

“A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo”  
Galileu Galilei

## FÍSICA

**Quando necessário, considere as seguintes constantes:**

Aceleração local da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Velocidade da luz no vácuo  $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Velocidade do som  $v_{\text{som}} = 340 \text{ m/s}$ ; carga elementar  $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ;

Constante de Planck  $h$  vezes a velocidade da luz  $e$ ,  $he = 1240 \text{ eV.nm}$ ;

Massa do elétron  $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ .

**Aproximações numéricas:**  $(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha$ . para  $|\alpha| \ll 1$ ;  $\sqrt{3} \approx 1,7$ .

### ▶ Questão 01

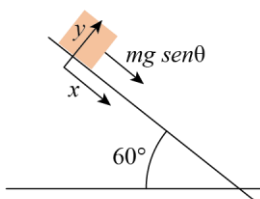
Um bloco cúbico de aresta  $l = 4,5 \text{ cm}$  desliza, sob o efeito da gravidade, sobre um plano inclinado de ângulo  $\alpha = 60^\circ$  relativamente à horizontal. O deslizamento acontece com as normais de duas de suas faces sempre paralelas à direção do movimento. Para estudar o movimento, um observador usa uma máquina fotográfica que captura em uma mesma imagem a posição do bloco em instantes diferentes. Para isso, a câmera é programada para abrir e fechar o diafragma periodicamente, a cada intervalo de tempo  $\Delta t = 0,2 \text{ s}$ .

O tempo de exposição  $\delta t$ , isto é, o tempo em que o diafragma permanece aberto, é tal que  $\delta t \ll \Delta t$ . O disparo da câmera é sincronizado com o movimento, de modo que a primeira exposição acontece no instante em que o bloco é solto. A foto registra quatro pontos, que correspondem à posição do objeto em diferentes instantes. O experimentador extrai da foto a distância entre pontos adjacentes,  $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ , com  $n = 1, 2$  e  $3$ .

Considere que a foto capta o perfil lateral do plano inclinado sem distorções ópticas ou efeitos de paralaxe. Em seguida, faça o que se pede:

- se  $\Delta x_3 = 0,75 \text{ m}$ , determine os valores de  $\Delta x_2$ ,  $\Delta x_1$  e o deslocamento total do bloco;
- estime o valor do coeficiente de atrito cinético entre a superfície do bloco e do plano inclinado;
- considere agora que  $\delta t$  ainda é pequeno, mas seu efeito já não é mais desprezível. Determine o valor de  $\delta t$  para que, na quarta captura, a imagem seja um retângulo de dimensões  $l$  por  $2l$ .

### Resolução



$$x = \frac{1}{2} at^2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} a(0,4)^2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} a(0,6)^2$$

$$\Delta x_3 = 0,75 = \frac{1}{2} a(0,6^2 - 0,4^2) \Rightarrow a = \frac{1,5}{0,36 - 0,16} \Rightarrow a = 7,5 \text{ m/s}^2$$

- a) Os deslocamentos serão dados por:

$$\Delta x_1 = x_1 = \frac{1}{2} a(0,2)^2 = \frac{1}{2} 7,5 \cdot 0,04 = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1 = \frac{1}{2} 7,5 \cdot (0,4^2 - 0,2^2) = 45 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \cdot 7,5 \cdot 0,6^2 = 1,35 \text{ m}$$

- b) Analisando a força resultante, temos:

$$mg \text{ sen} \theta - \mu mg \text{ cos} \theta = ma$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{2} - \mu \frac{-10}{2} = 7,5 \Rightarrow 10\sqrt{3} - 15 = 10\mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \sqrt{3} - 1,5 \approx 0,2$$

c)

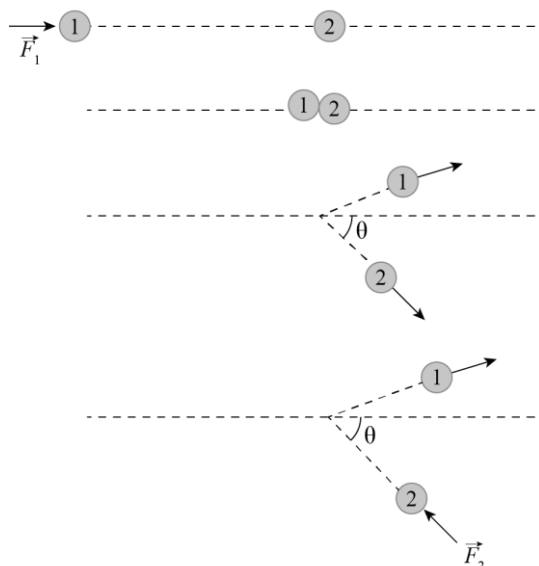
$$v = v_0 + at \Rightarrow v = 7,5 \cdot 0,6 = 4,5 \text{ m/s}$$

$$\Delta S = vt + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 2l - l = 4,5t + \frac{1}{2}7,5t^2$$

$$7,5t^2 + 9t - 0,09 = 0 \Rightarrow t = \frac{-9 + \sqrt{83,7}}{15} \approx 0,01 \text{ s}$$

