conjunto, para gerarmos a configuração mínima acima, A e B precisam ser disjuntos, ou seja, pensando em minimizar a soma dos elementos de $A \cup B \cup C$, teríamos A = {1, 2} e B = {3, 4}. Como $|A \cap C| = 1$, teríamos que 1 ou 2 pertence ao conjunto C, mas como $|B \cap C| = 2 = |B| = |C|$, C precisa ser igual a B. Ou seja, essa configuração é impossível.

Fazendo $|A| = |B| = |C| = 3$, temos o menor valor de $A \cup B \cup C$ possível com $|A \cap B| = 0, |A \cap C| = 1$ e $|B \cap C| = 2$, o que é válido para A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6} e C = {1, 4, 5}.
Por construção, temos as duas condições abaixo satisfeitas:
$|A| = |B| = |C|$
$|A \cap B| < |A \cap C| < |B \cap C|$,
Vamos verificar a última condição:
$\left|A \cap \overline{(B \cup C)}\right| = |A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})| = \left|\overline{A} \cap B \cap C\right|$ é satisfeito, pois $|\{2,3\}| = |\{4,5\}| = 2$.

Portanto, o menor valor da soma dos elementos de $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$ é $1+2+3+4+5+6 = 21$.

**Alternativa A.**

## Questão 02

O número de soluções inteiras da inequação

$$\frac{(x+1)(x^9-1)(x^2-x+1)(x^2-10x+21)}{(x^6-1)(x^6+x^3+1)}<0$$

é:

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

---

**Resolução**

Sabemos que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, então $x^9-1=(x^3-1)(x^6+x^3+1)$. Multiplicando ambos os lados por $(x^3+1)$, temos

$$(x^9-1)(x^3+1)=(x^3+1)(x^3-1)(x^6+x^3+1).$$

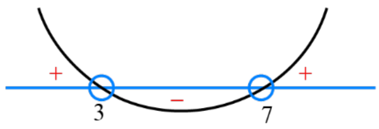
Como $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ e $(x^3+1)(x^3-1)=x^6-1$, então

$$(x^9-1)(x+1)(x^2-x+1)=(x^6-1)(x^6+x^3+1).$$

Com isso, considerando os fatores do denominador não nulos, a expressão do enunciado equivale a

$$\frac{\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x^9-1)}\,\cancel{(x^2-x+1)}\,(x^2-10x+21)}{\cancel{(x^6-1)}\,\cancel{(x+1)}\,\cancel{(x^2-x+1)}}=x^2-10x+21<0.$$

Desse modo, $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)<0$. Graficamente, temos:




Portanto, as possíveis soluções inteiras são $x=4$, $x=5$ ou $x=6$. Por inspeção, também se verifica que nenhuma dessas soluções torna o denominador da expressão original nulo e, portanto, ambas as 3 soluções são válidas, sendo esse o número de soluções inteiras da inequação.

**Alternativa A.**

## Questão 03

Seja *i* tal que $i^2=-1$. O valor do número real $\alpha$ que satisfaz à equação

$$cis(7\pi/6)-2cis(-7\pi/6)=\begin{vmatrix}-\sqrt{3} & -i & 0\\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} & \alpha\\ i^5 & \sqrt{3} & -i/2\end{vmatrix}$$

é:

a) 3
b) $\sqrt{3}/2$
c) $\sqrt{3}/4$
d) $\sqrt{3}/8$
e) $\sqrt{3}/16$

**Resolução:**

Sabemos que $cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ e $cis\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i.$ Portanto, $cis\left(\frac{7\pi}{6}\right)-2cis\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i.$

Por outro lado, $\begin{vmatrix} -\sqrt{3} & -i & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} & \alpha \\ i^5 & \sqrt{3} & -i/2 \end{vmatrix}=-\frac{3}{2}i+4\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}.$

Então, $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i=-\frac{3}{2}i+4\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\alpha=\frac{\sqrt{3}}{16}.$

**Alternativa E.**

## Questão 04

Seja o polinômio $g(x)=x^5+x^4-2x^3+bx^2+bx-2b.$ O valor do maior inteiro $k$ para o qual $g(x)$ é divisível por $(x+2)^k$ para algum $b$ inteiro é:

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

**Resolução**

Ao dividir duas vezes o polinômio $g(x)$ por $(x+2)$, utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini, temos:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | –2 | $b$ | $b$ | –2$b$ |
| –2 | 1 | –1 | 0 | $b$ | –$b$ | 0 |
| –2 | 1 | –3 | 6 | $b$ – 12 | 24 – 3$b$ | |

De forma que, para ele ser divisível por $(x+2)^2$, é necessário que $24-3b=0\Rightarrow b=8.$

Então, $g(x)=(x+2)^2(x^3-3x^2+6x-4).$

Como $(-2)^3-3\cdot(-2)^2+6\cdot(-2)-4\neq 0$ , ou seja, $-2$ não é raiz de $x^3-3x^2+6x-4$ , temos que, para $b=8$ , o valor do maior inteiro $k$ é 2.

**Alternativa B.**

## Questão 05

Considere a função real

$$f(x)=\begin{cases} -2x+3, \text{ se } x<1 \\ 2, \quad \text{se } x=1 \\ \dfrac{x^4-x^3}{x-1}, \text{ se x>1} \end{cases}$$

O maior valor de $\alpha$ real para qual $0<|x-1|<\alpha\Rightarrow|f(x)-1|<1$ é:

a) $\sqrt[3]{2}-\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\sqrt[3]{2}$
d) $-1+\sqrt[3]{2}$
e) 1

**Resolução**

Como $\dfrac{x^4-x^3}{x-1}=x^3\dfrac{x-1}{x-1}=x^3$, para x > 1, podemos simplificar a função como

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x<1\\ 2, & x=1.\\ x^3, & x>1\end{cases}$$

Vamos encontrar quando $|f(x)-1|<1 \Leftrightarrow 0<f(x)<2.$

Para $x=1,$ a desigualdade não é satisfeita, pois $f(1)=2.$

Para $x<1,$ temos $0<-2x+3<2 \Leftrightarrow -3<-2x<-1 \Leftrightarrow 1/2<x<3/2.$ Como estamos olhando o caso $x<1,$ esse caso nos dá $1/2<x<1 \Leftrightarrow -1/2<x-1<0 \Rightarrow 0<|x-1|<1/2.$

Para $x>1,$ temos $0<x^3<2 \Leftrightarrow 0<x<\sqrt[3]{2}.$ Como estamos olhando o caso $x>1,$ esse caso nos dá $1<x<\sqrt[3]{2} \Leftrightarrow 0<x-1<\sqrt[3]{2}-1 \Rightarrow 0<|x-1|<\sqrt[3]{2}-1.$

Portanto, como $\sqrt[3]{2}-1<1/2$, o maior valor de $\alpha$ que garante $0<|x-1|<\alpha \Rightarrow |f(x)-1|<1$ é $\sqrt[3]{2}-1.$

**Alternativa D.**

## Questão 06

Uma matriz quadrada $M$ é dita ortogonal se $M \times M^T = I,$ em que $I$ é a matriz identidade. O conjunto solução $S$ contendo os valores de $a$, $b$ e $c$ para que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \alpha & 0 & 0 \\ b & \dfrac{1}{4} & 2b & 0 \\ \dfrac{c}{2} & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

seja ortogonal é:

a) $S=\left\{a=\dfrac{1}{2};\ b=-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ c=1\right\}$

b) $S=\left\{a=\dfrac{1}{2};\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ c=1\right\}$

c) $S=\left\{a=\dfrac{1}{2};\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ c=-1\right\}$

d) $S=\left\{a=-\dfrac{1}{2};\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2};\ c=-1\right\}$

e) $S=\varnothing$

**Resolução**

Considerando $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & a & 0 & 0 \\ b & \frac{1}{4} & 2b & 0 \\ \frac{c}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$, temos que $A^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & b & \frac{c}{2} \\ 0 & a & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & 0 & 2b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. Assumindo que $a_{ij}$ é o termo da linha $i$ e coluna $j$ da matriz $A \times A^T$, temos que $a_{13} = 0 \cdot b + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot 2b + 0 \cdot 0 = 2b$ (matriz identidade), portanto, $b = 0$.

Porém, $a_{33} = b \cdot b + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + 2b \cdot 2b + 0 \cdot 0 = 5b^2 + \frac{1}{16}$ e, como $b = 0$, então $a_{33} = \frac{1}{16}$. Como a matriz deveria ser a matriz identidade e $a_{33} \neq 1$, o conjunto solução é vazio.
Portanto, $S = \varnothing$.

**Alternativa E.**

## Questão 07

Seja uma matriz com 100 linhas e 100 colunas. O elemento da linha *i* e coluna *j* é denotado por $a_{i,j}$. Os elementos da matriz formam uma progressão aritmética (PA) de razão 5. O primeiro termo da progressão é o elemento $a_{1,1}$ e tem seu valor igual a 10. Para formar esse PA, percorrem-se os elementos de uma mesma linha e concluída uma linha, passa-se para a próxima. Se *n* é o traço da matriz, a soma dos algarismos de *n* é:

a) 10
b) 19
c) 23
d) 28
e) 32

**Resolução**

Sabemos que

$a_{1,1} = 10, a_{1,2} = 15, a_{1,3} = 20, a_{1,4} = 25, \ldots, a_{1,100} = 505,$
$a_{2,1} = 510, a_{2,2} = 515, a_{2,3} = 520, a_{2,4} = 525, \ldots, a_{2,100} = 1005,$
…………
$a_{k,1} = 500 \times (k-1) + 10, a_{k,2} = 500 \times (k-1) + 15, a_{k,3} = 500 \times (k-1) + 20, a_{k,4} = 500 \times (k-1) + 25, \ldots, a_{k,100} = 500 \times (k-1) + 505,$
…………
$a_{100,1} = 500 \times 99 + 10, a_{100,2} = 500 \times 99 + 15, a_{100,3} = 500 \times 99 + 20, a_{100,4} = 500 \times 99 + 25, \ldots, a_{100,100} = 500 \times 99 + 505$

O termo geral é dado por $a_{i,j} = 500 \times (i-1) + 5 \times (j+1)$. Portanto, o traço da matriz é

$$\sum_{i=1}^{100} a_{i,i} = \sum_{i=1}^{100} 500 \times (i-1) + 5 \times (i+1) = \sum_{i=1}^{100} (505i - 495) = 505 \times (1 + 2 + 3 + \ldots + 100) - 49.500 =$$
$$505 \times 101 \times 50 - 49.500 = 2.500.750.$$

Então, a soma dos algarismos do traço da matriz é 19.

