"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

MATEMÁTICA

Questão 01

Sejam a e b números reais positivos. Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} -ax+by+az=0 \\ b^2x+a^3y+4a^2z=0 \\ 4a^2x+a^3y+b^2z=0 \end{cases}$$

Sabendo que esse sistema admite solução não trivial, determine b em função de a. Determine o conjunto solução do sistema para $a=\frac{1}{2}$.

Resolução

Para que o sistema homogêneo possa admitir solução não trivial, temos, por Cramer, $\Delta=0$.

$$\Delta=\begin{vmatrix} -a & b & a \\ b^2 & a^3 & 4a^2 \\ 4a^2 & a^3 & b^2 \end{vmatrix}=-\cancel{a^4b^2}+\cancel{a^4b^2}+16a^4b-4a^6+4a^6-b^5=0$$

Então, temos $16a^4b-b^5=0 \Leftrightarrow b(16a^4-b^4)=0 \Leftrightarrow b=0$ ou $16a^4=b^4$.

Como $b>0$, temos $\boxed{b=2a}$

Para $a=\frac{1}{2}$, $b=1$. Assim, o sistema se reduz a:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=0 \\ x+\frac{1}{8}y+z=0 \\ x+\frac{1}{8}y+z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -\frac{1}{2}x+y+\frac{1}{2}z=0 \\ x+\frac{1}{8}y+z=0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -x+2y+z=0 \\ x+\frac{1}{8}y+z=0 \end{cases}$$

Somando-se as duas equações, obtemos $\frac{17}{8}y+2z=0$, ou seja, $z=-\frac{17}{16}y$.

Substituindo na primeira equação, obtém-se $x=2y+z=2y-\frac{17}{16}y=\frac{15}{16}y$.

Portanto, o conjunto solução do sistema, para $a=\frac{1}{2}$, é:

$$S=\left\{\left(\frac{15}{16}y,\ y,\ -\frac{17}{16}y\right);y\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(15k,\ 16k,\ -17k);k\in\mathbb{R}\right\}$$

Questão 02

Considere as seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os números $\alpha\in\mathbb{R}$ tais que a matriz $M=\alpha^2A+\alpha B+C$ é invertível.

Resolução

Sabe-se que $\alpha^2 A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & -2\alpha^2 \\ -2\alpha^2 & \alpha^2 \end{bmatrix}$, $\alpha B = \begin{bmatrix} 0 & 6\alpha \\ 6\alpha & 0 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Então, $\alpha^2 A + \alpha B + C = \begin{bmatrix} \alpha^2+3 & -2\alpha^2+6\alpha+3 \\ -2\alpha^2+6\alpha+3 & \alpha^2+3 \end{bmatrix}$.

Para que a matriz seja invertível, o determinante precisa ser não nulo, ou seja, $\det\left(\alpha^2 A + \alpha B + C\right) \neq 0$. Equacionando, obtemos:

$$\left(\alpha^2+3\right)^2 - \left(-2\alpha^2+6\alpha+3\right)^2 \neq 0$$

Fatorando a partir da diferença entre quadrados, obtemos $\left(-\alpha^2+6\alpha+6\right)\cdot\left(3\alpha^2-6\alpha\right) \neq 0$. Nesse caso, os dois fatores em parêntesis precisam ser não nulos.

Se $-\alpha^2+6\alpha+6 \neq 0$, então $\alpha \neq 3 \pm \sqrt{15}$.

Se $3\alpha^2 - 6\alpha \neq 0$, então $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq 0$.

Assim, conclui-se que o conjunto solução do problema é $S = \mathbb{R} - \left\{3+\sqrt{15}, 3-\sqrt{15}, 2, 0\right\}$.

Questão 03

Determine o conjunto solução da inequação

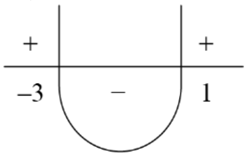
$\log_{2^{-x}}(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}) > \log_{2^{-x}}(\sqrt[3]{3})$.

Resolução

$\log_{2^{-x}}(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}) > \log_{2^{-x}}(\sqrt[3]{3})$.

Comecemos com a condição de existência.

- $2^{-x} > 0$ e $2^{-x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$
- $-\sqrt[3]{x^2+2x-3} > 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3 < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$



Logo, a condição de existência é $x \in \overbrace{(-3,0)\cup(0,1)}^{C.E.}$.

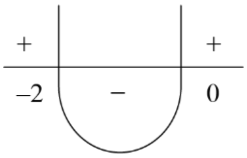
Para resolver a inequação, analisemos dois casos.

$\boxed{(i)\ 2^{-x} > 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0}$

Nesse caso, a função logarítmica é crescente.

$\log_{2^{-x}}(-\sqrt[3]{x^2+2x-3}) > \log_{2^{-x}}(\sqrt[3]{3}) \Leftrightarrow$

$-\sqrt[3]{x^2+2x-3} > \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow -(x^2+2x-3) > 3 \Leftrightarrow x \in (-2,0)$.



$S_{(i)} = \mathbb{R}_-^* \cap (-2,0) \cap C.E. = (-2,0)$

$\boxed{(ii)\ 2^{-x} \in (0,1) \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0}$

Nesse caso, a função logarítmica é decrescente. Assim:

$-\sqrt[3]{x^2+2x-3} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow -(x^2+2x-3) < 3 \Leftrightarrow -x^2-2x < 0 \Leftrightarrow$

$x^2+2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ ou $x < -2$.

$S_{(ii)} = \mathbb{R}_+^* \cap \{(0,+\infty)\cup(-\infty,-2)\} \cap C.E. = (0,1)$

Conclui-se, portanto, que $\boxed{S = S_{(i)} \cup S_{(ii)} = (-2,0)\cup(0,1)}$

Questão 04

Considere o polinômio $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Determine o quociente e o resto da divisão do polinômio $q(x) = x^{10} - 1$ por $p(x)$ e encontre todas as raízes complexas de $p(x)$.

Resolução

Sabe-se que, para n natural ímpar, é verdade que

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Então, $x^5 + 1 = (x+1)\underbrace{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}_{p(x)}$.

Como $\underbrace{x^{10} - 1}_{q(x)} = (x^5+1)(x^5-1) = (x+1)\underbrace{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}_{p(x)}(x^5 - 1)$, conclui-se que $q(x)$ é divisível por $p(x)$ e, portanto, o quociente da divisão é $(x+1)(x^5-1) = x^6 + x^5 - x - 1$ e o resto é 0.