### ▶ Questão 02

Considere uma partícula  $P_1$ , de massa  $m_1$ , inicialmente em repouso. Em seguida, essa partícula é acelerada por uma força constante  $\vec{F}_1$ , durante um intervalo de tempo  $\Delta t_1$ . Após este intervalo de tempo,  $P_1$  move-se livremente sem atrito por um plano, até colidir com uma partícula  $P_2$ , de massa  $m_2 = 2m_1$ . Após a colisão,  $P_2$  sai em uma trajetória que faz um ângulo de  $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$  com relação à trajetória inicial (pré-colisão) de  $P_1$ . Após um breve deslocamento, uma força constante  $\vec{F}_2$ , com direção contrária à da velocidade da partícula  $P_2$ , atua durante um intervalo de tempo  $\Delta t_2 = \sqrt{3}\Delta t_1$  até a parada total de  $P_2$ . Sabendo que a colisão entre  $P_1$  e  $P_2$  é inelástica e resulta em uma perda de 25% da energia mecânica do sistema, determine a magnitude da força  $F_1$  em termos da magnitude de  $F_2$ .



### Resolução

Teorema do Impulso:

$$\left. \begin{aligned} F_1 \Delta t_1 &= m_1 v_0 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{m_1 v_0}{F_1} \\ F_2 \Delta t_2 &= m_2 V_2 \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{m_2 V_2}{F_2} \end{aligned} \right\} \text{ como } \Delta t_2 = \Delta t_1 \sqrt{3} \text{ e } m_2 = 2m_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2m_1 V_2}{F_2} = \frac{\sqrt{3}m_1 v_0}{F_1} \Rightarrow F_1 = F_2 \cdot \frac{\sqrt{3}v_0}{2V_2} \quad (\text{Eq.1})$$

Devido à perda de energia mecânica, temos:

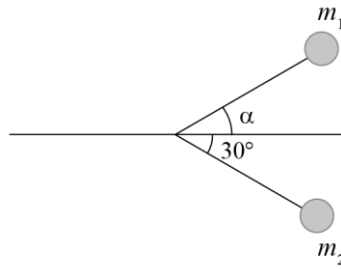
$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 \cdot 0,75 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 + \frac{1}{2}m_2 V_2^2$$

$$\frac{3v_0^2}{4} = V_1^2 + 2V_2^2 \quad (\text{Eq.2})$$

Conservação da quantidade de movimento:

$$\text{No eixo } x: m_1 v_0 = m_1 \cos \alpha V_1 + m_2 V_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v_0 = V_1 \cos \alpha + V_2 \sqrt{3} \quad (\text{Eq.3})$$



$$\text{No eixo } y: m_1 V_1 \sin \alpha = m_2 V_2 \sin 30^\circ \Rightarrow V_1 \sin \alpha = V_2$$

Substituindo na (Eq.3):

$$v_0 = V_2 \cotg \alpha + V_2 \sqrt{3} \Rightarrow \frac{v_0}{V_2} = \cotg \alpha + \sqrt{3}$$

Substituindo na (Eq.2):

$$\frac{3}{4} (\cotg \alpha + \sqrt{3})^2 = \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right)^2 + 2$$

$$\frac{3}{4} (\cotg^2 \alpha + 2\sqrt{3} \cotg \alpha + 3) = \cotg^2 \alpha + 1 + 2$$

$$\text{Seja } \cotg \alpha = x \Rightarrow 3x^2 + 6\sqrt{3}x + 9 = 4x + 12$$

$$x^2 - 6\sqrt{3}x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{3} \pm \sqrt{96}}{2} \Rightarrow$$

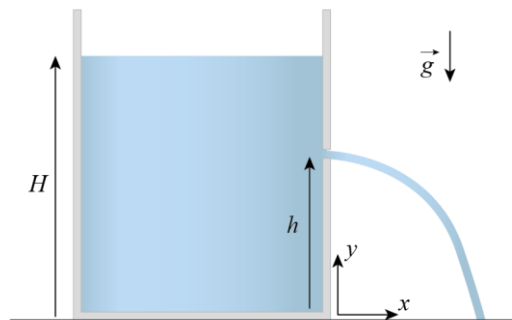
$$\Rightarrow \cotg \alpha = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$$

$$(\text{Eq.1}) \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cotg \alpha + \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$$

$$\frac{F_1}{F_2} = 3 \cdot 2 - \sqrt{18} = 6 - 3\sqrt{2} \Rightarrow F_1 = F_2 (6 - 3\sqrt{2})$$

### ▶ Questão 03

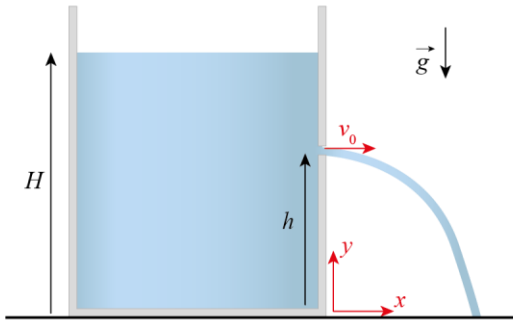
Considere um recipiente que contém uma coluna de água de altura  $H$ . Um pequeno furo é feito na parede a uma altura  $h$ , de tal forma que um filete de água é expelido horizontalmente, como na figura. Considere a água um fluido incompressível e de viscosidade desprezível. A aceleração local da gravidade vale  $g$ .