**Alternativa B.**

## Questão 08

O intervalo que contém os valores de $x$ tais que

$$0,09^{(4+x)}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{0,3}}\right)^{x^2}\right]^2 < x^2-(x+1)(x-1)$$

é:

a) $(-\infty,4)\cup(8,\infty)$
b) $(-2,4)$
c) $(4,8)$
d) $(-\infty,\infty)$
e) $(-\infty,-2)\cup(4,\infty)$

---

**Resolução**

Sabemos que $0,3^2=0,09,$ portanto $0,09^{(4+x)}=0,3^{8+2x}.$

Além disso, $\left[\left(\frac{1}{\sqrt{0,3}}\right)^{x^2}\right]^2=\frac{1}{\left(0,3^{\frac{1}{2}}\right)^{2x^2}}=\frac{1}{0,3^{x^2}}.$

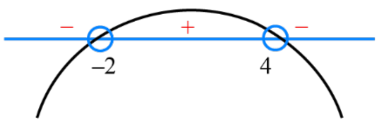
Também podemos verificar que $x^2-(x+1)(x-1)=x^2-(x^2-1)=1.$

A inequação do enunciado se torna, então:

$$\frac{0,3^{8+2x}}{0,3^{x^2}}<1\Rightarrow 0,3^{-x^2+2x+8}<0,3^0$$

Como $0,3<1,$ então, $-x^2+2x+8>0.$

Como as raízes de $-x^2+2x+8$ são $-2$ e 4, o seu gráfico será:




Assim, o conjunto solução de $-x^2+2x+8>0$ é $(-2,4)$.

**Alternativa B.**

## Questão 09

Seja $i$ tal que $i^2=-1.$ Seja $A$ dado pela equação:

$$A=\sum_{n=1}^{1000}\left[(i)^{2n-2}\,\mathrm{In}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{(-1)^{n-1}}\right]$$

O valor de $e^{-A}$ é:

a) 250
b) 500
c) 501
d) 1000
e) 1001

**Resolução**

Considerando que $(-1)^{n-1} = (i^2)^{n-1} = i^{2n-2}$; que para $n \in \{1,2,3,...,1000\}$ será sempre real e, além disso, que $\frac{n+1}{n+2}$ será sempre positivo, então, o somatório pedido tem, como expressão,

$$i^{2n-2} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{i^{2n-2}} = i^{4n-4} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = 1^{n-1} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right).$$

No desenvolvimento acima, utilizamos o fato de que $i^4 = 1$.

O somatório pedido será $\sum_{n=1}^{1000} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, ou seja:

$$\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{4}{5} + ... + \ln\frac{1001}{1002} = \ln\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} \cdot ... \cdot \frac{\cancel{1001}}{1002} = \ln\frac{1}{501}$$

Dessa forma, $-A = -\ln\frac{1}{501} = \ln 501$ e, portanto, $e^{-A} = 501$.

**Alternativa C.**

## Questão 10

Sejam dois dados cúbicos (com faces numeradas de 1 a 6) e um dado na forma de dodecaedro (com faces numeradas de 1 a 12). Em cada tipo de dado, todas as faces possuem mesma probabilidade de ocorrência. Com um único lançamento de cada dado, a probabilidade de se obter maior pontuação com o dodecaedro do que com os dois dados cúbicos somados é:

a) 2/3
b) 1/6
c) 7/36
d) 5/12
e) 3/16

**Resolução**

Vamos analisar a probabilidade de cada soma ocorrer no par de dados cúbicos e a correspondente probabilidade de o valor do dado dodecaédrico ser maior que tal soma. Exemplo: Soma = 4 (1+3 ou 3+1 ou 2+2), de modo que a probabilidade de tal soma ocorrer é $\frac{3}{36}$.

Há 8 possibilidades de o valor do dado dodecaédrico ser maior que 4, de modo que a probabilidade de tal evento ocorrer é $\frac{8}{12}$.

Procedendo de forma análoga, para cada soma possível, montamos a seguinte tabela:

| Soma dos valores dos dados cúbicos | Probabilidade de tal soma ocorrer | Probabilidade do valor no dado dodecaédrico ser maior | Probabilidade de tal evento ocorrer |
|---|---|---|---|
| 2 | $\frac{1}{36}$ | $\left(\frac{10}{12}\right)$ | $\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{10}{12}\right)$ |
| 3 | $\frac{2}{36}$ | $\left(\frac{9}{12}\right)$ | $\frac{2}{36}\cdot\left(\frac{9}{12}\right)$ |
| 4 | $\frac{3}{36}$ | $\left(\frac{8}{12}\right)$ | $\frac{3}{36}\cdot\left(\frac{8}{12}\right)$ |
| 5 | $\frac{4}{36}$ | $\left(\frac{7}{12}\right)$ | $\frac{4}{36}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)$ |
| 6 | $\frac{5}{36}$ | $\left(\frac{6}{12}\right)$ | $\frac{5}{36}\cdot\left(\frac{6}{12}\right)$ |
| 7 | $\frac{6}{36}$ | $\left(\frac{5}{12}\right)$ | $\frac{6}{36}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)$ |
| 8 | $\frac{5}{36}$ | $\left(\frac{4}{12}\right)$ | $\frac{5}{36}\cdot\left(\frac{4}{12}\right)$ |
| 9 | $\frac{4}{36}$ | $\left(\frac{3}{12}\right)$ | $\frac{4}{36}\cdot\left(\frac{3}{12}\right)$ |
| 10 | $\frac{3}{36}$ | $\left(\frac{2}{12}\right)$ | $\frac{3}{36}\cdot\left(\frac{2}{12}\right)$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 11 | $\frac{2}{36}$ | $\binom{1}{12}$ | $\frac{2}{36}\cdot\binom{1}{12}$ |
| 12 | $\frac{1}{36}$ | $\binom{0}{12}$ | $\frac{1}{36}\cdot\binom{0}{12}$ |

Somando as probabilidades dos eventos da última coluna:

$$p=\frac{180}{432}=\frac{5\cdot(36)}{12\cdot(36)}=\frac{5}{12}$$

**Alternativa D.**

## Questão 11

O valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$arctg\left(\frac{1}{3}\right)+arctg\left(\frac{1}{4}\right)+arctg\left(\frac{1}{5}\right)+arctg\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{4}$$

é:

a) 10
b) 6
c) 7
d) 47
e) 52

---

**Resolução:**

(1) $arctg\left(\frac{1}{3}\right)=x \Leftrightarrow tgx=\frac{1}{3}$

(2) $arctg\left(\frac{1}{4}\right)=y \Leftrightarrow tgy=\frac{1}{4}$

(3) $arctg\left(\frac{1}{5}\right)=z \Leftrightarrow tgz=\frac{1}{5}$

(4) $arctg\left(\frac{1}{n}\right)=w \Leftrightarrow tgw=\frac{1}{n}\cdot$

(5) $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

(6) $tg\left[(x+z)+(y+w)\right]=tg\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

$\therefore \frac{tg(x+z)+tg(y+w)}{1-tg(x+z)\cdot tg(y+w)}=1$

(7) $tg(x+z)=\frac{tgx+tgz}{1-tgx\cdot tgz}=\frac{\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right]}{\left[1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\right]}=\frac{4}{7}$

(8) $tg(y+w)=\frac{tgy+tgw}{1-tgy\cdot tgw}=\frac{\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{n}\right]}{\left[1-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n}\right]}=\frac{n+4}{4n-1}$

Substituindo (7) e (8) em (6):

$$\frac{\left[\frac{4}{7}+\left(\frac{n+4}{4n-1}\right)\right]}{\left[1-\frac{4}{7}\cdot\left(\frac{n+4}{4n-1}\right)\right]}=1 \therefore\ 4\cdot(4n-1)+7\cdot(n+4)=7\cdot(4n-1)-4\cdot(n+4) \therefore n=47$$

**Alternativa D.**

## Questão 12

Considere duas circunferências no plano cartesiano *Oxy*, uma de raio igual a 6 e centro no ponto (6,6) e outra de centro na origem e tangente exteriormente à primeira. A equação da tangente interior comum às circunferências é:

a) $y + 2x - 3\left(\sqrt{2} - 2\right) = 0$

b) $2y + x + 6\left(\sqrt{2} - 2\right) = 0$

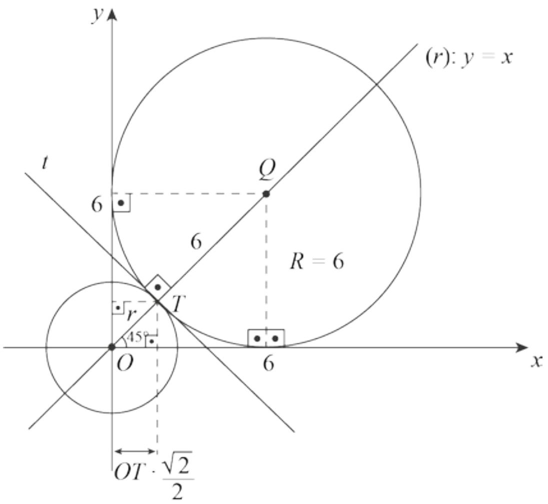
c) $y + x + 6\left(\sqrt{2} - 2\right) = 0$

d) $y + x - 6\left(\sqrt{2} - 2\right) = 0$

e) $2y + x - 6\left(\sqrt{2} - 2\right) = 0$

---

**Resolução**




(1) A reta tangente a uma circunferência em um ponto *T* é perpendicular ao raio no ponto de tangência.

(2) $OT = OQ - QT = 6\sqrt{2} - 6 \therefore OT = 6 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right)$

$\therefore\ x_T = 6 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $y_T = 6 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\therefore T\left(3 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right),\ 3 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)\right)$

(3) Seja *r* a reta de equação "$y = x$", que une os centros das circunferências tangentes. Sendo *t* a tangente comum às duas circunferências (em *T*), segue que o coeficiente angular $t \perp r$ é $-1$.

(4) De posse do coeficiente angular e das coordenadas do ponto $T \in t$, podemos escrever a equação da reta t:

$y - y_T = m_t \cdot (x - x_T) \therefore y - 3 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right) = (-1) \cdot \left[x - 3 \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right)\right]$

$\therefore\ y - 6 + 3\sqrt{2} = -x + 6 - 3\sqrt{2} \therefore$

$\therefore\ y + x + 6 \cdot \left(\sqrt{2} - 2\right) = 0$

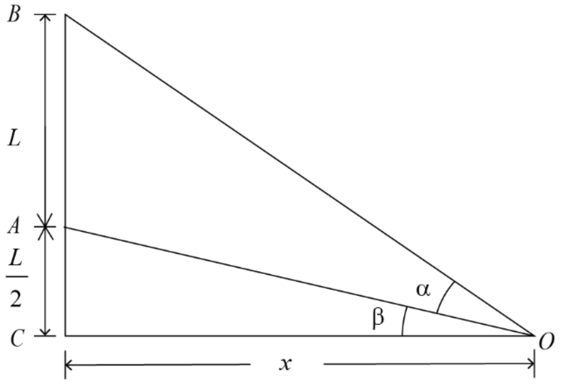
**Alternativa C.**

## Questão 13

Considere uma barra *AB* de comprimento *L* fixada na posição vertical sobre um muro de altura $L/2$, que está assentado sobre um plano horizontal. Desprezando a altura do observador *O*, o ângulo máximo *AOB* enquanto o observador O caminha sobre o plano horizontal é:

a) 30°
b) 60°
c) 75°
d) 15°
e) 45°

**Resolução**




Observando a figura, podemos escrever:

(1) $tg\beta = \dfrac{\left(L/2\right)}{x} = \dfrac{L}{2x}$

(2) $tg\left(\alpha+\beta\right) = \dfrac{\left(3L/2\right)}{x} = \dfrac{3L}{2x}$

Por outro lado, sabemos que:

(3) $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}$

Substituindo (1) e (2) em (3), obtemos uma equação quadrática em *x*:

$\left(4\cdot tg\alpha\right)\cdot x^2 - \left(4L\right)\cdot x + 3L^2 \cdot tg\alpha = 0$

O ângulo $\alpha$ aumenta à medida que x diminui.