As raízes complexas de $p(x)$ são as raízes de $x^5 = -1$, à exceção de $x = -1$. Como $-1 = \operatorname{cis} 180°$, as raízes de $p(x)$ são $\operatorname{cis} 36°$, $\operatorname{cis} 108°$, $\operatorname{cis} 252°$ e $\operatorname{cis} 324°$, em que $\operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$ e i é a unidade imaginária.

Questão 05

Sejam $A = \cos(\alpha) + \cos(\beta)$ e $B = sen(\alpha) - sen(\beta)$ com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calcule $sen(\alpha - \beta)$ em função de *A* e *B*, sabendo que *A* e *B* não são ambos nulos.

Resolução

Usando as fórmulas de transformação em produto, temos:

$$A = \cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (1)$$

$$B = sen\alpha - sen\beta = 2\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad (2)$$

Dividindo (2) por (1) e efetuando os cancelamentos:

$$\frac{B}{A} = \frac{sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (3)$$

Podemos expressar $sen(\alpha-\beta)$ em função de $tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$:

$$sen(\alpha-\beta) = 2\cdot sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 2sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\frac{\cos^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} =$$

$$= 2\cdot\frac{sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\cdot\left[\frac{1}{\sec^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right] \therefore sen(\alpha-\beta) = 2\cdot\frac{tg\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{[1 + tg^2\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} \quad (4)$$

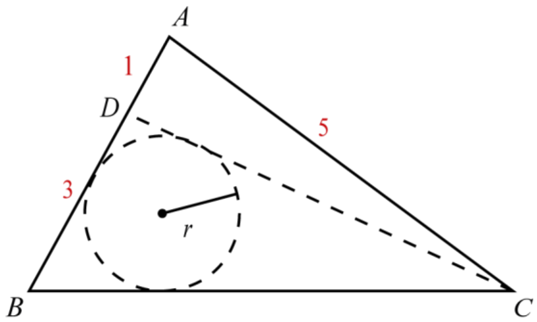
Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$sen(\alpha-\beta) = \frac{2\cdot\left(\frac{B}{A}\right)}{\left[1 + \frac{B^2}{A^2}\right]} = \frac{2B\cdot A^2}{A(A^2+B^2)} = \frac{2AB}{A^2+B^2}$$

Questão 06

Considere um triângulo ABC tal que $m(\overline{AB}) = 4$, $m(\overline{AC}) = 5$ e $B\hat{A}C = 60^{\circ}$. Seja D um ponto no lado $\overline{AB}$ tal que $m(\overline{AB}) = 1$. Encontre o raio do círculo inscrito no triângulo BCD.

Primeira resolução:



A partir da Lei dos cossenos:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\left(B\hat{A}C\right)$$

$$\overline{BC}^2 = 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5\cdot\cos\left(60^{\circ}\right)$$

$$\overline{BC}^2 = 16 + 25 - 20 = 21$$

$$\overline{BC} = \sqrt{21}$$

Novamente pela Lei dos cossenos, é possível determinar o segmento $\overline{CD}$.

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\cos\left(B\hat{A}C\right)$$

$$\overline{CD}^2 = 1 + 25 - 2\cdot 1\cdot 5\cdot\cos\left(60^{\circ}\right)$$

$$\overline{CD}^2 = 26 - 5 = 21 \quad \Rightarrow \quad \overline{CD} = \sqrt{21} \Rightarrow BCD \text{ é isósceles}$$

Dessa forma, a altura h do triângulo BCD, relativa à base $\overline{BD}$, passa pelo centro da circunferência e divide esse segmento em duas partes iguais. Logo, a área desse triângulo será dada por:

$$A = \frac{\overline{BD}\cdot h}{2} = \frac{\overline{BD}\cdot\left(\overline{AC}\cdot sen\,60^{\circ}\right)}{2} = \frac{3\cdot 5\cdot\left(\sqrt{3}/2\right)}{2} = 15\frac{\sqrt{3}}{4}$$

O raio da circunferência inscrita pode ser determinado por meio da área do triângulo BCD:

$$A_{BCD} = p\cdot r$$

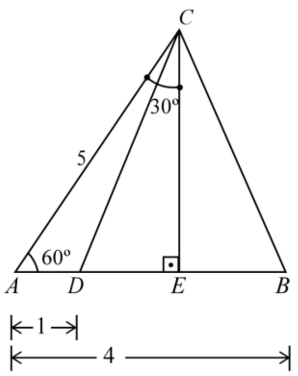
$$15\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{21} + \sqrt{21} + 3\right)\cdot r$$

$$r = \frac{15\sqrt{3}}{2\left(2\sqrt{21} + 3\right)} = \frac{6\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{10}$$

Segunda resolução:

Seja $\overline{CE}$ uma altura no ΔABC. Dado que $B\hat{A}C = 60^{\circ}$, segue $A\hat{C}E = 30^{\circ} \therefore \overline{AE} = \frac{5}{2}$ (cateto aposto ao ângulo de 30º mede metade da hipotenusa). (1)

Sendo $\overline{AE} = \frac{5}{2}$ e $\overline{AD} = 1$, vem $\overline{DE} = \overline{EB} = \frac{3}{2} \therefore$ a altura $\overline{CE}$ é também mediana no ΔCDB, o que garante que tal triângulo é isósceles de base $\overline{DB}$. (2)



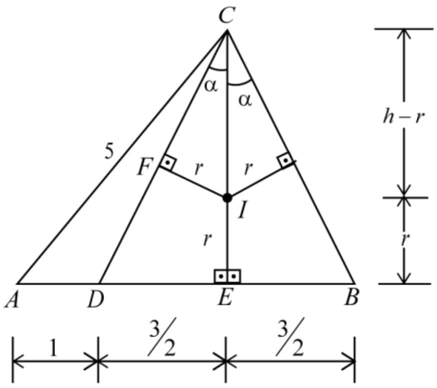
ΔEAC (Pitágoras):

$$h^2 = 5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} \quad (3)$$

ΔEDC (Pitagoras):

$$\left(\overline{CD}\right)^2 = h^2 + \left(\overline{DE}\right)^2 = \frac{75}{4} + \frac{9}{4} = \frac{84}{4} \quad (4)$$

$$\therefore \overline{CD} = \sqrt{21}$$



Seja I o incentro do ΔBCD e tracemos $\overline{IF} = r$, com $F \in \overline{CD}$.

$$\Delta FIC \sim \Delta EDC \therefore \frac{\overline{FI}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{DC}} \therefore \frac{r}{(3/2)} = \frac{h-r}{\sqrt{21}} = \underbrace{\frac{h}{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{21}\right)}}_{\text{Propriedade das proporções}} \therefore \frac{2}{3}r = \frac{5\sqrt{3}}{\left(3+2\sqrt{21}\right)} \therefore \boxed{r = \frac{6\sqrt{7}-3\sqrt{3}}{10}}$$