Determine:

- a trajetória  $y(x)$  do filete de água descrito;
- o lugar geométrico dos pontos  $P(x,y)$  que podem ser atingidos por um filete de água, considerando que a altura  $h$  possa ser escolhida entre 0 e  $H$ .

**Resolução**



a) As equações do movimento do filete de água, parametrizadas no tempo, são dadas por:

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{gt^2}{2} = h - \frac{gt^2}{2}$$

$$x = x_0 + v_{0x}t = 0 + v_0 \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0}$$

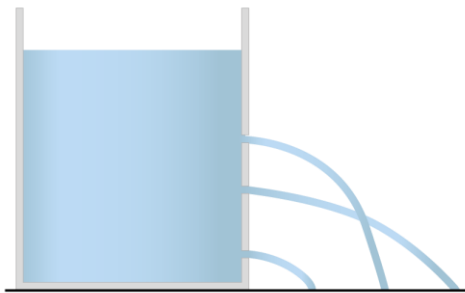
Desparametrizando as equações:

$$y = h - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_0} \right)^2 \Rightarrow y = h - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2}$$

A velocidade  $v_0$  é dada pela Equação de Torricelli,  $v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$ , logo:

$$y = h - \frac{9x^2}{2 \cdot 2g(H-h)} \Rightarrow y = h - \frac{x^2}{4(H-h)}$$

b) Para valores diferentes de  $h$ , teremos a seguinte situação física:



Nessa condição, podemos entender que a partir da equação da trajetória, devem existir valores  $P(x, y)$  que satisfazem a existência da altura  $h$  ser real. Logo:

$$y = h - \frac{x^2}{4(H-h)}$$

$$4y(H-h) = 4h(H-h) - x^2$$

$$4h^2 - 4(y+H)h + 4yH + x^2 = 0$$

Fazendo  $\Delta = 0$

$$\cancel{4}^2 (y+H)^2 - \cancel{4} \cdot \cancel{4} \cdot (4yH + x^2) = 0$$

$$(y+H)^2 - x^2 = 0$$

$$x = \pm(y+H) = \pm(H-y) \Rightarrow y = H-x$$

Dessa forma, a reta  $y = H-x$  impõe os limites da região na qual teremos os pontos  $P(x,y)$  atingidos pelo filete de água. Pode-se concluir, então, que o lugar geométrico pedido satisfaz a área delimitada por  $y \leq H-x$ .

**▶ Questão 04**

Considere uma nave espacial esférica, de raio  $R$ , com paredes de espessura  $h \ll R$ . No espaço profundo, existe uma radiação cósmica de fundo de temperatura  $T_0$  (aproximadamente 2,7 K). Seja a temperatura da parede interna da nave  $T_i$ , e a temperatura da parede externa  $T_e$ , com  $T_i > T_e > T_0$ . A condutividade térmica do material que compõe a parede da nave é  $k$ ; o seu calor específico é  $c$  e sua densidade de massa é  $\rho$ . A emissividade da nave é unitária e a constante de Stefan-Boltzmann é dada por  $\sigma$ . Quando ocorrem pequenas variações de temperatura na parede interna da nave, a condição de fluxo estacionário de calor é perturbada e o sistema tende a uma nova situação de fluxo estacionário de energia. A constante de tempo característica  $\tau$  desse processo pode ser estimada apenas em termos das características do material que compõem o revestimento da nave –  $\kappa$ ,  $c$  e  $\rho$  – bem como sua espessura  $h$ .

Faça o que se pede:

- a) obtenha a equação polinomial cuja raiz forneça  $T_e$  com os coeficientes em termos de  $\kappa$ ,  $\sigma$ ,  $h$ ,  $\rho$ ,  $T_i$ , e  $T_0$ , considerando a condição de fluxo de calor estacionário;
- b) estime, por análise dimensional, uma expressão para  $\tau$ .