(4) $x_{MIN} = \dfrac{4L}{8\cdot tg\alpha} = \dfrac{L}{2\cdot tg\alpha}$

(5) $f\left(x_{MIN}\right) = \left(4\cdot tg\alpha\right)\cdot\left(\dfrac{L^2}{4\cdot tg^2\alpha}\right) - 4L\cdot\left(\dfrac{L}{2\cdot tg\alpha}\right) + 3L^2\cdot tg\alpha = 0$

Levando em conta que $L \neq 0$ e simplificando, segue:

$3\cdot tg^2\alpha - 1 = 0 \therefore tg\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \therefore \alpha = \dfrac{\pi}{6}$

**Alternativa A.**

## Questão 14

Sejam $\alpha$ e $\beta$ dois planos não paralelos que se interceptam na reta *r* e cujo ângulo diedro é $\pi/6$ radianos. Tome pontos *A*, *B*, *C*, *D* de $\alpha$ e, por cada um destes pontos, trace retas ortogonais a $\alpha$ que interceptam $\beta$ nos pontos *A'*, *B'*, *C'*, *D'*, respectivamente. Sabendo que o quadrilátero *ABCD* é um trapézio cuja diagonal *AC* é paralela a *r*, a razão entre as áreas de *ABCD* e *A'B'C'D'* é:

a) 1
b) 3/2
c) $\sqrt{3}/2$
d) $\sqrt{3}/3$
e) 1/3

**Resolução**

Pelos dados do problema, o quadrilátero ABCD é a projeção do quadrilátero *A'B'C'D'* sobre o plano $\alpha$.
Desta forma,

$$S\left(ABCD\right) = S\left(A'B'C'D'\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \frac{S\left(ABCD\right)}{S\left(A'B'C'D'\right)} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**Alternativa C.**

## Questão 15

Em uma escada, uma bola lançada do i-ésimo degrau irá parar em qualquer degrau mais baixo com probabilidade $1/i$. Por exemplo, ao lançarmos uma bola do 3° degrau, a bola tem 1/3 de chances de parar no 2° degrau, 1/3 de chances de parar no 1° degrau e 1/3 de chances de parar de parar no degrau 0. Nessa escada lançamos uma bola preta do degrau $m$, $m > 0$, e uma bola branca do degrau $n$, $n > m$. A probabilidade de a bola branca parar em um degrau mais baixo do que a bola preta é:

a) $\dfrac{m^2 - 2m + 1}{2n}$

b) $\dfrac{m^2 - 1}{2n}$

c) $\dfrac{m}{2n}$

d) $\dfrac{m^2}{2n}$

e) $\dfrac{m - 1}{2n}$

---

**Resolução**

A probabilidade de a bola preta parar em um degrau abaixo do inicial é de $1/m$, ao passo que a branca tem probabilidade $1/n$ de parar em um degrau mais baixo que o inicial. Como $n > m$, para a bola branca parar em um degrau mais baixo que a preta, temos as seguintes possibilidades:

1) Bola branca parar no degrau 0 e bola preta parar em qualquer degrau i, $1 \le i \le m-1$: $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{m-1}{m} = \dfrac{m-1}{nm}$.

2) Bola branca parar no degrau 1 e bola preta parar em qualquer i, $2 \le i \le m-1$: $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{m-2}{m} = \dfrac{m-2}{nm}$.

3) Bola branca parar no degrau 2 e bola preta parar em qualquer i, $3 \le i \le m-1$: $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{m-3}{m} = \dfrac{m-3}{nm}$.

e assim sucessivamente, até

$m$ - 1) Bola branca parar no degrau $m-2$ e bola preta parar em qualquer i, $m-1 \le i \le m-1$: $\dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{nm}$.

Então, a união dos eventos tem probabilidade igual à soma de cada um deles:

$$\frac{m-1}{nm} + \frac{m-2}{nm} + \frac{m-3}{nm} + \ldots + \frac{1}{nm} = \frac{m(m-1)}{nm} = \frac{m-1}{2n}.$$

**Alternativa E.**

# FÍSICA

## Questão 16

Um projétil de chumbo está a uma temperatura de 175 ºC quando atinge uma parede e nela se aloja. Considere que 25% da energia cinética do projétil imediatamente antes da colisão permaneça nele como energia interna.

**Dados:**

- calor específico do chumbo: 125 J/(kg. C);
- temperatura de fusão do chumbo: 327 ºC;
- calor latente de fusão do chumbo: 26.000 J/kg.

Se a energia interna que permanece após o projétil atingir a parede é justamente a mínima para que ocorra a fusão total do chumbo, a velocidade do projétil imediatamente antes da colisão, em m/s, é:

a) 30
b) 150
c) 400
d) 450
e) 600

---

**Resolução**

Energia mínima para a fusão total

$$E = mc\Delta\theta + m\cdot L$$

$$E = m.125\frac{J}{kg\,°C}.(327-175)°C + m.26000\frac{J}{kg}$$

$$E = 19.000m + 26.000m = 45.000m$$

$$0,25\,E_{cin} = E$$

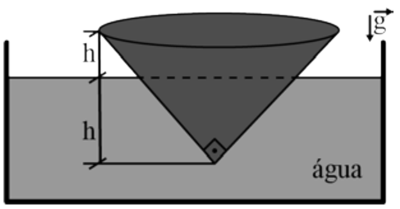
$$E_{cin} = 4E = 4\cdot 45.000m = 180.000m$$

$$E_{cin} = \frac{mv^2}{2} \quad \therefore \quad 180.000m = \frac{mv^2}{2}$$

$$v^2 = 360.000 \quad \therefore \quad v = 600\ m/s$$

**Alternativa E.**

## Questão 17




Um recipiente vazio de formato cônico está parcialmente imerso na água e em equilíbrio, como geometria apresentada na figura. Insere-se no interior do recipiente uma partícula de massa $m = Kp\pi h^3$, onde K é uma constante, $p$ é a massa específica da água e $h$ está indicado na figura. Após essa inserção, o recipiente sofre um pequeno deslocamento, afundando uma altura $\Delta h$.

**Dado:**

- Aceleração da gravidade: $g$.

**Observações:**

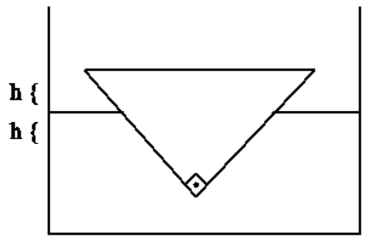
- A espessura do recipiente é muito pequena;
- $\Delta h \ll h$;
- Para $|\alpha| \ll 1$, $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$.

A altura $\Delta h$ que o recipiente irá afundar até o novo ponto de equilíbrio é:

a) $Kh/3$
b) $Kh/6$
c) $Kh$
d) $3Kh$
e) $2Kh$

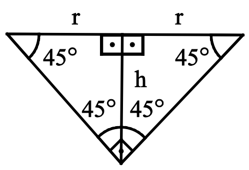
**Resolução**

Antes




$E = P$

$\rho_{água} \cdot V_{imerso} \cdot g = M \cdot g$

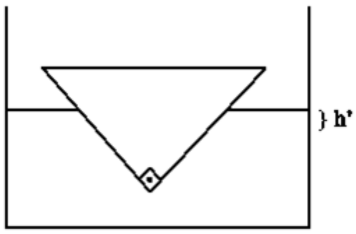



r = h

$V_{imerso} = \pi r^2 h / 3 = \pi h^3 / 3$

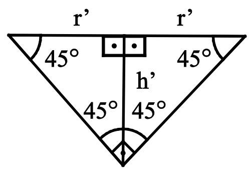
$\rho \cdot \pi h^3 / 3 = M \; (i)$

Depois




$E' = P'$

$\rho_{água} \cdot V'_{imerso} \cdot g = (M + m) g$




r' = h'

$V'_{imerso} = \pi r'^2 h' / 3 = \pi h'^3 / 3$

$\rho \, \pi h'^3 / 3 = M + m \; (ii)$

$m = K \rho \pi h^3 \; (iii)$

$(i) \; e \; (iii) \; em \; (ii)$

$$\frac{\rho \pi h'^3}{3} = \frac{\rho \pi h^3}{3} + K \rho \pi h^3$$

$$h'^3 = h^3 + 3K h^3$$

$$h'^3 = h^3 (1 + 3K)$$

$$h' = h (1 + 3K)^{1/3}$$

$$h' \sim h \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot 3K \right)$$

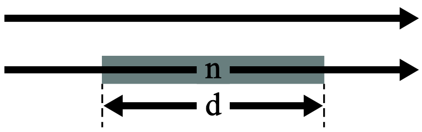
$$h' \sim h + Kh$$

$$\Delta h = h' - h$$

$$\Delta h \sim Kh$$

**Alternativa C.**

## Questão 18




A figura mostra dois raios paralelos de luz que viajam em fase no vácuo até que um deles encontra uma película.

**Dados:**

- espessura da película: $d$;
- índice de refração da película: $n$;
- frequência dos raios de luz: $f$;
- velocidade da luz no vácuo: $c$.

**Observação:**

- a medida de diferença de fase entre os raios tem como referência um plano ortogonal a eles.

A condição necessária e suficiente para que os raios continuem viajando em fase após o raio de baixo deixar a película é:

a) $\frac{(n^2 - 1) df}{c}$ deve ser um número inteiro ímpar

b) $\frac{(n^2 - 1) df}{c}$ deve ser um número inteiro par

c) $\frac{(n - 1) df}{c}$ deve ser um número inteiro

d) $\frac{2(n - 1) df}{c}$ deve ser um número inteiro ímpar

e) $\frac{2(n + 1) df}{c}$ deve ser um número inteiro par

**Resolução**

O retardo de fase do raio de baixo é:

$$\Delta\varphi = K.d = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot d = \frac{2\pi}{\lambda_0 / n}\, d = \frac{2\,\pi\, n\, d}{\lambda_0} = \frac{2\,\pi\, n\, d}{c / f} = \frac{2\,\pi\, n\, d\, f}{c}$$

O retardo de fase do raio de cima é:

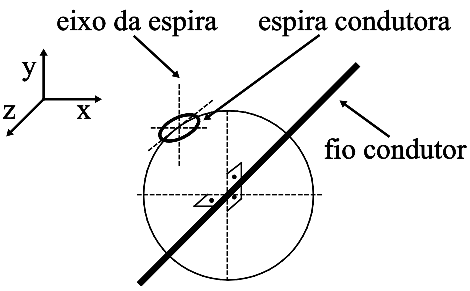
$$\Delta\varphi' = \frac{2\pi\, d\, f}{c}\,(n=1)$$

A diferença entre os retardos tem que ser múltiplo inteiro de $2\pi$:

$$\Delta\varphi - \Delta\varphi' = \frac{2\pi(n-1)d\, f}{c} = m\cdot 2\pi \quad \therefore \quad \frac{(n-1)d\, f}{c} \text{ é inteiro.}$$

**Alternativa C.**

## Questão 19




O sistema da figura é montado com o objetivo de determinar a resistência elétrica de uma espira condutora de área $A$. O centro dessa espira descreve uma trajetória circular de raio $R$ e período $t$, à velocidade angular constante, ao redor de um fio também condutor com uma corrente elétrica contínua $I$. A corrente elétrica na espira é medida e seu valor oscila harmonicamente entre $+i$ e $-i$.