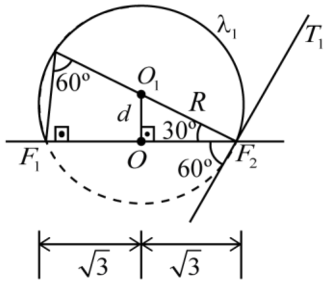
Questão 07

Determine os pontos P pertencentes à elipse E definida pela equação $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, tais que os segmentos de reta que ligam P aos focos de E formam um ângulo de 60º

Resolução:

$$\text{Elipse: } \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1 \therefore \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} : \begin{cases} \text{centro } 0(0,0) \\ F_1\left(-\sqrt{3},0\right) \\ F_2\left(\sqrt{3},0\right) \end{cases}$$

O lugar geométrico (LG) dos pontos que enxergam o segmento $\overline{F_1F_2}$ sob ângulo de 60º é o <u>par de arcos capazes</u> de 60º de tal segmento. Assim, os pontos <u>P</u> procurados são as interseções da elipse com tais arcos capazes.



Sendo $OF_2 = \sqrt{3}$, obtemos

$O\,O_1 = d = 1$

$O_1F_2 = R = 2$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_1 : O_1(0,1);\ R = 2 \\ x^2 + (y-1)^2 = 4, \text{ com } y > O \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda_2 : O_2(0,-1);\ R = 2 \\ x^2 + (y+1)^2 = 4, \text{ com } y < O \end{array}\right.$$

$\lambda_1 \cap$ elipse: $(y-1)^2 = 4y^2$

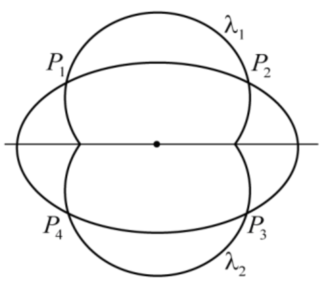
$\therefore \boxed{3y^2 + 2y - 1 = 0}$, com $y > O$

$$y = \frac{1}{3} \therefore \begin{cases} x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ ou} \\ x = \frac{-4\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$\lambda_2 \cap$ elipse: $(y+1)^2 = 4y^2$

$\boxed{3y^2 - 2y - 1 = 0}$, com $y < O$

$$y = -\frac{1}{3} \therefore x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

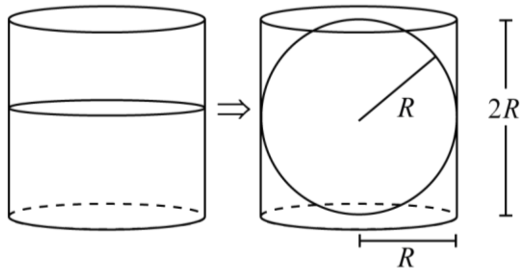


Solução: $P_1\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$; $P_2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$; $P_3\left(\frac{4\sqrt{2}}{2}, \frac{-1}{3}\right)$, $P_4\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3}, \frac{-1}{3}\right)$.

Questão 08

Um cilindro equilátero é apoiado sobre um de suas bases e parcialmente preenchido com água. Quando uma esfera é colocada em seu interior, de modo a tocar o fundo, o nível de água atinge a altura do cilindro. Se o raio da esfera é igual ao raio da base do cilindro e o volume de água é $2000\frac{\pi}{3}cm^3$, determine a área da superfície lateral do cilindro e o volume da esfera.

Resolução



$V_{\text{esfera}} + V_{\text{água}} = V_{\text{cilindro}}$

$\frac{4}{3}\cancel{\pi}R^3 + 2000\frac{\cancel{\pi}}{3} = \cancel{\pi}R^2 \cdot (2R)$

$2R^3 - \frac{4}{3}R^3 = \frac{2000}{3}$

$6R^3 - 4R^3 = 2000$

$2R^3 = 2000 \;\Rightarrow\; R = 10 \text{ cm}$

Área da superfície:

$S = 2\pi R \cdot (2R) = 4\pi R^2 = 400\pi \text{cm}^2$

Volume da esfera:

$V = \frac{4}{3}\pi\, R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot (10)^3 = \frac{4000}{3}\pi \text{ cm}^3$

Questão 09

Um triângulo tem perímetro 20 e seus ângulos internos α, β e γ satisfazem a igualdade $\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) + \text{sen}(\gamma) = 2$. Sabendo que um dos lados desse triângulo mede 8, determine a medida dos outros dois lados.

Resolução

Sejam a, b e c as medidas dos lados opostos aos ângulos α, β e γ, respectivamente. Pela lei dos senos, sabe-se que $a + b + c = 2R\underbrace{(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta + \text{sen}\,\gamma)}_{2} = 4R = 20$. Então, o circunraio do triângulo tem medida $R = 5$.

Supondo, sem perda de generalidade, que $a = 8$, então $c = 12 - b$. Supõe-se, também, que $b \geq c$.

Como $a = 2R\,\text{sen}\,\alpha \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{4}{5}$. Se α for agudo, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$. Se α for obtuso, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

Pela lei dos cossenos, temos que, se α for agudo:

$$8^2 = b^2 + (12-b)^2 - 2b(12-b)\frac{3}{5} \Rightarrow 16b^2 - 192b + 400 = 0$$

Ou seja, $b^2 - 12b + 25 = 0$ e, portanto, $b = 6 - \sqrt{11}$ ou $b = 6 + \sqrt{11}$. Como $b \geq c$, então $b = 6 + \sqrt{11}$ e $c = 6 - \sqrt{11}$.
Por sua vez, se α for obtuso, temos que

$$8^2 = b^2 + (12-b)^2 - 2b(12-b)\left(-\frac{3}{5}\right) \Rightarrow 4b^2 - 48b + 400 = 0$$

Nesse caso, $b^2 - 12b + 100 = 0$ e, portanto, $b = 6 - 8i$ ou $b = 6 + 8i$, que não podem representar medidas de lados de um triângulo.
Conclui-se, portanto, que os outros dois lados do triângulo medem $6 + \sqrt{11}$ e $6 - \sqrt{11}$.

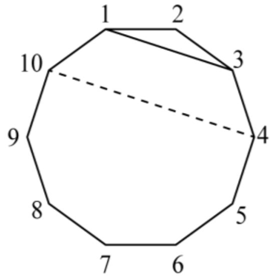
Questão 10

Em um decágono convexo, de quantas formas podemos escolher duas diagonais que não se interceptam?