### Resolução

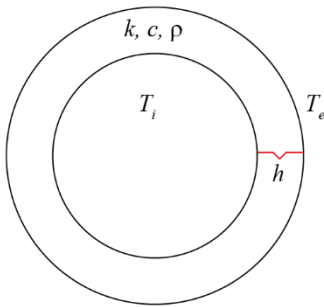
- a) Com fluxo de calor estacionário, o fluxo conduzido pela parede da nave é igual ao fluxo irradiado pela nave:

$$\phi = \frac{Q}{t} = Pot = \frac{k \cdot \text{Área} \cdot \Delta\theta}{\text{espessura}} = \frac{k \cdot 4\pi R^2 \cdot (T_i - T_e)}{h}$$

$$P_{or} = \text{Radiância} \cdot \text{Área} = e \cdot \sigma \cdot (T_e^4 - T_0^4) \cdot 4\pi R^2$$

$$k \cdot (T_i - T_e) = h \cdot \sigma \cdot (T_e^4 - T_0^4)$$

$$h \cdot \sigma \cdot T_e^4 + k \cdot T_e - k \cdot T_i - h \sigma T_0^4 = 0$$



- b)  $\tau = cte \cdot k^x \cdot c^y \cdot \rho^z \cdot h^w$

$$\frac{[k]}{[\text{Área}][\theta]} = \frac{[Pot][\text{espessura}]}{L^2 \cdot \theta} = \frac{ML^2T^{-3} \cdot L}{L^2 \cdot \theta} = MLT^{-3}\theta^{-1}$$

$$[c] = \frac{[Q]}{[m][\theta]} = \frac{ML^2T^{-2}}{M\theta} = L^2T^{-2}\theta^{-1}$$

$$[\rho] = \frac{[m]}{[V]} = ML^{-3}$$

$$[h] = [\text{espessura}] = L$$

$$[T] = [\text{tempo}] = T = (MLT^{-3}\theta^{-1})^x (L^2T^{-2}\theta^{-1})^y (ML^{-3})^z L^w$$

$$M \rightarrow x + z = 0;$$

$$L \rightarrow x + 2y - 3z + w = 0;$$

$$T \rightarrow -3x - 2y = 1;$$

$$\theta \rightarrow -x - y = 0;$$

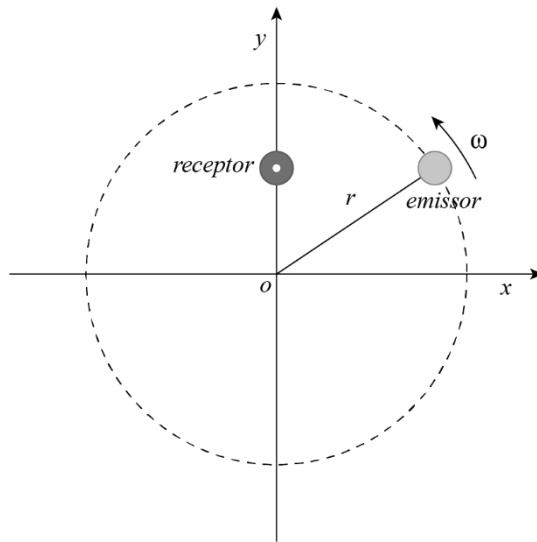
$$\Rightarrow y = -x; \quad -3x + 2x = 1 \Rightarrow x = -1 \text{ e } y = 1;$$

$$z = -x = 1 \text{ e } -1 + 2 - 3 + w = 0 \Rightarrow w = 2$$

$$\tau = \frac{cte \cdot c \cdot \rho \cdot h^2}{K}$$

### ▶ Questão 05

Um emissor de onda sonora esférica de frequência  $f_s$  executa um movimento circular uniforme com velocidade angular  $\omega$  e raio  $r$  em torno da origem  $O$  do plano  $xy$ , de acordo com a figura. Ao mesmo tempo, um receptor sonoro executa um movimento no eixo  $y$  do emissor. A velocidade do som é designada com  $v_{som}$ . Sabe-se que o gráfico da frequência da onda sonora detectada no receptor,  $f_{ob}$ , em função da coordenada  $x$  do emissor, aproxima-se de uma cônica para o caso em que  $\omega r \ll v_{som}$ .



Determine:

- a velocidade máxima alcançada pelo receptor;
- a cônica e sua equação.

### Resolução

- Como o receptor executa um movimento cuja posição é a projeção de um *MCU*, temos, portanto, um *MHS*:

$$V_{\text{máx}} = \omega \cdot r$$

- A partir do efeito doppler, podemos escrever:

$$f_{ob} = f_s \left( \frac{v_{som} \pm v_{ob}}{v_{som} \pm v_e} \right) = f_s \left( \frac{v_{som}}{v_{som} - v_e} \right)$$

$$v_e = \omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega t) \quad (\text{velocidade de aproximação do emissor em relação a } x)$$

$$f_{ob} = f_s \left( \frac{v_{som}}{v_{som} - \omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega t)} \right) = \left( \frac{1}{1 - \frac{\omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega t)}{v_{som}}} \right)$$

Como  $v_e \ll v_{som}$

$$f_{ob} = f_s \left( 1 + \frac{\omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega t)}{v_{som}} \right)$$

$$\frac{f_{ob}}{f_s} - 1 = \frac{\omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega t)}{v_{som}}$$

$$\left( \frac{f_{ob} - f_s}{f_s} \right)^2 = \left( \frac{\omega \cdot r \cdot \text{sen}(\omega t)}{v_{som}} \right)^2$$

