2ª FASE – 1º DIA
MATEMÁTICA

Questão 01

Determine o(s) valor(es) real(ais) de x tal(is) que

$$x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

Resolução

Seja $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

Fazendo Laplace na primeira linha, temos:

$$D = 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}}_{A} + (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}}_{B}$$

$= 2\cdot A + B,$ em que, por Laplace:

$$A = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 2(3x-2)+(-2x+1) = 4x-3$$

$$B = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = 2-3x$$

Logo, $D = 2(4x-3)+2-3x = 5x-4$

Então, $x = D \Leftrightarrow x = 5x-4 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

Questão 02

Seja $S = (1+\text{tg}(\alpha)+\sec(\alpha))(1+\text{cotg}(\alpha)-\text{cossec}(\alpha))$.

Mostre que o valor de S é um número inteiro para todo valor do ângulo α diferente de $\frac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$ e calcule esse valor.

Resolução

O fato de α ser diferente de $\frac{k\pi}{2}$, com k inteiro, significa que tanto $\cos\alpha$ quanto $\operatorname{sen}\alpha$ são não nulos e, portanto, satisfazem todas as condições de existência das funções trigonométricas do problema.

Então,

$$S=\left(1+\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}\right).$$

Portanto,

$$S=\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha+1)(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha-1)}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}.$$

Isso resulta em $S=\frac{(\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha)^2-1^2}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=\frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$.

Como $\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, então $S=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}=2$, provando que S tem um valor inteiro e igual a 2.

Questão 03

Determine a soma de todos os valores reais de k para os quais o sistema

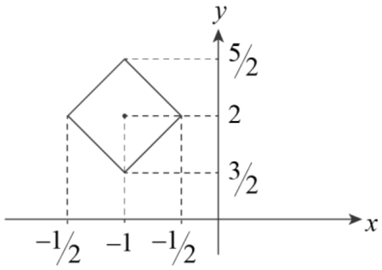
$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+1}+|y-2|=\frac{1}{2}\\ x^2+36y^2=2(kx+72y)-140=k^2\end{cases}$$

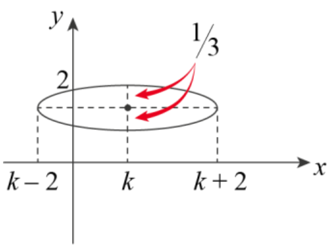
possui solução única, sabendo que $x,\ y\in\mathbb{R}$

Resolução

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2x+1}+|y-2|=1/2\\ x^2+36y^2=2(kx+72y)-140-k^2\end{cases}\equiv\underbrace{\begin{cases}|x+1|+|y-2|=1/2\\ (k-k)^2+36(y-2)^2=4\end{cases}}_{\frac{(x-x)^2}{2^x}+\frac{(y-2)^2}{\left(1/3\right)^2}=1}$$

A primeira equação representa um quadrado (quatro segmentos de reta), ao passo que a segunda representa uma elipse. Como queremos uma única solução, temos que ter as duas figuras tangentes.





A elipse tangencia o quadrado em dois casos:

→ pela direita

$$k-2=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\boxed{k=\frac{3}{2}}$$

→ pela esquerda

$$k-2=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow\boxed{k=-\frac{7}{2}}$$

Portanto, a soma dos possíveis valores k k é $\frac{3}{2}-\frac{7}{2}=-\frac{4}{2}=\boxed{-2}$

Questão 04

Sejam os números complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ tais que suas partes reais e imaginárias formam, respectivamente, uma progressão aritmética e uma progressão geométrica crescentes de números reais e de mesma razão. Sabe-se que $z_1 = 2+5i$ e $z_4 = m\left(i^{4m} + 5i^{4m+1}\right)$ onde $m \in \mathbb{Z}_+^*$ e $i^2 = -1$.

Considere $S_n = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} z_k$ e $A_n = \frac{2}{5}\sum_{k=1}^{n} k$.

Calcule o valor de $P = \frac{S_n - A_n}{i} + 1$ em função de n.

Resolução

Seja q a razão da PA e da PG. Como a PA é crescente, então $q > 0$. Como a PG é crescente e seu primeiro termo, que é 5, é positivo, então $q > 1$.

Então, $z_2 = (2+q) + 5qi$, $z_3 = (2+2q) + 5q^2 i$ e $z_4 = (2+3q) + 5q^3 i$.

Ao mesmo tempo, como m é um inteiro positivo, então $i^{4m} = 1$ e $i^{4m+1} = i$ e, portanto, $z_4 = m(1+5i) = m + 5mi$. A partir da identidade polinomial, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2+3q = m \\ 5q^3 = 5m \end{cases}$$

O que resulta em $5q^3 = 5(2+3q) \Rightarrow q^3 - 3q - 2 = 0$. Como -1 é raiz dessa equação polinomial, ela pode ser escrita como $(q+1)(q^2 - q - 2) = (q+1)^2(q-2) = 0$. Como -1 não é uma raiz possível, $q = 2$.

Calculemos, então, as somas pedidas.

Iniciando por S_n:

$$\operatorname{Re}(S_n) = \frac{\left[2 + (2+2\cdot 1) + (2+2\cdot 2) + \ldots + 2 + 2\cdot(n-1)\right]}{5} = \frac{\left[2+2+2\cdot(n-1)\right]\cdot n}{2\cdot 5} = \frac{n^2+n}{5}$$

$$\operatorname{Im}(S_n) = \frac{5 + 5\cdot 2 + 5\cdot 2^2 + \ldots + 5\cdot 2^{n-1}}{5} i = \left(1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}\right) i = \left(2^n - 1\right) i$$

Calculando A_n:

$$A_n = \frac{2}{5}(1+2+3+\ldots+n) = \frac{2}{5}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{5}$$

Então, $P = \dfrac{\frac{n^2+n}{5} + (2^n - 1)i - \frac{n^2+n}{5}}{i} + 1 = 2^n$.