Primeira Resolução

Um decágono regular possui um total de $\frac{10(10-3)}{2}=35$ diagonais.
Podemos dividir essas 35 diagonais em 4 grupos, a saber:

i) distância 2 entre os vértices: $1-3,\ 2-4, ...,\ 10-2.$ Para não haver interseção, a outra diagonal deve estar no heptágono "restante". Por exemplo, para a diagonal $1-3,$ a outra deve estar de 4 a 10. Com isso, temos $\frac{7(7-3)}{2}=14$ diagonais. Além disso, temos mais um lado (4 – 10 no exemplo da figura).



$\boxed{\text{caso}(i)=10\times 15=150}$

ii) distância 3 entre os vértices: $1-4,\ 2-5, ...,\ 10-3.$ Analogamente, a outra diagonal deve estar no hexágono "restante". Por exemplo, para $1-4,$ a outra deve estar de 5 a 10. Ou seja, $\frac{6(6-3)}{2}=9$ diagonais, além de mais um lado (10 – 5 no exemplo).

$\boxed{\text{caso } (ii)=10\times 10=100}$

iii) distância 4 entre os vértices: $1-5,\ 2-6, ...,\ 10-4$. Temos as diagonais do pentágono "restante", mais um lado e mais uma diagonal na outra metade (ex.: 1 – 5, temos também 2 – 4). Logo,
$1+\frac{5(5-3)}{2}=5$ +1 = 7
$\boxed{\text{caso } (iii)=10\times 7=70}$

iv) distância 5 entre os vértices: $1-6,\ 2-7,\ 3-8,\ 4-9,\ 5-10.$ Nesse caso, as duas metades contribuem igualmente com um lado e mais $\frac{4(4-3)}{2}=2$ diagonais.
$\boxed{\text{caso (iv)}=5\times 3\times 2=30}$

Como não importa a ordem no par de diagonais, temos que o total é
$\frac{150+100+70+30}{2}=\frac{350}{2}=175.$

Segunda Resolução

Um decágono regular possui um total de $\frac{10(10-3)}{2}=35$ diagonais. O número de pares de diagonais é $\binom{35}{2}=35\times 17=595.$
Para os diagonais se interceptarem, temos uma bijeção entre o nº de pares de diagonais que se interceptam e o nº de quadriláteros, pois cada par com interseção determina um quadrilátero (e apenas um). Logo, $\binom{10}{4}=210$ pares não servem. Além disso, temos as 7 diagonais que partem de cada vértice e, portanto, há $\binom{7}{2}=21$ pares de diagonais se interceptando, ou seja, mais $21\times 10=210$ casos não favoráveis.
Portanto, o nº de casos que servem é $595-210-210=175.$

QUÍMICA

Questão 01

Considere dois líquidos voláteis, *A* e *B*, que são completamente miscíveis entre si e que formam uma solução ideal em toda a amplitude de concentrações. Esses líquidos são adicionados a um tanque fechado, inicialmente sob vácuo, e mantido em temperatura constante (*T*), na proporção molar 1:1. Considere que a mistura causa um abaixamento na pressão de vapor do líquido *A* igual a 40 Torr e que a pressão de vapor do líquido *B* puro é igual a 20 Torr.

Determine os valores numéricos:

a) da pressão de vapor do líquido A puro na temperatura T;
b) da pressão de vapor da solução, depois de atingido o equilíbrio do sistema;
c) da composição molar da fase vapor em equilíbrio com a fase líquida presente no tanque.

Resolução:

Considerando a proporção dada no enunciado, 1:1, pode-se concluir que $X_A = X_B = 0,5$, já que $X_A + X_B = 1$.

Verifica-se também, a partir do enunciado, que a pressão de vapor de *A* na mistura reduz em 40 torr. Assim,

$P_A = P_A^0 - 40$

Em que:

P_A : Pressão de vapor de *A* na mistura

P_A^0 : Pressão de vapor de *A* puro

a) Como $P_A = P_A^0 \cdot X_A$ e $P_A = P_A^o - 40$,

$$P_A^0 - 40 = P_A^0 \cdot X_A \quad \therefore \quad P_A^0 - 40 = 0,5 \cdot P_A^0$$
$$P_A = 80\ torr$$

b) Assumindo que a pressão total (P_T) é igual à soma das pressões parciais,

$$P_T = P_A + P_B = X_A \cdot P_A^0 + X_B \cdot P_B^0$$
$$P_T = 0,5 \cdot 80 + 0,5 \cdot 20$$
$$\therefore P_T = 50\ torr$$

c)

$$X_A = \frac{P_A}{P_T} = \frac{X_A \cdot P_A^0}{P_T} \quad \therefore \quad X_A = \frac{0,5 \cdot 80}{50} \quad \therefore \quad X_A = 0,8$$
$$X_A + X_B = 1 \quad \therefore \quad X_B = 0,2$$

Questão 02

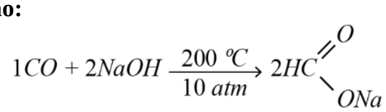
O ácido fórmico pode ser obtido por meio de uma reação de duas etapas. Na primeira etapa em temperatura de 200 ºC e pressão de 10 atm, monóxido de carbono e hidróxido de sódio reagem. Na segunda, o produto dessa primeira etapa reage com ácido sulfúrico, formando-se o ácido fórmico.

Sobre esse processo, apresente:

a) a fórmula estrutural do produto gerado na primeira etapa;
b) a equação química balanceada da primeira etapa;
c) a equação química balanceada da segunda etapa.

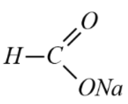
Resolução:

1ª etapa:



2ª etapa: $2HCOONa + H_2SO_4 \longrightarrow 2HCOOH + Na_2SO_4$

a)



b) $CO + 2NaOH \xrightarrow[10\ atm]{200\ °C} 2HCOONa$

c) $2HCOONa + H_2SO_4 \longrightarrow 2HCOOH + Na_2SO_4$

Questão 03

Um determinado sistema consiste em dois sólidos, A e B, cada qual com uma quantidade igual a 1 mol. Considere que os sólidos estão fisicamente separados, mas em contato térmico por meio de uma parede condutora de calor, a qual garante que estejam em equilíbrio térmico em todos os instantes. A temperatura inicial desse sistema é igual a –10 °C. O sistema é aquecido até atingir a temperatura de 20 °C. A temperatura de fusão de A é igual a 0 °C e a de B é igual a 10 °C. Considere ainda os dados a seguir.