**Dados:**

- Área da espira: $A = 1\ \text{cm}^2$;
- Raio da trajetória do centro da espira: $R = 10\ \text{cm}$;
- Período da trajetória circular do centro da espira: $t = 2\,\text{s}$;
- Corrente elétrica contínua do fio condutor: $I = 50\ \text{A}$;
- Amplitude da corrente elétrica induzida medida na espira: $i = 1\ \text{mA}$;
- Permeabilidade magnética no vácuo: $\mu = 4\pi\cdot 10^{-7}\, T\cdot m/A$.

**Observações:**

- O sistema segue a orientação dos eixos xyz desenhados na figura;
- O fio condutor é paralelo ao eixo z;
- O eixo da espira está sempre paralelo ao eixo y;
- O plano da espira é sempre paralelo ao plano xz;
- O plano da trajetória do centro da espira é paralelo ao plano xy;
- Considere que as linhas de campo magnético que atravessam a espira estejam paralelas;
- Para toda frequência $f$, considere $\dfrac{\Delta\, sen(2\pi\ ft)}{\Delta t} = 2\pi\ f \cos(2\pi\ \ ft)$.

A resistência da espira, em $\mu\Omega$, é:

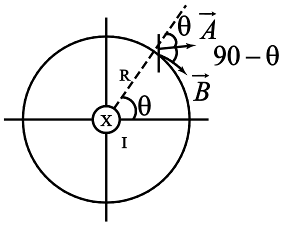
a) $20\pi$
b) $2{,}5\pi$
c) $4\pi$
d) $5\pi$
e) $10\pi$

**Resolução**

A resistência r da espira é $r = V(t)/i(t)$

$V(t)$ = força eletromotriz induzida pela variação do fluxo magnético $\phi(t)$

$$V(t) = \frac{\Delta\phi(t)}{\Delta t} \text{ (lei de Faraday)}$$




Lei de ampère: $B \cdot 2\pi R = \mu I$

$B = \mu I/(2\pi R) = \text{Constante}$

Fluxo $\phi(t) = B \cdot A \cdot \cos(90 - \theta) = B A \operatorname{sen}\theta$

$\theta = \omega t = 2\pi f t \quad \therefore \quad \phi = B A \operatorname{sen}(2\pi f t)$

$V = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = BA \cdot 2\pi f \cdot \cos(2\pi f t)$

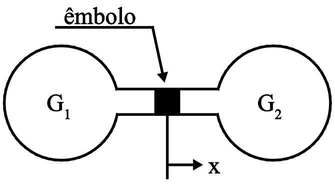
$i(t) = i\cos(2\pi f t)$

$r = \frac{BA\, 2\pi f}{i} = \frac{\mu I}{2\pi R} \cdot \frac{A \cdot 2\pi f}{i} = \frac{\mu I A f}{R i}$

$$r = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \cdot \cancel{1/2}}{0{,}1 \cdot 10^{-3}} = 100\pi \cdot 10^{-7}\,\Omega \quad \Rightarrow \quad r = 10^{-5}\pi\,\Omega = 10\pi \cdot 10^{-6}\,\Omega = 10\pi\,\mu\Omega$$

**Alternativa E.**

## Questão 20




Dois gases perfeitos, $G_1$, e $G_2$, estão contidos em recipientes rígidos, separados por um êmbolo que se move sem atrito por um tubo longo de área de seção transversal $S$, conforme a figura. Cada um dos gases possui volume inicial $V$, a uma temperatura de 27 °C. Considere a seguinte transformação isobárica do conjunto: a temperatura de $G_1$ aumenta 100 °C e a de $G_2$, diminui 100 °C. A expressão que representa o deslocamento $x$ do êmbolo até o novo ponto de equilíbrio é:

a) $2V/(3S)$

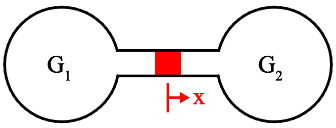
b) $3V/(2S)$

c) $V/(2S)$

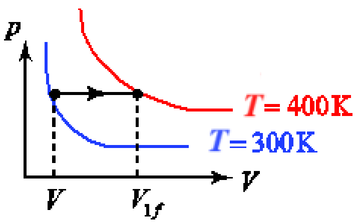
d) $V/(3S)$

e) $V/(6S)$

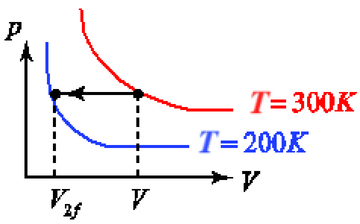
**Resolução**




gás $G_1$




gás $G_2$:



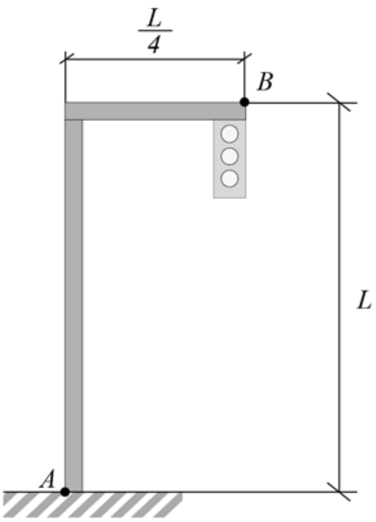

$\frac{V}{T_0} = \frac{V_{1f}}{T} \Rightarrow V_{1f} = \frac{4}{3}V$ $\qquad$ $\frac{V}{T_0} = \frac{V_{2f}}{T} \Rightarrow V_{2f} = \frac{2}{3}V$

Para o novo equilíbrio, as pressões dos dois gases devem ser iguais. Isso irá ocorrer com o aumento de $V/3$ no volume do gás $G_1$ e a diminuição de $V/3$ no volume do gás $G_2$.

Logo: $V/3 = S \cdot x$ $\qquad x = V/(3S)$

**Alternativa D.**

## Questão 21




Inicialmente, um poste, fabricado com material de coeficiente de dilatação volumétrica γ, tem as dimensões indicadas na figura, estando o ponto A fixo. Ao ser submetido a um aumento de temperatura T, o ponto B é deslocado de:

a) $\dfrac{\sqrt{17}\gamma TL}{4}$

b) $\dfrac{5\gamma TL}{12}$

c) $\dfrac{\sqrt{17}\gamma TL}{21}$

d) $\dfrac{\sqrt{17}\gamma TL}{12}$

e) $\dfrac{\gamma TL}{4}$

---

**Resolução**

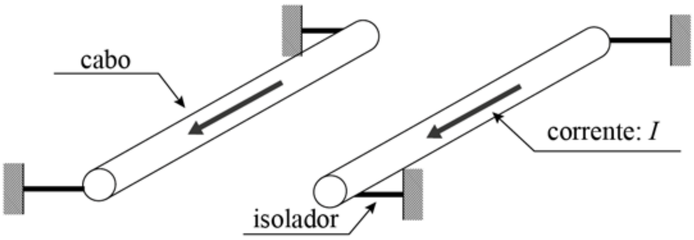
$$\alpha = \frac{\gamma}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_x &= \frac{L}{4}\cdot\frac{\gamma}{3}\cdot T = \frac{\gamma LT}{12} \\ \Delta L_y &= L\cdot\frac{\gamma}{3}\cdot T = \frac{\gamma LT}{3} \end{aligned}\right\} \Delta L_B = \sqrt{\Delta Lx^2 + \Delta Ly^2} \Rightarrow$$

$$\Delta L_B = \gamma LT\sqrt{\frac{1}{144} + \frac{1}{9}} = \frac{\gamma LT\sqrt{17}}{12}$$

**Alternativa D.**

## Questão 22




Um sistema de distribuição em corrente contínua contém um circuito com 2 cabos condutores rígidos idênticos ligados em paralelo, fixados por isoladores de borracha e posicionados conforme mostra a figura.

**Dados:**

- distância entre os centros dos cabos: 5 cm;
- permeabilidade magnética do meio: $8\pi \cdot 10^{-7}$ T.m/A;
- força máxima admissível nos isoladores por unidade de área: $625.10^4$ N/m$^2$;
- comprimento de cada cabo: 10 m;
- área da seção transversal dos isoladores: 10 mm².

**Observação**:

- Use a aproximação de fios infinitos para o cálculo dos campos magnéticos.

A máxima corrente do circuito *I*, em A, que pode circular simultaneamente em cada um dos cabos, sem o rompimento dos isoladores, é:

a) $625/\sqrt{2}$
b) 625
c) $625/\sqrt{3}$
d) 1250
e) 2500

---

**Resolução**

Cada isolador suporta uma força máxima dada por:

$$F = \Im \cdot A \;\Rightarrow\; F = 625.10^4 \cdot \left(10 \cdot 10^{-6}\right) = 62{,}5\ N$$

Em cada cabo, como teremos 2 isoladores, a força máxima suportada será 125 N. Dessa forma, temos:

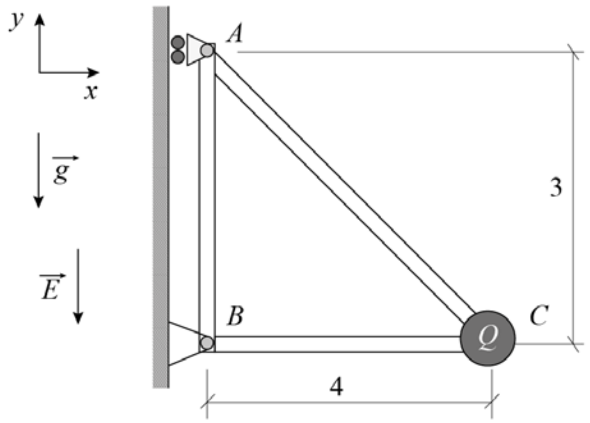
$$F = \frac{\mu \cdot i_1 \cdot i_2 \cdot \ell}{2\pi d}$$

$$F = \frac{8 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \cdot I^2 \cdot 10}{2\pi \cdot 5 \cdot 10^{-2}} = 125 \Rightarrow \frac{4}{5} \cdot 10^{-4} I^2 = 125$$

$$I^2 = \frac{625 \cdot 10^4}{4} \;\Rightarrow\; I = \frac{25}{2} \cdot 100 = 1250A$$

**Alternativa D.**

## Questão 23




A figura apresenta uma estrutura formada pelas barras AB, BC e CA. Essa estrutura está apoiada na parede vertical nos pontos A e B. O apoio A permite reações apenas na direção do eixo x, enquanto o apoio B permite reações nas direções dos eixos x e y. Na extremidade C da estrutura está posicionada uma partícula de carga *Q* e massa *M*. A estrutura está em uma região do espaço submetida a um campo elétrico vertical de módulo *E* e sentido de cima para baixo.