Deixando em função da coordenada x, conforme o que seria apresentado pelo gráfico, temos:

$$\left( \frac{f_{ob} - f_s}{f_s} \right)^2 = \frac{\omega^2 r^2}{v_{som}^2} (1 - \cos^2(\omega t)) = \frac{\omega^2 r^2}{v_{som}^2} \left( 1 - \frac{x^2}{r^2} \right)$$

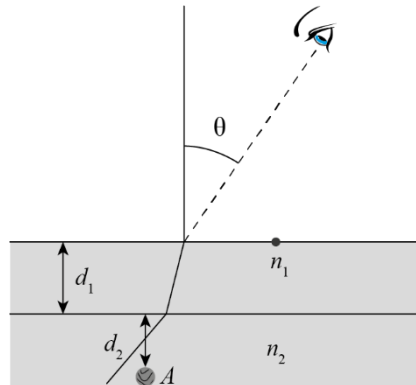
$$\left( \frac{f_{ob} - f_s}{f_s} \right)^2 + \frac{\omega^2 x^2}{v_{som}^2} = \frac{\omega^2 r^2}{v_{som}^2}$$

$$\left[ \frac{(f_{ob} - f_s)}{f_s} \cdot \frac{v_{som}}{\omega \cdot r} \right]^2 + \frac{x^2}{r^2} = 1$$

Logo, a cônica é uma elipse.

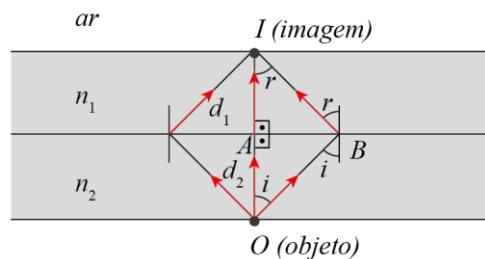
**Questão 06**

Considere um metamaterial, de índice de refração  $n_1 < 0$  e espessura  $d_1$ , depositado sobre um meio de índice de refração  $n_2 > 0$ . Nesse meio, um objeto  $A$  dista  $d_2$  da interface com o metamaterial, como na figura. Considere pequeno o ângulo  $\theta$  que se forma entre o raio óptico que vai do objeto ao observador e a normal da interface entre o metamaterial e o ar. Nesse caso, vale a aproximação  $\text{tg}\theta \approx \text{sen}\theta$ . Determine  $n_1$  em função de  $n_2$ ,  $d_1$  e  $d_2$  para que a imagem final do objeto se forme na interface entre o ar e o metamaterial.



**Resolução**

Nos metamateriais, os raios incidente e refratado ficam do mesmo lado normal.



$$\text{Snell-Descartes} \Rightarrow n_1 \cdot \text{sen } r = -n_2 \cdot \text{sen } i$$

$$n_1 = n_2 \cdot \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$$

$$\text{Triângulo } ABI \Rightarrow \text{tg } r = \frac{AB}{d_1} \Rightarrow \text{sen } r \approx \frac{AB}{d_1}$$

$$\text{Triângulo } ABO \Rightarrow \text{tg } i = \frac{AB}{d_2} \Rightarrow \text{sen } i \approx \frac{AB}{d_2}$$

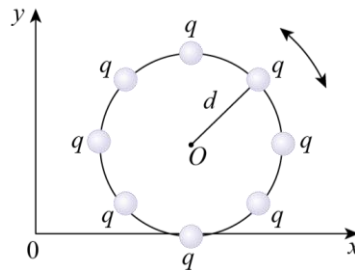
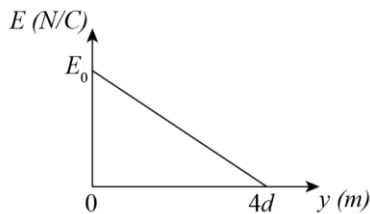
$$n_1 \approx -n_2 \cdot \frac{(AB/d_2)}{(AB/d_1)} \Rightarrow n_1 \approx -\frac{n_2 \cdot d_1}{d_2}$$

**Questão 07**

Uma roda de raio  $d$  pode girar livremente com relação ao seu centro  $O$ , a partir de  $t = 0$ , partindo do repouso. Na roda, são fixadas oito cargas elétricas de magnitude  $q$  ( $q > 0$ ), equiespaçadas, como na figura da direita. Na região, há um campo elétrico não uniforme no sentido positivo do eixo  $x$ . A magnitude desse campo é dada pelo gráfico à esquerda, sendo  $y = 0$  a extremidade inferior da roda, como na figura da direita.

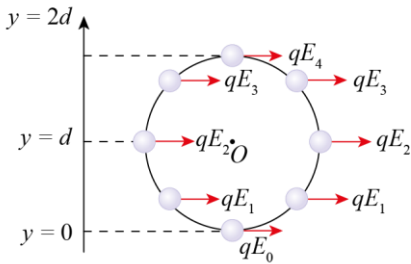
A respeito do movimento, determine:

- o sentido de rotação da roda imediatamente após o início do movimento, justificando sua resposta;
- o módulo do torque por causa da força elétrica, em  $t = 0$ , relativamente ao centro da roda.