I. Variação de entalpia de fusão, de A, $\Delta H_{fusão}(A) = 1\ kJmol^{-1}$, e de B, $\Delta H_{fusão}(B) = 2\ kJmol^{-1}$;

II. Capacidade calorífica molar sob pressão constante, de A sólido, $C_{p\,sólido}(A) = 30\ Jmol^{-1}K^{-1}$, e de B sólido, $C_{p\,sólido}(B) = 100\ Jmol^{-1}K^{-1}$.

III. Capacidade calorífica molar sob pressão constante, de A líquido, $C_{p\,líquido}(A) = 50\ Jmol^{-1}K^{-1}$, e de B líquido, $C_{p\,líquido}(B) = 100\ Jmol^{-1}K^{-1}$.

Desenhe um gráfico da temperatura do sistema, em °C, em função da quantidade de calor fornecida, em kJ, indicando o fenômeno físico e o valor numérico da quantidade de calor fornecida em cada etapa do processo de aquecimento, até a temperatura final atingida.

Resolução

Vamos dividir o fenômeno em algumas etapas.

Etapa 1: Aquecimento até o início da fusão de A.

Temperatura variando de –10 °C até 0 °C para A e B sem alteração de estado físico (sólidos).

$$\Delta H = (n(A) \cdot C_{P,sólido}(A) + n(B) \cdot C_{P,sólido}(B)) \cdot \Delta T$$

$$\Delta H = (1 \cdot 30 + 1 \cdot 20) \cdot 10 = 500\ J$$

Etapa 2: Mudança de fase de A indo de sólido para líquido sem alteração de temperatura.

$$\Delta H = n(A) \cdot \Delta H_{fusão}(A) = 1kJ = 1\ 000\ J$$

Etapa 3: Aquecimento até o início da fusão de B.

Temperatura variando de 0 °C até 10 °C para A e B sem alteração de estado físico (A líquido e B sólido).

$$\Delta H = (n(A) \cdot C_{P,líquido}(A) + n(B) \cdot C_{P,sólido}(B)) \cdot \Delta T$$

$$\Delta H = (1 \cdot 50 + 1 \cdot 20) \cdot 10 = 700\ J$$

Etapa 4: Mudança de fase de B indo de sólido para líquido sem alteração de temperatura.

$$\Delta H = n(B) \cdot \Delta H_{fusão}(B) = 2kJ = 2\ 000\ J$$

Etapa 5: Aquecimento até a temperatura de 20 °C.

Temperatura variando de 10 °C até 20 °C para A e B sem alteração de estado físico (líquidos).

$$\Delta H = (n(A) \cdot C_{P,líquido}(A) + n(B) \cdot C_{P,líquido}(B)) \cdot \Delta T$$

$$\Delta H = (1 \cdot 50 + 1 \cdot 100) \cdot 10 = 1\ 500\ J$$

Assim, os intervalos de energia fornecida e as temperaturas (ou intervalos de temperatura) para cada etapa são:

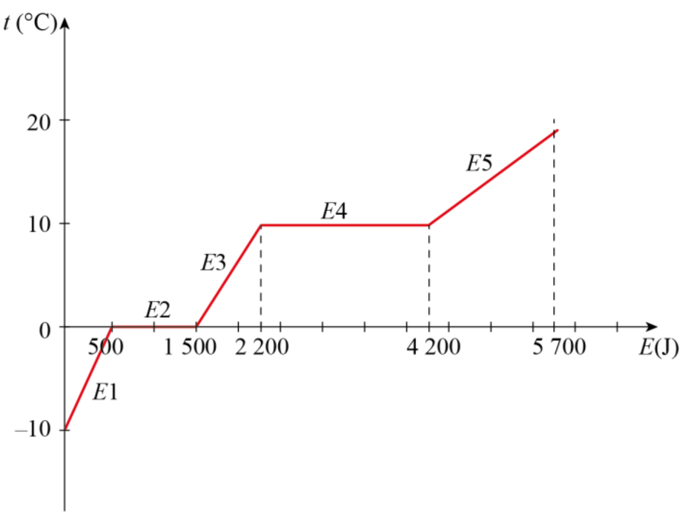
Etapa 1 ($E1$): Temperatura de –10 °C até 0 °C; Energia de 0 J até 500 J.

Etapa 2 ($E2$): Temperatura constante 0 °C; Energia de 500 J até 1 500 J.

Etapa 3 ($E3$): Temperatura de 0 °C até 10 °C; Energia de 1 500 J até 2 200 J.

Etapa 4 ($E4$): Temperatura constante 10 °C; Energia de 2 200 J até 4 200 J.

Etapa 5 ($E5$): Temperatura de 10 °C até 20 °C; Energia de 4 200 J até 5 700 J.



Questão 04

Duas soluções aquosas, contendo os cátions genéricos, A^+ e B^+, são preparadas com as concentrações iniciais descritas a seguir.

Solução 1: $\left[A^+\right] = 2\cdot10^{-2}\ molL^{-1}$ e $\left[B^+\right] = 1\cdot10^{-4}\ molL^{-1}$.

Solução 2: $\left[A^+\right] = 5\cdot10^{-2}\ molL^{-1}$ e $\left[B^+\right] = 1\cdot10^{-3}\ molL^{-1}$.

A cada uma dessas soluções são adicionadas quantidades progressivas de um ânion C^-, sem variação significativa do volume das soluções. Considere que os produtos de solubilidade dos sólidos AC(s) e BC(s) são iguais a $1\cdot10^{-7}$ e $1\cdot10^{-9}$, respectivamente.

Com base nessas informações, determine o que se pede para a solução 1 e para a solução 2.

a) Qual sólido será formado primeiro com a adição progressiva de C^- a cada uma das soluções? Justifique a sua resposta.

b) Conforme C^- é progressivamente adicionado, o segundo sólido começa a se formar. Nesse momento, qual é a concentração em solução do cátion desse primeiro sólido precipitado em cada solução?

Resolução

a) Precipitação seletiva na solução 1

$$AC_{(s)} \rightleftharpoons A^+_{(aq)} + C^-_{(aq)} \quad \therefore \quad \left[C^-\right]_{máxima} = \frac{kps}{[A]} = \frac{10^{-7}}{2\cdot10^{-2}} = 5\cdot10^{-6}\ mol/L$$

$$BC_{(s)} \rightleftharpoons B^+_{(aq)} + C^-_{(aq)} \quad \therefore \quad \left[C^-\right]_{máxima} = \frac{kps}{[B]} = \frac{10^{-9}}{10^{-4}} = 10^{-5}\ mol/L$$

Conclusão: AC precipita primeiro.