**Dados:**

- comprimento da barra BC: 4 m;
- comprimento da barra AB: 3 m;
- massa da barra BC: 2,5 kg;
- massa da partícula: $M = 0{,}3$ kg;
- carga da partícula: $Q = -5$ C;
- intensidade do campo elétrico: 4,6 N/C;
- aceleração da gravidade: g = 10 m/s².

**Observações:**

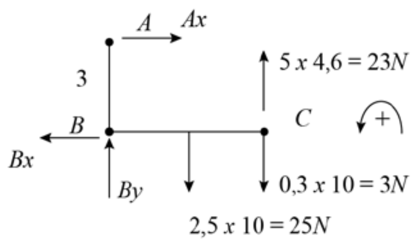
- os apoios não admitem torque;
- as massas das barras AB e AC são desprezíveis;
- a distribuição de massa da barra BC é uniforme.

O módulo da reação no apoio A, em N, é aproximadamente:

a) 10
b) 17
c) 19
d) 21
e) 23

---

**Resolução**




$\sum Fy = 0 \quad (\text{Força resultante nula})$

$By + 23 = 25 + 3 = 28$

$By = 5 \text{ N}$

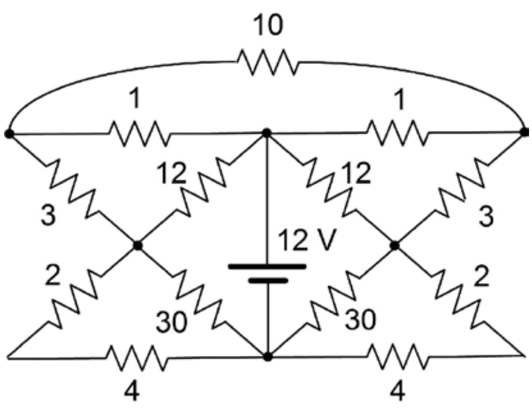
$\tau_c = 0 \quad (\text{Torque resultante nulo})$

$-A_x \cdot 3 - 5 \cdot 4 + 25 \cdot 2 = 0$

$3A_x = 30 \Rightarrow A_x = 10 \text{ N}$

**Alternativa A.**

## Questão 24

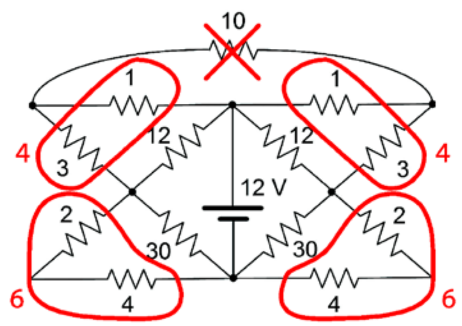



No circuito da figura, os valores de resistência apresentados encontram-se em Ω. A potência, em W, fornecida pela fonte é:

a) 18
b) 36
c) 54
d) 72
e) 96

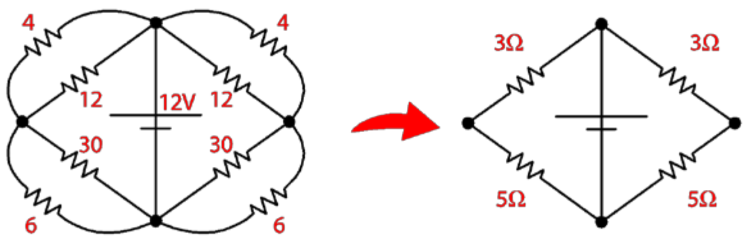
---

**Resolução:**




Por simetria, como a resistência de 10 Ω está conectada em um mesmo potencial, ela pode ser removida.

Fazendo as associações em cada trecho, temos:




Logo:

$$R_{eq} = 8\,\Omega\,//\,8\,\Omega = 4\,\Omega$$

$$P_{ot} = \frac{U^2}{R_{eq}} = \frac{12^2}{4} = 36\,W$$

**Alternativa B.**

## Questão 25

Um satélite artificial move-se por uma órbita aproximadamente circular estável em torno de um planeta. Posteriormente, o satélite acelera até a velocidade de escape do campo gravitacional em que se encontra devido ao impulso recebido pela ejeção de gases.

**Dados:**

- Constante universal da gravitação: *G*;
- raio da órbita circular estável original do satélite: *r*;
- massa do planeta: *M*;
- $\sqrt{2} \approx 1,41$.

A diferença entre o módulo da velocidade de escape do satélite e o módulo da sua velocidade na órbita estável original é de aproximadamente:

a) $0,59\sqrt{GM/r}$

b) $1,41\sqrt{GM/r}$

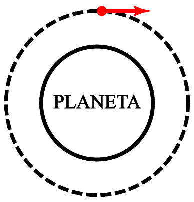
c) $0,41\sqrt{GM/r}$

d) $2,41\sqrt{GM/r}$

e) $2,82\sqrt{GM/r}$

---

**Resolução**




A velocidade do satélite em uma órbita circular em torno do planeta é dada por:

$$Fg = Fcp \Rightarrow \frac{GM\,m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G\,m}{r}}$$

A velocidade mínima para que o satélite saia completamente da influência do planeta (velocidade de escape) será:

$$E_{mo} = E_{mf} \;\Rightarrow\; E_{pg} + E_c = 0 \;(\text{infinito})$$

$$\frac{-GM\,m}{r} + \frac{m \cdot v_c^2}{2} = o$$

$$V_c = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

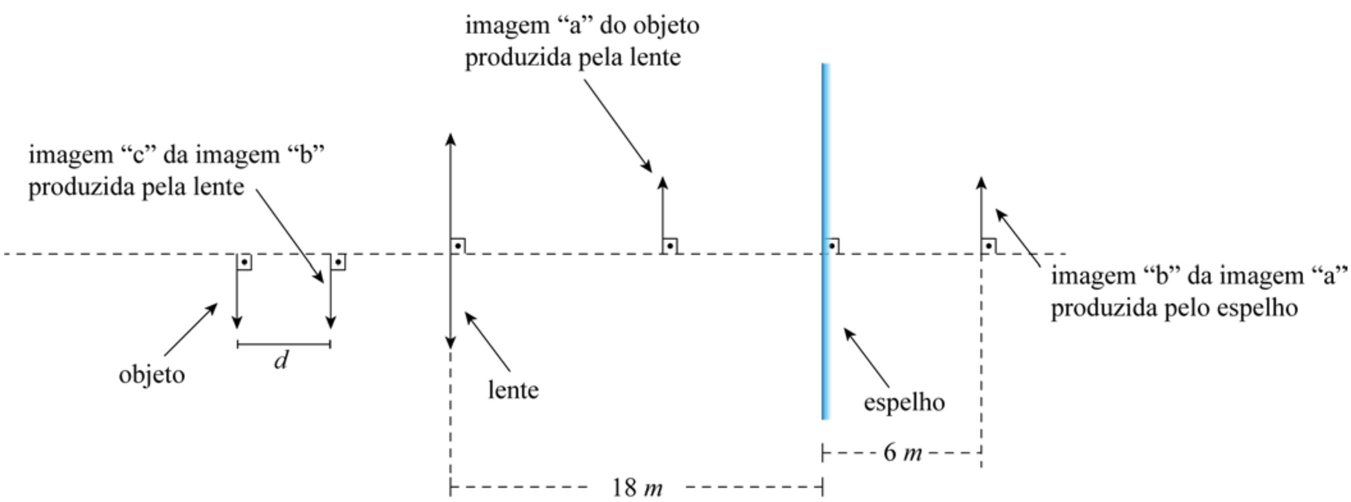
Logo, a diferença de velocidades pedida é:

$$\Delta v = v_c - v = \sqrt{\frac{2GM}{r}} - \sqrt{\frac{GM}{r}} = \left(r_2 - 1\right)\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$\Delta v = 0,41\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

**Alternativa C.**

## Questão 26




Um objeto encontra-se sobre o eixo central de uma lente convergente delgada, em algum ponto à esquerda da lente. A imagem desse objeto produzida pela lente está indicada na figura como imagem "*a*". Um espelho plano reflete a imagem "*a*", produzindo uma imagem "*b*". Por sua vez, a imagem "*b*", ao passar de volta pela lente, produz a imagem "*c*".

**Dado:**

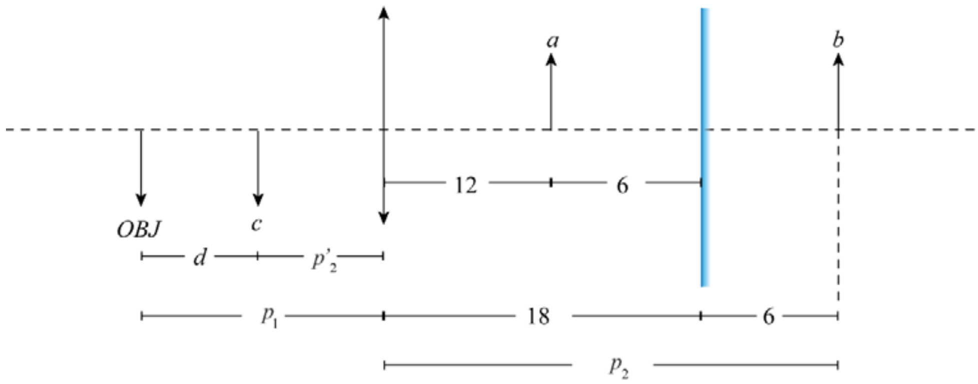
- distância focal da lente (em ambos os lados da lente): 4 *m*.