### Resolução

a)



O módulo do campo elétrico diminui com o aumento de  $y$ :  $E_0 > E_1 > E_2 > E_3 > E_4$ .

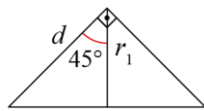
As forças abaixo de 0 são mais fortes que as forças acima de 0.

Assim, os torques no sentido anti-horário das forças de baixo prevalecem sobre os torques no sentido horário das forças de cima. Portanto, a roda gira no sentido anti-horário

b) Do gráfico  $E \times y \Rightarrow E = -\frac{E_0 \cdot y}{4d} + E_0$

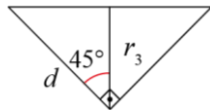
$$y_0 = 0 \Rightarrow E_0 = E_0 \Rightarrow r_0 = d \Rightarrow \tau_0 = r_0 q E_0 = d q E_0$$

$$y_1 = d - \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow E_1 = -\frac{E_0}{4d} \cdot d \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + E_0 = -\frac{E_0(2-\sqrt{2})}{8} + \frac{8E_0}{8} = \frac{(6+\sqrt{2})E_0}{8}$$



$$r_1 = \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tau_1 = r_1 q E_1 = \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot q \cdot \frac{(6+\sqrt{2})E_0}{8} = \frac{(6\sqrt{2}+2)}{16} d q E_0$$

$$y_3 = d + \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow E_3 = -\frac{E_0}{4d} \cdot d \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + E_0 = -\frac{E_0(2+\sqrt{2})}{8} + \frac{8E_0}{8} = \frac{(6-\sqrt{2})E_0}{8}$$



$$r_3 = \frac{d\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tau_3 = r_3 q E_3 = \frac{d\sqrt{2}}{2} \cdot q \cdot \frac{(6-\sqrt{2})E_0}{8} = \frac{(6\sqrt{2}-2)}{16} d q E_0$$

$$y_4 = 2d \Rightarrow E_4 = -\frac{E_0}{4d} \cdot 2d + E_0 = -\frac{E_0}{2} + E_0 = \frac{E_0}{2}$$

$$r_4 = d \Rightarrow \tau_4 = r_4 q E_4 = \frac{d q E_0}{2}$$

$$\tau = \tau_{O, \text{resultante}} = \tau_0 + 2\tau_1 - 2\tau_3 - \tau_4 \quad (\text{sentido anti-horário positivo})$$

$$\tau = d q E_0 \left[ 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = d q E_0$$

### Questão 08

Um laboratório de paredes adiabáticas possui  $N$  computadores de alta performance que precisam ser mantidos a uma temperatura  $T$ . Para isso, é instalado um ar-condicionado que atua como uma máquina térmica de máxima eficiência possível, operando entre a temperatura do laboratório e a temperatura do meio externo  $T_e$ . Cada computador possui  $n_c$  circuitos. A Figura 1 é o esquema de um circuito. Cada resistor de cada circuito é formado por um fio de cobre de diâmetro  $\epsilon$ , com  $n_v$  voltas por unidade de comprimento, enrolado em um cilindro de cerâmica de raio  $r$  e comprimento  $l$ , como na Figura 2.



Determine:

- a potência dissipada pelos computadores, considerando  $\rho_0$  a resistividade de cobre a uma temperatura padrão  $T_0$  e  $\alpha$  o seu coeficiente de temperatura;
- a energia consumida pelo ar-condicionado em 1 dia.

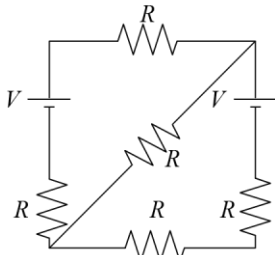


Figura 1

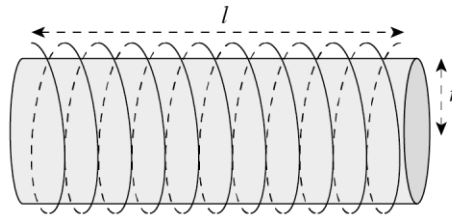
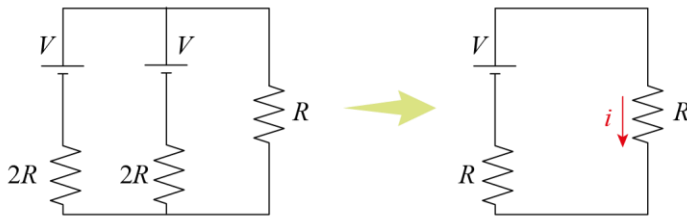


Figura 2

### Resolução

- O circuito fornecido pode ser entendido como uma associação de dois geradores em paralelo (cuja resistência interna é  $2R$ ) ligados a um resistor de resistência  $R$ .