Precipitação seletiva na solução 2

De forma análoga, tem-se

$$\left[C^-\right]_{máxima} = \frac{10^{-7}}{5\cdot10^{-2}} = 2\cdot10^{-6}\ mol/L$$

$$\left[C^-\right]_{máxima} = \frac{10^{-9}}{10^{-3}} = 1\cdot10^{-6}\ mol/L$$

Conclusão: BC precipita primeiro.

b) Na solução 1

Quando o sal BC começar a precipitar, a $\left[C^-\right] = 10^{-5}\ mol/L$

$$AC_{(s)} \rightleftharpoons A^+_{(aq)} + C^-_{(aq)} \quad kps = \left[A^+\right]\cdot\left[C^-\right]$$

$$\left[A^+\right] = \frac{10^{-7}}{10^{-5}} = 10^{-2}\ mol/L$$

Na solução 2

Quando AC começa precipitar, a $\left[C^-\right] = 2\cdot10^{-6}\ mol/L$

$$AC_{(s)} \rightleftharpoons A^+_{(aq)} + C^-_{(aq)} \quad kps = \left[A^+\right]\cdot\left[C^-\right]$$

$$10^{-9} = \left[A^+\right]\left[2\cdot10^{-6}\right]$$

$$\left[A^+\right] = 5\cdot10^{-4}\ mol/L$$

Questão 05

Uma amostra de 5,480 g de uma mistura de óxido e carbonato de um mesmo metal (com um estado de oxidação igual a +2 nesses compostos) é completamente dissolvida em excesso de ácido clorídrico. Nesse processo, 0,418 L (condições normais) de gás são liberados.

Com base nessas informações, determine os valores numéricos

a) da composição da mistura, em frações mássicas, se a quantidade em mol de carbonato na mistura é duas vezes maior do que a quantidade do óxido;

b) da concentração molar do sal formado na solução resultante, se o volume final da dissolução é igual a 200 mL.

Resolução

Metal = *Me*

Dissoluções

a) $MeO_{(s)} + 2HCl_{(aq)} \rightarrow MeCl_{2(aq)} + H_2O_{(l)}$

$$MeCO_{3(s)} + 2HCl_{(aq)} \rightarrow MeCl_{2(aq)} + CO_{2(g)} + H_2O_{(l)}$$

Número de mols (n) do $MeCO_3 = nCO_2 = \dfrac{1\ mol \cdot 0,4481}{22,41} = 0,02\ mol$

Logo, o número de mols do $MeO = 0,01\,mol$

Cálculo da massa molar do metal

$$M\left(total\right) = M\left(MeO\right) + M\left(MeCO_3\right)$$

$$5,4\ g = 0,01\left(\overline{M} + 16\right) + 0,02\left(\overline{M} + 60\right)$$

$$\overline{M}_{Me} = 137,39\ g/mol$$

Cálculo das frações mássicas

$$X_{(MeO)} = \frac{0,01 \cdot 153,3}{5,48} = 0,28$$

$$X_{(MeCO3)} = \frac{0,02 \cdot 197,3}{5,48} = 0,72$$

b) Número de mols de $MeCl_2$ formado (n)

$$n\left(MeCl_2\right) = 0,01 + 0,02 = 0,03\ mol$$

Cálculo da concentração molar de $MeCl_2$

$$\left[MeCl_2\right] = \frac{n}{v} = \frac{0,03}{0,2} = 0,15\ \ mol/L$$

Questão 06

Suponha que, em medições experimentais realizadas no espaço sideral, foi descoberto um sistema formado de gás hidrogênio atômico excitado. A energia desse hidrogênio excitado é igual a –0,34 meV, fazendo com que o sistema emita um espectro de ondas eletromagnéticas de forma aparentemente contínua. Considere o modelo do átomo proposto por Bohr para descrever esse sistema. Considere, ainda, que a energia do átomo de hidrogênio no estado fundamental é –13,6 eV e que o raio do átomo de hidrogênio no estado fundamental é igual a 53 pm.

Acerca desse sistema, determine o que se pede a seguir.

a) Qual é o nível de energia no qual os átomos de hidrogênio excitados se encontram?

b) Qual é o raio da órbita do elétron ao redor do próton nesses átomos de hidrogênio?

c) Qual é a razão entre a velocidade do elétron do átomo de hidrogênio no estado fundamental e no estado excitado?

Resolução

a) A energia para o nível n do átomo de Bohr é dada por:

$$En = \frac{-13,6}{n^2} = -0,34\ meV$$

$$\frac{-13,6}{n^2} = -0,34 \cdot 10^{-3}$$

$$n^2 = \frac{13,6}{0,34} \cdot 10^3 = 40 \cdot 10^3 \Rightarrow n = 200$$

b) O raio do átomo de Bohr é dado por

$$r_n = r_1 \cdot n^2$$

$$r_{200} = 53 \cdot 10^{-12} \cdot \left(200\right)^2$$

$$r_{200} = 212 \cdot 10^{-8}\ m \quad \text{ou} \quad r_{200} = 2,12\ \mu m$$

c) Sabendo que o momento angular em um dado nível da órbita do raio de Bohr é dado por $L = mrv = \dfrac{nh}{2\pi}$, podemos relacionar o estado fundamental com o estado n = 200.

$$\begin{cases} L_1 = m \cdot r_1 \cdot v_1 = 2 \cdot \dfrac{h}{2\pi} \\ L_{200} = m \cdot r_{200} \cdot v_{200} = 200 \cdot \dfrac{h}{2\pi} \end{cases}$$

Efetuando a razão:

$$\frac{L_1}{L_{200}} = \frac{r_1 \cdot v_1}{r_{200} \cdot v_{200}} = \frac{1}{200} \Rightarrow \frac{v_1}{v_{200}}\left(\frac{\cancel{r_1}}{200^2 \cancel{r_1}}\right) = \frac{1}{200}$$

$$\frac{v_1}{v_{200}} = 200$$

Questão 07

A primeira determinação experimental do tamanho de um núcleo foi feita a partir dos resultados do espalhamento de Rutherford de partículas α. Os resultados evidenciaram uma dependência entre o raio nuclear (R) e o número de massa (A), através da relação:

$$R = R_0 A^{1/3}$$

em que R_0 é uma constante.