A distância *d*, indicada na figura, entre o objeto e a imagem "c" final, em centímetros, é

a) 80
b) 120
c) 180
d) 480
e) 600

---

**Resolução**




$OBJ \to a\,(Gauss)$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{2}{12} = \frac{1}{p_1} \quad \therefore \quad p_1 = 6\ m$$

$c \leftarrow b\,(Gauss)$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{24} + \frac{1}{p'_2}$$

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{24} + \frac{1}{p'_2}$$

$$\frac{5}{24} = \frac{1}{p'_2} \quad \therefore \quad p'_2 = 4{,}8\ m$$

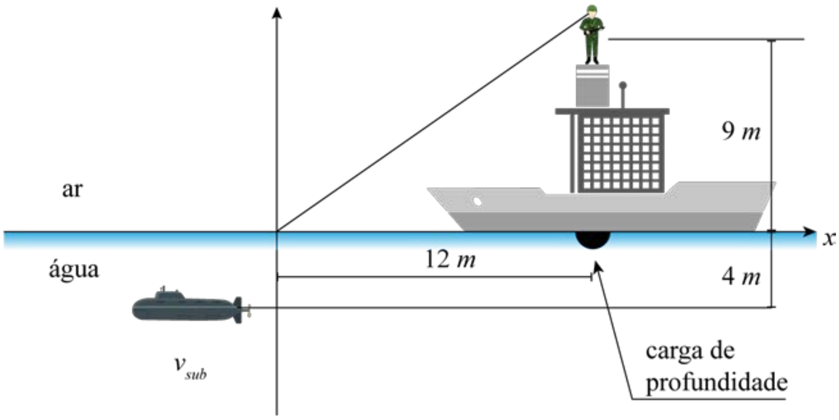
$$d = p_1 - p'_2$$

$$d = (600 - 480)\,cm$$

$$d = 120\ cm$$

**Alternativa B.**

## Questão 27




Um navio de guerra encontra-se parado com um marinheiro de vigia em um posto de observação 9 *m* acima do nível do mar. Em um determinado instante, esse marinheiro avista um submarino aproximando-se na direção do eixo *x*, à velocidade constante e a 4 *m* de profundidade, conforme ilustra a figura. No instante em que o submarino é avistado, uma carga de profundidade é liberada do navio e, depois de um certo tempo, o submarino é destruído ao ser atingido pela carga de profundidade.

**Dados:**

- velocidade inicial da carga de profundidade: 0 m/s;
- aceleração da gravidade: 10 $m/s^2$;
- volume da carga de profundidade: $0,001\ m^3$;
- massa específica da água: $1000\ kg/m^3$;
- massa da carga de profundidade: 1,8 kg;
- índice de refração do ar: 1;
- índice de refração da água: 4/3.

**Observação:**

- considere constante o empuxo sobre a carga de profundidade.

Diante do exposto, a velocidade do submarino, em *m/s*, era de:

a) $5\sqrt{5}$

b) $5\sqrt{3}$

c) $6\sqrt{5}$

d) $6\sqrt{3}$

e) $4\sqrt{3}$

---

**Resolução**

Pela Lei de Snell, temos:

$$n_{ar} \cdot \text{sen}\theta_1 = n_{água} \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$1 \cdot \left( \frac{12}{\sqrt{12^2 + 9^2}} \right) = \frac{4}{3} \cdot \text{sen}\theta_2$$

$$0,8 = \frac{4}{3} \cdot \text{sen}\theta_2 \Rightarrow \text{sen}\theta_2 = 0,6$$

$$\text{sen}\theta_2 = 0,6 \ \Rightarrow \ tg\theta_2 = \frac{0,6}{0,8} = \frac{3}{4}$$

$$tg\theta_2 = \frac{x}{4} = \frac{3}{4} \ \Rightarrow \ x = 3\ m$$

Logo, até ser atingido, o submarino irá se deslocar $\Delta x = 3 + 12 = 15$ metros.
Enquanto isso, a carga terá deslocado 4 metros de profundidade no seguinte intervalo de tempo:

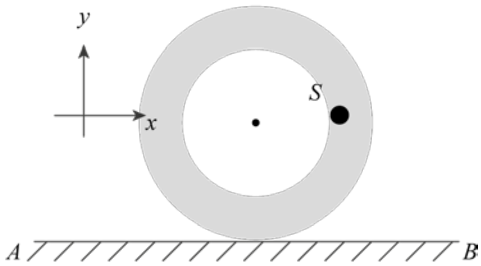
$$P - E = m \cdot a$$
$$m \cdot g - \rho_A \cdot V \cdot g = m \cdot a$$
$$1{,}8 \cdot 10 - 1000 \cdot 0{,}001 \cdot 10 = 1{,}8 \cdot a$$
$$18 - 10 = 1{,}8a \Rightarrow a = \frac{8}{1{,}8} = \frac{40}{9}\ m/s^2$$
$$\Delta h = \cancel{V_0 t} + a\frac{t^2}{2} \Rightarrow 4 = \frac{40}{9} \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow t^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow t = \frac{3\sqrt{5}}{5} s$$

Logo, a velocidade do submarino será:

$$\Delta x = v_s \cdot t \Rightarrow 15 = \frac{3\sqrt{5}}{5} \cdot t$$
$$t = \frac{15\sqrt{5}}{3} \Rightarrow 5\sqrt{5}\ m/s$$

**Alternativa A.**

## Questão 28




Na figura, uma partícula *S* e os pontos extremos *A* e *B* de um espelho plano movem-se no plano *xy* de acordo com as seguintes equações paramétricas para as coordenadas (em metros) em função do instante $t > 0$ (em segundos):

$$\begin{cases} x_{A(t)} = 5 + t \\ y_{A(t)} = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_{B(t)} = 10 + t \\ y_{B(t)} = -5 - 2t \end{cases} \quad \begin{cases} x_{S(t)} = \text{sen}(t) \\ y_{S(t)} = \cos(t) \end{cases}$$

**Observação:**

- O plano do espelho é ortogonal ao plano *xy*.

A maior velocidade escalar atingida pela imagem da partícula no espelho, em *m/s*, é:

a) $3$
b) $\sqrt{17}$
c) $2(1+\sqrt{5})$
d) $5$
e) $2\sqrt{5}$

---

**Resolução**

A partir das equações, observa-se que o espelho apresenta um movimento em *x* para a direita (que não interfere na velocidade da imagem) e um movimento em *y* com velocidade –2 *m/s* (espelho se afasta do objeto).

A partícula, por sua vez, apresenta equações que descrevem uma circunferência de raio *R* = 1.

$$\text{sen}^2 t + \cos^2 t = x_s^2(t) + y_s^2(t) = 1$$

A velocidade da partícula pode ser escrita como:

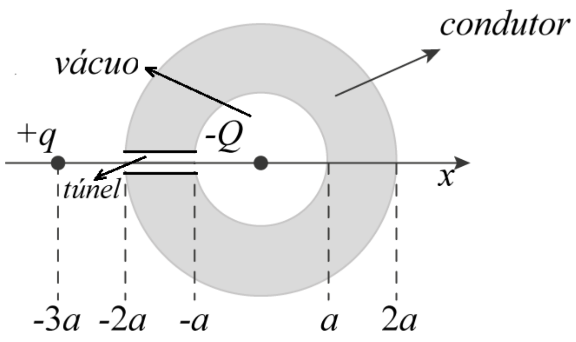
$$v_{xs}(t) = \cos(t) \text{ e } v_{ys}(t) = -sen(t)$$

Relativamente ao referencial xy dado, ela apresenta componente máxima com módulo igual a 1 *m/s*. Dessa forma, considerando o movimento relativo entre a partícula *S* e o espelho, a velocidade máxima da imagem será:

$$v_i = \left|v_{ys(máx)}\right| + 2 \cdot v_e = 1 + 2 \cdot 2 = 5\ m/s.$$

**Alternativa D.**

## Questão 29




O arranjo da figura é composto por uma casca esférica condutora oca de espessura *a* com uma partícula de carga negativa fixada em seu centro. A casca possui um túnel muito estreito em torno do eixo x, por onde uma partícula de carga positiva, inicialmente em repouso, pode atravessá-la.

**Dados:**

- massa da partícula de carga positiva: *m*;
- carga da partícula negativa: $+q$;
- carga da partícula negativa: $-Q$;
- constante eletrostática do meio não condutor (vácuo): *k*;
- raio interno da casca condutora: *a*;
- raio externo da casca condutora: 2a;
- posição inicial da partícula positiva: $x = -3a$;
- posição da partícula negativa: fixa em $x = 0$.

**Observações**

- $|q| \ll |Q|$;
- a carga da partícula positiva é pequena o suficiente para não afetar o equilíbrio eletrostático na casca esférica condutora;
- despreze qualquer concentração de cargas nas paredes do túnel;
- o eixo *x* passa pelo centro da casca;
- a casca condutora está fixa e com carga total nula.

Ao ser liberada do repouso, a partícula positiva atinge a velocidade *v* em $x = -a$. Pode-se afirmar que $v^2$ é:

a) $\dfrac{kqQ}{2am}$

b) $\dfrac{kqQ}{3am}$

c) $\dfrac{4kqQ}{3am}$

d) $\dfrac{3kqQ}{2am}$

e) $\dfrac{kqQ}{am}$

---

**Resolução**

Conservando a conservação da Energia e tendo em vista que a partícula não muda de velocidade no trecho ($-2a$) até ($-a$), pois o campo é nulo:

$$-\frac{kQq}{3a} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{kQq}{2a} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{kQq}{a}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$v^2 = \frac{1kQq}{3am}$$

**Alternativa B.**

## Questão 30

A espaçonave CEOS passa pelo corpo celeste AI-Quds com velocidade relativa de 6,0c, onde *c* é a velocidade da luz no vácuo. No instante em que CEOS e AI-Quds estão alinhados, os relógios do comandante da espaçonave (tCEOS) e de um observador situado em AI-Quds (tQUDS) são sincronizados e zerados. A espaçonave emite uma luz muito intensa no instante em que o comandante da espaçonave marcas tCEOS = 4 s após sua passagem por AI-Quds.

Dado:

- $c = 3 \cdot 10^8 \ m/s.$

Observação:

- Admita o corpo celeste AI-Quds como sendo um referencial inercial e que a espaçonave se movimente sempre em linha reta.