$$i = V / 2R$$

A potência dissipada no circuito será:

$$Pot = 2R \cdot (i)^2 = 2R \cdot \left(\frac{V}{2R}\right)^2 = V^2 / 2R$$

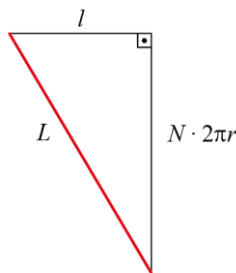
A potência dissipada nos computadores será:

$$Pot_T = N \cdot n_c \cdot \frac{V^2}{2R}$$

A resistência  $R$  é dada conforme os parâmetros fornecidos:

$$R = \frac{\rho \cdot L}{A} = \frac{\rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \cdot L}{\pi \cdot \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2}$$

Em que o comprimento  $L$  do fio será dado por:



$$L^2 = (N2\pi r)^2 + l^2$$

$$L^2 = (n_v \cdot l \cdot 2\pi r)^2 + l^2$$

$$L = l \sqrt{1 + 4\pi^2 n_v^2 r^2}$$

Logo:

$$R = \frac{4\rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)]}{\pi \epsilon^2} \cdot l \sqrt{1 + 4\pi^2 n_v^2 r^2}$$

Finalmente, a potência pode ser escrita por:

$$Pot_T = \frac{N \cdot n_c \cdot V^2}{2R} = \frac{N \cdot n_c \cdot V^2 \pi \epsilon^2}{8\rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)] l \sqrt{1 + 4\pi^2 n_v^2 r^2}}$$

- A máxima eficiência de uma máquina frigorífica segue as condições de funcionamento de um ciclo de Carnot. Dessa forma:

$$e = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{Q_a - Q_F} = \frac{T_F}{T_Q - T_F} = \frac{T}{T_e - T}$$

$$\text{Logo, } \frac{Q_f}{W} = \frac{E_T}{W} = \frac{T}{T_e - T}$$

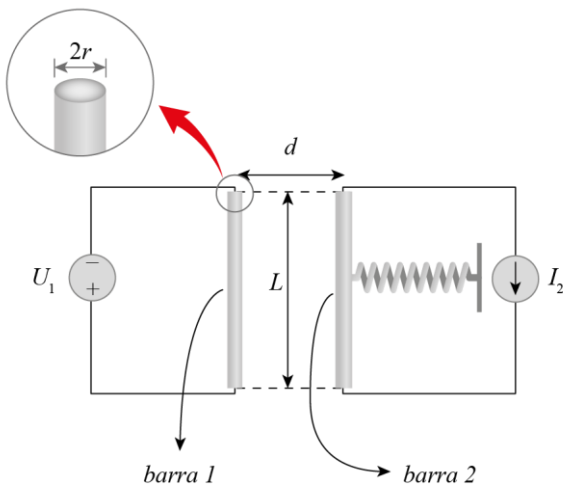
$$W = \frac{(T_e - T)}{T} \cdot E_T = \frac{(T_e - T)}{T} \cdot Pot_T \cdot (1 \text{ dia})$$

Substituindo a potência total, teremos:

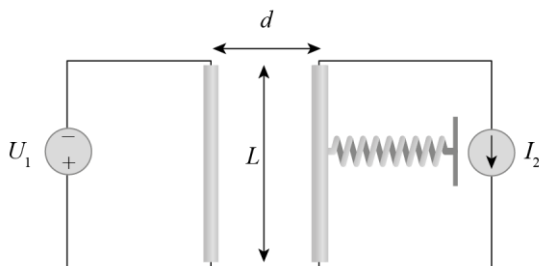
$$W = \frac{\pi \epsilon^2 n_c \cdot NV^2 (T_e - T)}{8 \rho_o \ell T [1 + \alpha (T - T_o)] \sqrt{1 + 4\pi^2 n_v^2 r^2}} \cdot (1 \text{ dia})$$

### ▶ Questão 09

Considere duas barras metálicas longas, 1 e 2, dispostas paralelamente uma à outra, em um plano horizontal sem atrito. Seja  $L$  o comprimento das barras;  $2r$ , o diâmetro da seção transversal circular;  $\rho$ , a densidade volumétrica de massa; e  $\sigma$ , a condutividade elétrica. A barra 1 está conectada a uma fonte de tensão contínua  $U_1$ . A barra 2 é presa em seu centro de massa por uma mola de constante elástica  $k$ . Inicialmente, a barra 2 está conectada a uma fonte de corrente  $I_2$  e encontra-se em equilíbrio estático a uma distância  $d$  da barra 1. No instante  $t_1$ , a fonte de corrente é desconectada da barra 2, a qual passa a mover-se livremente no plano. Calcule a velocidade máxima adquirida pela barra 2.