Com base nessas informações, calcule o valor numérico:

a) da densidade nuclear para o ${}_{29}Cu^{63}$, considerando que o raio para ${}_{30}Zn^{64}$ é 4,8 x 10^{-15} m;

b) da razão entre os raios nucleares do isótopo de magnésio ${}_{12}Mg^{24}$ e do isótopo de ósmio ${}_{76}Os^{192}$;

c) da densidade nuclear para o seabórgio ${}_{106}Sg^{271}$, comparando-a com o valor da densidade nuclear do ${}_{29}Cu^{63}$ obtida no item (a) acima

---

Resolução

a) Calculando o valor do raio para o Cu–63:

$$R = R_0 \cdot A^{1/3}$$

$$R(Cu-64) = 4{,}8 \cdot 10^{-15} = R_0 \cdot (64)^{1/3} \quad (eq.\ I)$$

$$R(Cu-63) = R_0 \cdot (63)^{1/3} \quad (eq.\ II)$$

$$(eq.\ II) \div (eq.\ I):$$

$$\frac{R(Cu-63)}{4{,}8 \cdot 10^{-15}} = \frac{R_0 \cdot (63)^{1/3}}{R_0 \cdot (64)^{1/3}} \therefore R(Cu-63) = 4{,}8 \cdot 10^{-15} \cdot \left(\frac{63}{64}\right)^{1/3}$$

A massa nuclear em gramas de um átomo de Cu–63 será dada por:

$$63g \ \_\_\_\_\_\_\_ \ 6 \cdot 10^{23} \ \acute{a}tomos$$

$$m\,g \ \_\_\_\_\_\_\_ \ 1 \acute{a}tomo \therefore m = \frac{63}{6 \cdot 10^{23}} g$$

A densidade nuclear será dada por:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}$$

$$d = \frac{63}{6 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{1}{4{,}8 \cdot 10^{-15} \cdot \left(\frac{63}{64}\right)^{1/3}}\right)^3$$

$$d = \frac{63}{6 \cdot 10^{23}} \cdot \frac{3}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{64}{63 \cdot (4{,}8 \cdot 10^{-15})^3}$$

$$d \cong \frac{8 \cdot 10^{22}}{110{,}6 \cdot \pi} \cong 2{,}4 \cdot 10^{20} \ g / m^3$$

b)

$$R = R_0 \cdot A^{1/3}$$

$$R(Mg-24) = R_0 \cdot (24)^{1/3} \quad (eq.\ III)$$

$$R(Os-192) = R_0 \cdot (192)^{1/3} \quad (eq.\ IV)$$

$$(eq.\ III) \div (eq.\ IV):$$

$$\frac{R(Mg-24)}{R(Os-192)} = \frac{R_0 \cdot (24)^{1/3}}{R_0 \cdot (192)^{1/3}} \therefore \frac{R(Mg-24)}{R(Os-192)} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \frac{1}{2}$$

c)

$$R = R_0 \cdot A^{1/3}$$
$$R(Sg-271) = R_0 \cdot (271)^{1/3} \quad (eq.\ III)$$
$$d(Sg-271) = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3} = \frac{271}{6\cdot 10^{23}}\cdot\frac{3}{4\cdot\pi\cdot R_0^3\cdot 271}$$
$$d(Sg-271) = \frac{3}{6\cdot 10^{23}\cdot 4\cdot\pi\cdot R_0^3\cdot 271}$$

Analogamente, para o Cu–63 e comparando os valores:

$$d = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3} = \frac{63}{6\cdot 10^{23}}\cdot\frac{3}{4\cdot\pi\cdot R_0^3\cdot 63} = \frac{3}{6\cdot 10^{23}\cdot 4\cdot\pi\cdot R_0^3\cdot 271}$$

Ou seja, os valores são iguais. Assim:
$d(Sg-271) = d(Cu-63) = 2{,}4\ .\ 10^{20}\ g/m^3$

Questão 08

O método de obtenção de magnésio metálico consiste nas etapas:

I) Uma amostra de carbonato de cálcio sólido é aquecida a altas temperaturas, formando um produto sólido *A* e um gasoso *B*.
II) Em seguida, o sólido *A* é tratado com água do mar, formando-se um hidróxido pouco solúvel que ioniza formando os produtos *C* e *D*.
III) Os ânions *D* reagem com cátions Mg^{2+} da água do mar. O resultado é um precipitado *E*.
IV) O composto *E* é separado por filtração e dissolvido por meio da adição de uma solução aquosa de ácido clorídrico.
V) A seguir, o solvente da solução é evaporado, obtendo-se o sal iônico *F* seco.
VI) Finalmente o sal *F* é submetido a uma eletrólise ígnea.

Determine o que se pede.

a) Apresente as equações químicas balanceadas que representam as reações, identificando os produtos *B*, *C*, *D*, *E* e *F* formados.
b) Em relação à eletrólise ígnea, mostre as semi-equações que representam as semi-reações que ocorreram no ânodo e no cátodo, assim como a reação global.

Resolução

a)

$$CaCO_{3(s)} \xrightarrow{\Delta} \underset{(A)}{CaO_{(s)}} + \underset{(B)}{CO_{2(g)}}$$
$$CaO_{(s)} + H_2O_{(\ell)} \longrightarrow Ca(OH)_{2(aq)}$$
$$Ca(OH)_{2(aq)} \rightleftharpoons \underset{(C)}{Ca^{2+}{}_{(aq)}} + \underset{(D)}{2OH^-_{(aq)}}$$
$$Mg^{2+}{}_{(aq)} + 2OH^-_{(aq)} \longrightarrow \underset{(E)}{Mg(OH)_{2(s)}}$$
$$Mg(OH)_{2(s)} + 2HCl_{(aq)} \longrightarrow MgCl_{2(aq)} + 2H_2O_{(l)}$$
$$MgCl_{2(aq)} \xrightarrow{evaporação} \underset{(F)}{MgCl_2(s)}$$

b) Eletrólise ígnea do $MgCl_2$

$$MgCl_{2(s)} \xrightarrow{fusão} Mg^{2+}{}_{(l)} + 2Cl^-_{(l)}$$
$$\text{Cátodo}(-)\ \therefore\quad Mg^{2+} + \cancel{2e^-} \longrightarrow Mg(s)$$
$$\text{Ânodo}(+)\ \therefore\quad 2Cl^- \longrightarrow \cancel{2e^-} + Cl_{2(g)}$$
$$Mg^{2+}{}_{(l)} + 2Cl^-_{(l)} \xrightarrow{i} Mg_{(s)} + Cl_{2(g)}$$

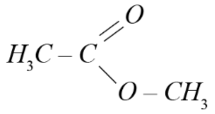
Questão 09

Apresente os compostos orgânicos formados a partir das reações do etanoato de metila com os seguintes reagentes:

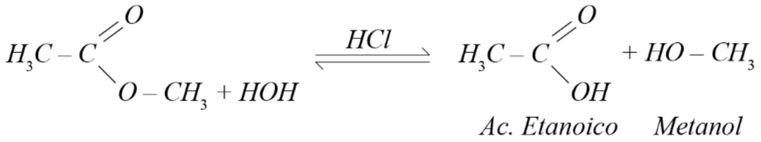
I) solução aquosa de ácido clorídrico.
II) solução aquosa de hidróxido de sódio.
III) amônia gasosa.
IV) $Li(AlH_4)$ dissolvido em dietil éter, seguido da adição de uma solução aquosa ácida.