Tomando como referencial o observador em AI-Quds, o instante tQUDS do início da emissão da luz pela CEOS e a distância percorrida pelo CEOS desde a passagem por AI-Quds até esse instante são, respectivamente:

a) 3,2 s e $7,2 \cdot 10^8 m$

b) 3,2 s e $12,0 \cdot 10^8 m$

c) 5,0 s e $11,25 \cdot 10^8 m$

d) 5,0 s e $7,5 \cdot 10^8 m$

e) 5,0 s e $9,0 \cdot 10^8 m$

---

**Resolução**

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$$

Dentro da espaçonave, o tempo se passa mais lentamente que em AI-Quds:

$$t = \frac{4}{0,8} = 5 \ s$$

A distância percorrida pela espaçonave é a velocidade vezes o tempo:

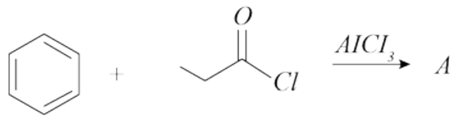
$$d = 0,6c \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 10^8 = 9 \cdot 10^8 m$$

**Alternativa E.**

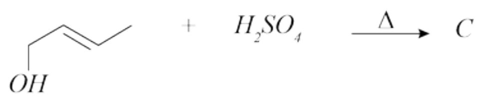
# QUÍMICA

## Questão 31

Considere as reações na sequência abaixo:

1) 

2) $A + Cl_2 \longrightarrow B$

3) 

4) $C + HBr \xrightarrow{H_2O_2} D$

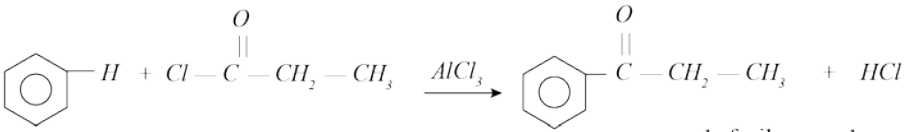
Sabendo que *A*, *B*, *C* e *D* representam os compostos orgânicos formados majoritariamente em cada uma das reações, a alternativa que contém as nomenclaturas viáveis para cada um desses compostos, respectivamente, é:

a) 1-fenilpropan-1-ona; 1-(3-clorofenil)propan-1-ona; but-1-eno; 1-bromo-butano
b) 1-fenilpropan-2-ona; 1-(4-clorofenil)propan-2-ona; but-2-eno; 1-bromo-butano
c) 1-fenilpropan-1-ona; 1-(3-clorofenil)propan-1-ona; but-1-eno; 2-bromo-butano
d) 1-fenilpropan-2-ona; 1-(4-clorofenil)propan-2-ona; but-1-eno; 2-bromo-butano
e) 1-fenilpropan-1-ona; 3-(3-clorofenil)propan-2-ona; but-2-eno; 2-bromo-butano

---

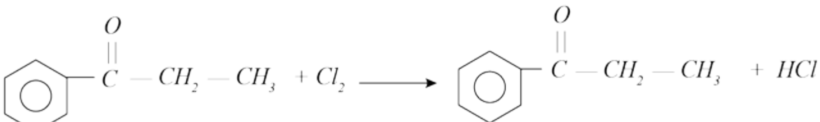
**Resolução**

1)



1- fenilpropan-1-ona

2)



1- (3-clorofenil) propa-1-ona

3)

$$H_2C(OH)-CH_2-CH_2-CH_3 + H_2SO_4 \xrightarrow{\Delta} H_2C=CH-CH_2-CH_3 + H_2O$$

But-1-eno

4)

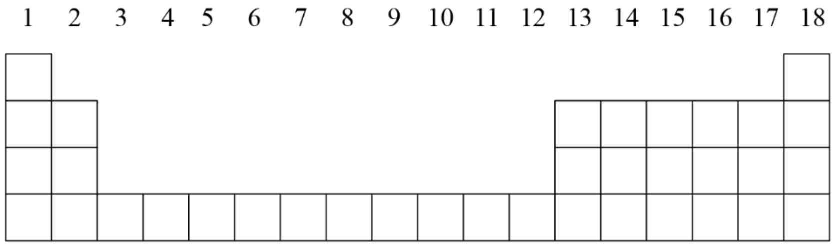
$$H_2C=CH-CH_2-CH_3 + HBr \xrightarrow{H_2O_2} H_2C(Br)-CH_2-CH_2-CH_3$$

1-Biomobutano

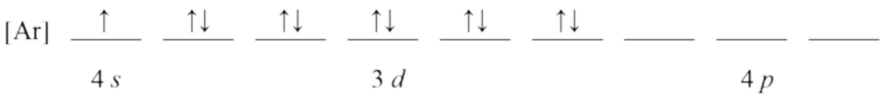
**Alternativa A.**

## Questão 32

Considere o esboço parcial da Tabela Periódica representado abaixo.




Sabe-se que um cátion trivalente apresenta o seguinte diagrama de preenchimento orbital:




O elemento químico correspondente a esse cátion é o:

a) Al
b) Cu
c) Ni
d) Ge
e) Se

---

**Resolução**

O cátion trivalente apresenta um número de elétrons igual ao do argônio acrescido de mais 11 unidades. Isso significa que o átomo possui a distribuição do argônio seguida de mais 14 unidades, que seria:

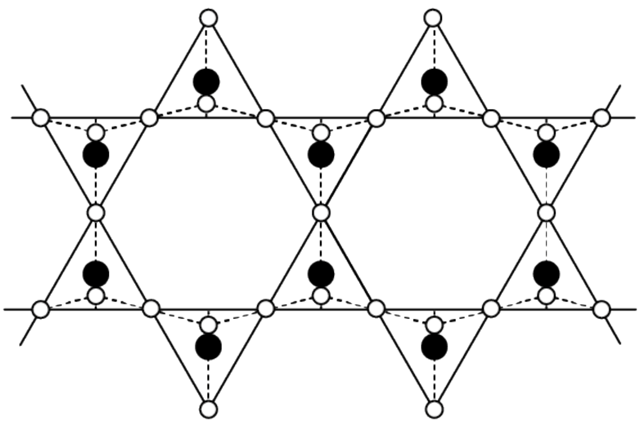
$[X] = [Ar]\ 4s^2\ 3d^{10}\ 4p^2$

Isso corresponde ao elemento do 4º período e grupo 14, ou seja, o Germânio.

**Alternativa D.**

## Questão 33

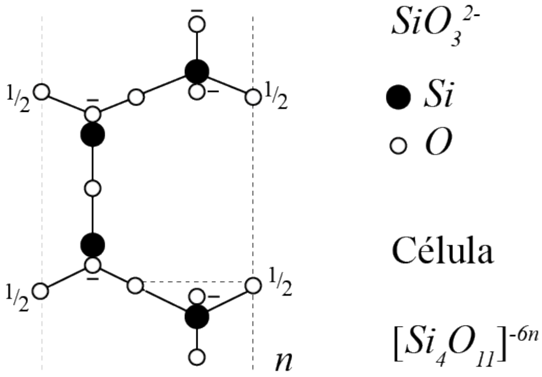
“Amianto” é o nome genérico de muitos minerais fibrosos de silicatos. O amianto mais importante, o crisótilo, é um silicato de magnésio hidratado. O íon silicato do crisótilo é estruturado como linha dupla de tetraedros formados por átomos e Silício (círculos pretos) e de Oxigênio (círculos brancos) como representado na figura abaixo.



Diante do exposto, a composição geral do íon silicato do crisótilo é:

a) $(SiO_4)_n^{4n-}$
b) $(Si_2O_5)_n^{2n-}$
c) $(Si_2O_6)_n^{3n-}$
d) $(Si_4O_{11})_n^{6n-}$
e) $(Si_4O_{13})_n^{10n-}$

**Resolução**




**Alternativa D.**

## Questão 34

Um drone submarino estava navegando a 90 m de profundidade e a uma pressão de 10 atm, quando o casco sofreu uma avaria. Para trazê-lo à superfície, foi acionado um dispositivo de emergência, que produz hidrogênio por uma célula eletroquímica contendo 2 L de solução aquosa de $H_2SO_4$ com concentração 2 mol/L. A eletrólise foi encerrada quando o drone atingiu a superfície. Nesse momento, o restante da solução aquosa de $H_2SO_4$ foi analisado nas CNTP, tendo sido verificado que sua concentração era de 8 mol/L.

A única alternativa correta é:

a) A uma pressão é de 10 atm, o cátodo passou a agir como anodo e o anodo como catodo.
b) A estrutura interna do drone sofreu avarias, porque o $H_2SO_4$ decomposto no anodo gerou vapores corrosivos.
c) O volume de $H_2O$ consumido foi de 1,5 L.
d) A massa de $H_2SO_4$ restante foi de 49g.
e) O volume da solução aquosa de $H_2SO_4$ reduziu para 75% do seu valor inicial.

**Resolução:**

$$m_{H_2SO_4} \text{ constante}$$
$$C_0 \cdot V_0 = C_f \cdot V_f$$
$$2\ mol/L \cdot 2\ L = 8\ mol/L \cdot V_f$$
$$V_f = \frac{4\ L}{8}$$
$$V_f = 0{,}5\ L$$
$$V_{consumido} \text{ de } H_2O = 2 - 0{,}5$$
$$V_{consumido} \text{ de } H_2O = 1{,}5 \text{ L}$$

**Alternativa C.**

## Questão 35

Com relação aos compostos de interesse bioquímico abaixo, a alternativa INCORRETA é:

a) Dentre os compostos timina, prolina, ácido aspártico e lisina, a timina é o único composto que não forma ligação peptídica.
b) Os aminoácidos são anfóteros, podendo doar ou receber prótons $(H^+)$ de acordo com o conceito ácido base de Brönsted-Lowry.
c) O RNA tem em sua estrutura diferentes combinações dos nucleotídeos formados pelas bases nitrogenadas purínicas adenina e guanina e pelas bases nitrogenadas pirimidínicas uracila e citosina.
d) Os aminoácidos sintetizados em quantidade suficiente pelo sistema metabólico de certos organismos vivos são denominados não essenciais.
e) Os aminoácidos valina e glicina são constituintes das proteínas, opticamente ativos e formam ligações peptídicas.

**Resolução**

Glicina não possui Carbono quiral e, portanto, não apresenta atividade óptica.

**Alternativa E.**

## Questão 36

Considere cinco recipientes rígidos com o mesmo volume interno, nos quais são admitidas amostras de gases que são mantidas nas condições especificadas em cada opção abaixo. Levando em conta o comportamento de gases ideais, a alternativa que corresponde à maior pressão é:

a) 16 g de metano nas CNTP.
b) 8 g de oxigênio e 14,48 g de ar atmosférico a 0 ºC.
c) 7 g de dióxido de carbono e 7 g de nitrogênio a 20 °C.
d) 8 g de oxigênio e 14 g de nitrogênio a 20 °C.
e) 13,6 g de amônia a 72 °C.

**Resolução**

Deve-se calcular a pressão de cada uma das alternativas e marcar aquela que corresponde à maior.

a) 16 g de $CH_4$. Calculando a massa molar:

$MM = 12 + 4 \cdot 1 = 16$ g.mol$^{-1}$

Então, há 1 mol de $CH_4$ na CNTP (T= 273 K). Assim,

$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$

$P = (R \cdot 273)/V$.

b) Calculando a massa molar média do ar atmosférico:

$MM = 0{,}21 \cdot MM\ (O_2) + 0{,}79 \cdot MM\ (N_2)$

$MM = 0{,}21 \cdot 32 + 0{,}79 \cdot 28 = 6{,}72 + 21{,}12 = 28{,}84\ g.mol^{-1}$

Assim, há 0,25 mol de $O_2$ e 0,5 mol de ar atmosférico a 0 °C.

$P = (0{,}75 \cdot R \cdot 273)/V.$

c) Calculando as massas molares:

$MM\ (CO_2) = 12 + 2.\ 16 = 44$ g.mol$^{-1}$

$MM\ (N_2) = 2 \cdot 14 = 28$ g.mol$^{-1}$

Então, o número de mols é $n = 7/44 + 7/28 = 0{,}409$ mols.

Calculando a pressão: $P = (0{,}409 \cdot R \cdot 293)/V = 119{,}84\ R/V.$

d) O número de mols de gás será dado por:

n = 8 / 32 + 14 / 28 = 0,75 mols.

Calculando a pressão: $P = (0{,}75 \cdot R \cdot 293)/V = 219{,}75\ R/V.$

e) A massa molar da amônia é:

$MM = 14 + 3 \cdot 1 = 17$ g.mol$^{-1}$.