### Resolução



Na condição do equilíbrio inicial da barra 2, temos:

$$F_{mag} = F_e$$

$$B_1 I_2 L \sin \theta = k \cdot x$$

$$\left( \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi d} \right) \cdot I_2 \cdot L = k \cdot x$$

$$\text{Com } I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U_1}{\left( \frac{L}{\sigma A} \right)} = \frac{U_1 \cdot \sigma \cdot A}{L} = \frac{U_1 \cdot \sigma \cdot \pi r^2}{L}$$

$$\text{Logo, } \left( \frac{\mu_0 \cdot U_1 \sigma \pi r^2}{2\pi d \cdot L} \right) \cdot I_2 \cdot L = k x \Rightarrow x = \frac{\mu_0 U_1 \sigma r^2 I_2}{2 d k}$$

Ao se desligar a fonte de corrente, interrompe-se a interação eletromagnética e a energia armazenada na mola se converte em energia cinética para a barra.

$$E_{pe} = E_c$$

$$\frac{k x^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$k \cdot \left( \frac{\mu_0 U_1 \sigma \cancel{r} I_2}{2 d k} \right)^2 = (\rho \cdot \pi \cancel{r} L) \cdot v^2$$

$$v^2 = \frac{k}{\rho \pi L} \cdot \left( \frac{\mu_0 U_1 \sigma I_2}{2 d k} \right)^2$$

$$v^2 = \frac{\mu_0 U_1 \sigma I_2}{2 d} \sqrt{\frac{1}{\rho \pi L k}}$$

### ▶ Questão 10

Feixes de luz de comprimentos de onda 590 nm, 450 nm e 380 nm incidem sobre uma superfície metálica. Com um aparato experimental, são medidas as velocidades dos fotoelétrons ejetados.

Sabendo que a maior velocidade detectada foi de 640 km/s, faça o que se pede:

- determine a função trabalho do material;
- determine a frequência de corte;
- justifique se é possível que um elétron livre absorva um fóton, tal como ocorre no efeito fotoelétrico em um material. Um elétron livre é um elétron sem interações com outros corpos, além do referido fóton.

### Resolução

- a) Sabendo que a maior velocidade de ejeção foi de 640 km/s, o fóton mais energético será o de menor comprimento de onda na situação descrita.

$$E_c = hf - \phi$$

$$\phi = \frac{hc}{\lambda} - m_e \cdot \frac{v_e^2}{2} \cdot \left( \frac{1}{e} \right) \Rightarrow \phi = \frac{1240}{380} - 9,11 \cdot \frac{10^{-31}}{2} \cdot \frac{(640 \cdot 10^3)^2}{1,6 \cdot 10^{-19}} \Rightarrow \phi = 3,26 - 1,16 = 2,1 \text{ eV}$$

energia em eV

b)  $\phi = h \cdot f_o$

$$2,1 = \frac{hc}{\lambda_o} \Rightarrow 2,1 = \frac{1240}{\lambda_o}$$

$$\lambda_o = 590 \text{ nm}$$

Logo, a frequência será:  $c = \lambda_o \cdot f_o \Rightarrow f_o = \frac{3 \cdot 10^8}{590 \cdot 10^{-9}} = 5,08 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$

- c) O efeito fotoelétrico só é observado na interação do fóton com a matéria, e não com elétrons livres. Para se verificar isso, vamos supor ser possível que o elétron absorva toda a energia de um fóton. Dessa forma, teríamos:



Pela conservação do Momento Linear:

$$P_{0, \text{fóton}} + P_{0, \text{elétron}} = P_{\text{elétron}}$$

$$hf_o + m_o c^2 = m c^2 \gamma$$

Pela conservação da Energia:

$$E_{\text{fóton}} + E_{\text{repouso elétron}} = E_{\text{elétron}}$$

$$h \cdot f_o + m_o \cdot c^2 = m \cdot c^2 \cdot \gamma$$

Combinando as equações:

$$h \cdot f_o = c \cdot \gamma \cdot m_o \cdot v = m \cdot c^2 \cdot \gamma - m_o \cdot c^2$$

$$\text{Logo, } c = \eta(c-v) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(c-v)$$

$$\sqrt{c^2 - v^2} = c-v \Rightarrow c^2 - v^2 = (c-v)^2$$

$$c^2 - v^2 = c^2 - 2cv + v^2 \Rightarrow -2cv = -2cv$$

$$\Rightarrow v = 0 \text{ ou } v = c \quad (\text{o que é um absurdo})$$

Assim, não é possível observar o efeito fotoelétrico para um elétron livre, ou seja, a situação em que um elétron absorva toda a energia de um fóton não pode ocorrer.

**Professores**

Anderson Marques  
João Paulo Botelho  
Paulo Wang

**Digitação e Diagramação**

Alex de Faria  
Igor Soares  
Jessica Loumine

**Ilustração**

Isabella Maciel

**Supervisão Editorial**

Aline Alkmin  
Anderson Marques

**Copyright©Olimpo2022**

*A Resolução Comentada das provas do ITA  
poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

***As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos,  
competências e habilidades específicas.  
Esteja preparado.***

[www.grupoolimpo.com.br](http://www.grupoolimpo.com.br)