Resolução

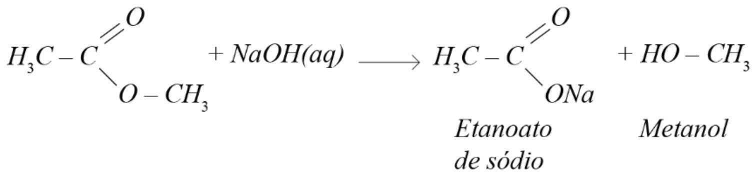
Etanoato de metila



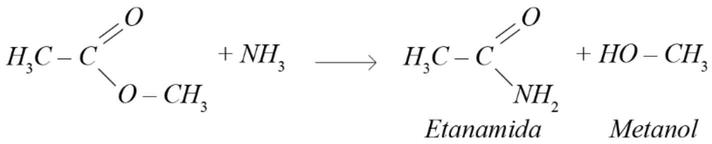
I) Hidrólise ácida:



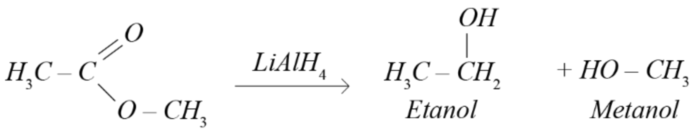
II) Hidrólise básica:



III) Amonólise:



IV) Redução com $LiAlH_4$



Questão 10

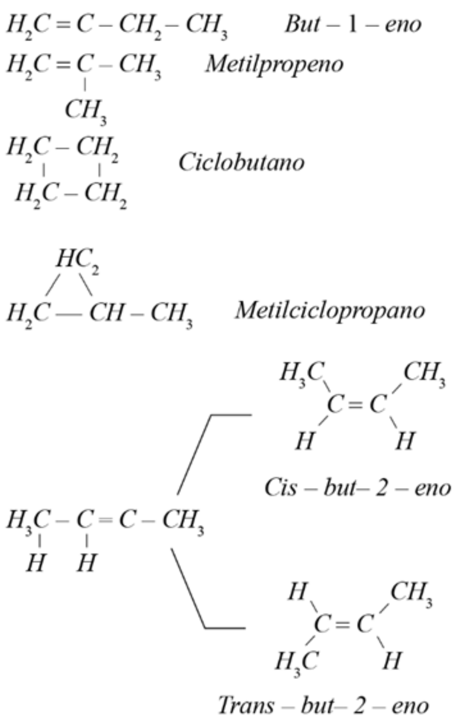
Considere o composto da fórmula C_4H_8.
Apresente:

a) Os seis isômeros estruturais e geométricos;

b) A fórmula estrutural dos produtos dibromados formados nas reações de cada um desses seis isômeros com Br_2. Considere que as condições das reações são adequadas para que ocorram de forma completa e produtos dibromados sejam erados.

Resolução

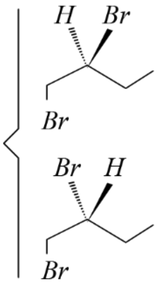
a)



b)

formará racemato

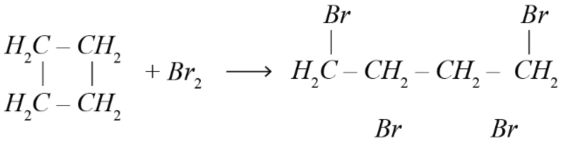
$$H_2C=CH-CH_2-CH_3 + Br_2 \longrightarrow H_2C(Br)-CH(Br)-CH_2-CH_3$$

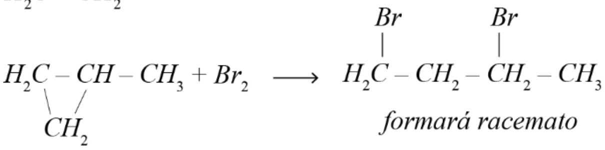


(S) 50%

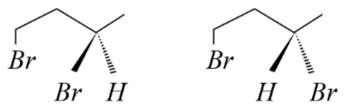
(R) 50%

$$H_2C=C(CH_3)-CH_3 + Br_2 \longrightarrow H_2C(Br)-C(Br)(CH_3)-CH_3$$

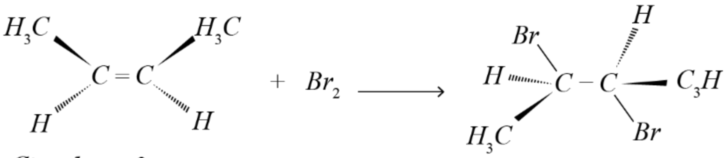




formará racemato

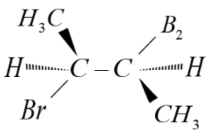


(R) *50%* *(S)* *50%*

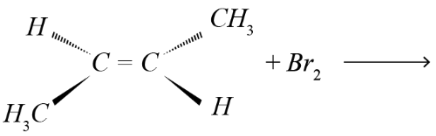


Cis – but – 2 – eno

(2R, 3R) – 2,3 – Dibromobutano (50%)

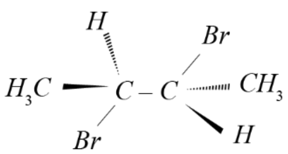


$(2S,3S)-2,3\cdot$Dibromobutano$\cdot(50\%)$



Trans-but-2-eno

formará o meso



(R, S)-2,3-dibromobutano

Matemática
Alexandre Moraes
Anderson Marques
Kellem Corrêa
Mateus Bezerra

Química
Anderson Marques
Emanuel Abreu
Heitor Cruz
Luís Cícero
Welson Felipe

Digitação e Diagramação
Alex de Faria
Igor Soares
Isabella Maciel
Jessica Loumine

Ilustração
Alex de Faria
Isabella Maciel
Jessica Loumine

Supervisão Editorial
Aline Alkmin
Anderson Marques

A Resolução Comentada das provas do ITA
*poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.
Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br