O número de mols é dado por: n = 13,6 / 17 = 0,8 mols.

Assim, a pressão será: $P = (0{,}8 \cdot R \cdot 345)/V = 276\ R/V.$

**Alternativa E.**

## Questão 37

Uma alíquota de 100 mL de uma solução que contém íons de $Cr^{2+}$ e $Cr^{3+}$ foi titulada com 200 mL de $KMnO_4$ com concentração 0,01 mol/L (em ácido sulfúrico diluído), tendo sido todos os íons de $Cr^{2+}$ oxidados a íons $Cr^{3+}$. Em seguida, uma outra alíquota de 100 mL da solução original foi tratada com Fe metálico para converter todos os íons de $Cr^{3+}$ em íons de $Cr^{2+}$. A solução obtida consumiu 300 mL da mesma solução de $KMnO_4$ para a oxidação de todos os íons a $Cr^{3+}$.

A equação iônica simplificada é: $KMnO_4 + 5Cr^{2+} \rightarrow Mn^{2+} + 5Cr^{3+} + 4H_2O + K^+$

As concentrações molares de $Cr^{2+}$ e de $Cr^{3+}$ na solução original são:

a) $[Cr^{2+}] = 0{,}05$ mol/L e $[Cr^{3+}] = 0{,}1$ mol/L.

b) $[Cr^{2+}] = 0{,}1$ mol/L e $[Cr^{3+}] = 0{,}05$ mol/L.

c) $[Cr^{2+}] = 0{,}004$ mol/L e $[Cr^{3+}] = 0{,}002$ mol/L .

d) $[Cr^{2+}] = 0{,}1$ mol/L e $[Cr^{3+}] = 0{,}15$ mol/L.

e) Não é possível calcular as concentrações sem conhecer a razão entre elas na solução original.

---

**Resolução**

Adotando-se como x e y os números de mols de Cr2+ e Cr3+, respectivamente, em 100 ml de solução original.

A quantidade de $KMnO_4$ utilizada na primeira e na terceira reação foi de:

$n_1 (KMnO_4) = 0{,}2 \cdot 0{,}01 = 2 \cdot 10^{-3}$ mols.

$n_3 (KMnO_4) = 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 3 \cdot 10^{-3}$ mols.

Na primeira reação, apenas os íons $Cr^{2+}$ reagem. Como a proporção estequiométrica da reação é de 1 mols de $KMnO_4$ para 5 mols de $Cr^{2+}$, então:

$x = 5 \cdot n_1 (KMnO_4) = 10^{-2}$ mols.

Na segunda reação, todos os íons $Cr^{3+}$ são reduzidos a $Cr^{2+}$. Assim, o número de mols de $Cr^{2+}$ que reage na terceira reação é de x + y. Então, pela estequiometria da reação:

$x + y = 5 \cdot n_3 (KMnO_4) = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$

$10^{-2} + y = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$

$y = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ mols.

Como a alíquota utilizada foi de 100 mL:

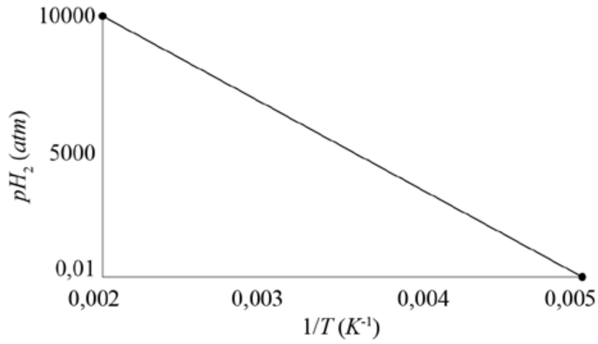
$[Cr^{2+}] = 10^{-2} / 10^{-1} = 0{,}1$ mol/L

$[Cr^{3+}] = 0{,}5 \cdot 10^{-2} / 10^{-1} = 0{,}05$ mol/L

**Alternativa B.**

## Questão 38

O cálcio metálico reage com hidrogênio gasoso para produzir hidreto metálico. A pressão de equilíbrio do hidrogênio gasoso em função do inverso da temperatura absoluta dessa reação segue o gráfico a seguir.




**Dados:**

- $R$ = 8,0 J/(mol.K)
- ln(10) = 2,3

O calor, em kJ, envolvido na produção de 1 mol desse hidreto, a pressão constante de 1 atm, considerando comportamento de gás ideal, é aproximadamente igual a:

a) - 37
b) - 25
c) 0
d) + 25
e) + 37

---

**Resolução**

O equilíbrio em questão é:

$$Ca_{(s)} + H_{2(g)} \rightleftarrows CaH_{2(s)}$$

Assim, a constante de equilíbrio ($K_P$) é dada por:

$$K_P = \frac{1}{P(H_{2(g)})}$$

A equação de van't Hoff diz:

$$\ln\left(\frac{K_2}{K_1}\right) = \frac{\Delta H}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

$$\ln\left(\frac{P(H_{2(g)})_1}{P(H_{2(g)})_2}\right) = \frac{\Delta H}{R} \cdot \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$$

Para 1/T = 0,002 $K^{-1}$, $P(H_{2\,(g)}) = 10^4$ atm. Para 1/T = 0,005 atm, $P(H_{2\,(g)}) = 10^{-2}$ atm. Assim:

$$\ln\left(\frac{10^4}{10^{-2}}\right) = \frac{\Delta H}{8} \cdot (0,002 - 0,005)$$

$$\ln(10^6) = \frac{-0,003 \cdot \Delta H}{8}$$

$$6 \cdot \ln 10 = \frac{-0,003 \cdot \Delta H}{8}$$

$$\Delta H = -\frac{6 \cdot 2,3 \cdot 8}{0,003} = -36800 \cong -37\, kJ.mol^{-1}$$

**Alternativa A.**

## Questão 39

O gás hélio, raro na Terra, origina-se notadamente do decaimento radioativo dos tipos $\alpha$ e $\beta$ dos elementos Urânio-238 e Tório-234, sendo encontrado em depósitos de gás natural.
Sabe-se que o esquema de decaimentos até a ocorrência do isótopo Tório-230 é:

$$^{238}U \rightarrow {}^{234}Th \rightarrow {}^{234}Pa \rightarrow {}^{234}U \rightarrow {}^{230}Th$$

Portanto, a partir de 1 mol de Urânio-238 e de 1 mol de Tório-234, até a ocorrência de Tório-230, obtém-se, no máximo:

a) 1 mol de He.
b) 2 mols de He.
c) 3 mols de He.
d) 4 mols de He.
e) nenhum mol de He.

---

**Resolução**

As sequências de emissões do U – 238 e do Th – 234 são, respectivamente:

$$^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + {}^{4}_{2}\alpha \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{234}_{92}U + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{230}_{90}Th + {}^{4}_{2}\alpha$$

$$^{234}_{90}Th \rightarrow {}^{234}_{91}Pa + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{234}_{92}U + {}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{230}_{90}Th + {}^{4}_{2}\alpha$$

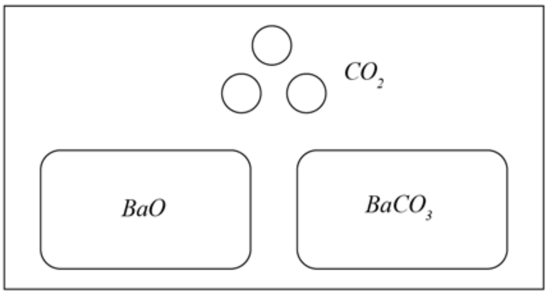
Assim, há a emissão de 2 mols de partículas alfa ($\alpha$) por mol de U – 238 e 1 mol de partículas alfa ($\alpha$) por mol de Th – 234.
Ou seja, um total de 3 mols de hélio.

**Alternativa C.**

Obs.: um caminho alternativo seria observar que o número de massa diminui 8 unidades do U – 238 até o Th – 230; e 4 unidades do Th – 234 até o Th – 230, ou seja, ocorrendo emissão de duas partículas alfa e uma partícula alfa, respectivamente.

## Questão 40

Na figura abaixo encontra-se ilustrada uma mistura em equilíbrio composta por $BaCO_3$(s), BaO(s) e $CO_2$(g), em sistema fechado, resultante da decomposição endotérmica do carbonato de bário.




Considere as seguintes situações, tendo por base as moléculas de $CO_2$(g):
i) o equilíbrio após uma adição de moléculas de $CO_2$(g), de forma a triplicar a quantidade desse gás; e
ii) a mistura em equilíbrio a uma temperatura mais elevada.

A alternativa que melhor ilustra as situações I e II, respectivamente, é:

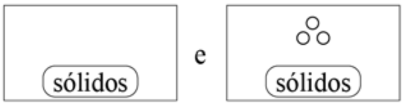
a)


e

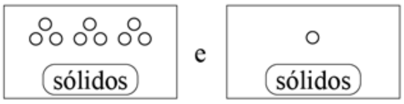

b)


e

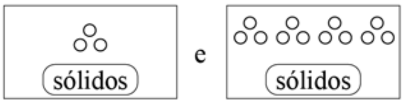
c)




d)




e)

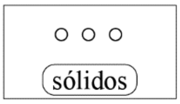



---

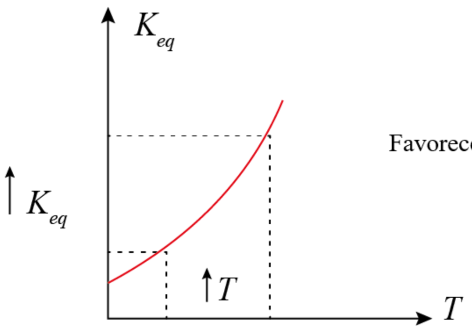
**Resolução**

$BrCO_{3(s)} \rightleftharpoons BrO_{(s)} + CO_{2(g)} \quad \Delta H > O$

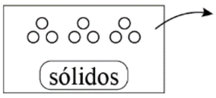
i) Ao alterar a concentração, não ocorre alteração no valor da constante de equilíbrio.




ii) Sendo a decomposição endotérmica




Favorece formação de $CO_2$




Maior concentração de $CO_2$

**Alternativa E.**

**Matemática**
Alexandre Moraes
Mateus Bezerra
Kellem Corrêa

**Física**
Anderson Marques
João Paulo Botelho
Paulo Wang

**Química**
Heitor Cruz
Welson Felipe

**Colaborador**
Alexandre Manso

**Revisor**
Pedro Verdejo

**Digitação e Diagramação**
Alex de Faria
Isabella Maciel
Juan Charles
Moisés Nascimento

**Ilustração**
Alex de Faria
Jessica Loumine
Isabella Maciel
Moisés Nascimento

**Supervisão Editorial**
Aline Alkmin
Anderson Marques



*A Resolução Comentada das provas do IME*
*poderá ser obtida diretamente no site do* ***GRUPO OLIMPO****.*

***As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida,***
***dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.***
***Esteja preparado.***

**www.grupoolimpo.com.br**