Concluímos, portanto, que $P = 2^n$.

Questão 05

As raízes da equação $4x^3 - 40x^2 + 129x - 135 = 0$ são os comprimentos dos lados de um triângulo em metros.

Determine a área deste triângulo.

Resolução

Vamos encontrar as raízes de $4x^3 - 40x^2 + 129x - 135$.

Por inspeção, 3 é uma raiz. Então,

	4	-40	129	-135
3	4	-28	45	0

As outras raízes vêm de $4x^2 - 28x + 45 = 0$.

$\Delta = 28^2 - 4x4x45 = 64$

$$x = \frac{28 \pm 8}{8} \begin{array}{l} \nearrow 5/2 \\ \searrow 9/2 \end{array}$$

Portanto, os lados do triângulo medem, em metros, $3, \frac{9}{2}$ e $\frac{5}{2}$. Logo, o semiperímetro é $p = \frac{1}{2}.(3+\frac{9}{2}+\frac{5}{2}) = 5\,m$.

A área do triângulo é dada por

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{5(5-3)\left(5-\frac{5}{2}\right)\left(5-\frac{9}{2}\right)} =$$

$$\sqrt{5x2x\frac{5}{2}x\frac{1}{2}} = \boxed{\frac{5\sqrt{2}}{2}m^2}$$

Questão 06

Dado um dodecaedro regular, escolhem-se 3 vértices ao acaso.
Calcule a probabilidade dos 3 vértices escolhidos pertencerem a uma mesma face.

Resolução

Um dodecaedro regular é um poliedro de Platão com 12 faces pentagonais.

Temos: $12 \cdot (5) = 2 \cdot A$ e, portanto, $A = 30$.

Usando a Relação de Euler $(V + F = A + 2)$, segue: $\boxed{V = 20}$

$$p = \frac{\text{n° de casos favoráveis}}{\text{n° de casos possíveis}} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$n_1 = \underbrace{12}_{\text{escolha de uma das 12 faces}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{escolha de 3 dos 5 vértices da face}}$$

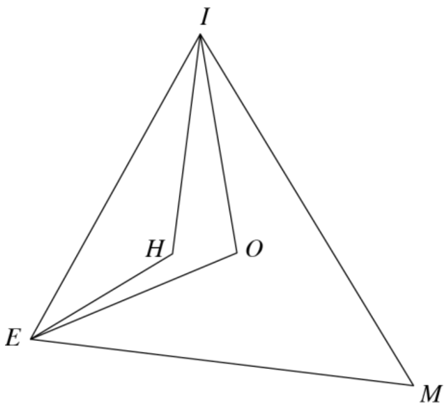
$n_2 = \binom{20}{3}$: escolha de 3 vértices quaisquer entre os 20 possíveis.

$$P = \frac{12 \cdot \binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{12 \cdot \left(\frac{5!}{2!3!}\right)}{\left(\frac{20!}{3!17!}\right)} = \frac{12 \cdot (10)}{\left(\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2 \cdot 1}\right)} \therefore \boxed{P = \frac{2}{19}}$$

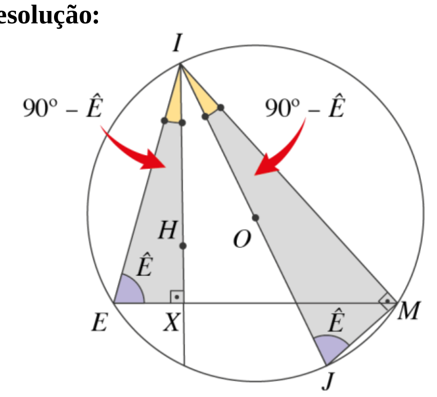
Questão 07

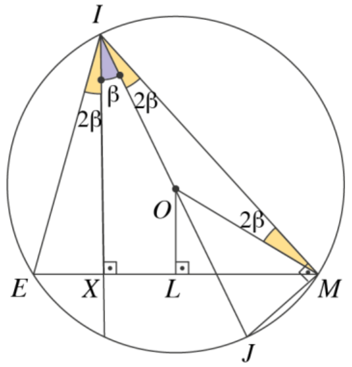
Seja um triângulo acutângulo IME conforme a figura abaixo tal que $\overline{IH} = \overline{IO}$, onde H e O são respectivamente seus ortocentro e circuncentro, interiores ao triângulo e não pertencentes aos lados.

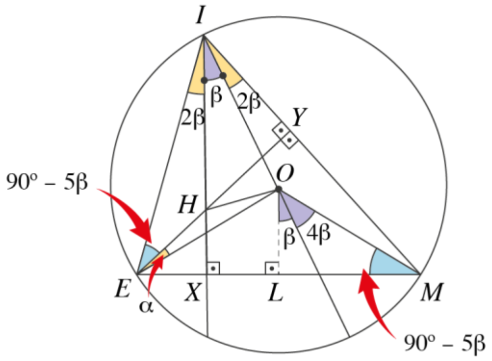
Calcule o ângulo HEO, sabendo que os ângulos $EIH = 2HIO$.



Resolução:







1) Seja $\overline{IJ}$ um diâmetro da circunferência circunscrita (centro O e raio R) ao ΔIME. A altura $\overline{IX}$ é isogonal $\overline{IJ}$ (basta ver que $IJM = IEX = E$, por serem ângulos inscritos que enxergam $\overline{IM}$)

2) Seja $H\hat{I}O = \beta$. Temos:

$E\hat{I}H = J\hat{I}M = 2\beta$ (enunciado)

Além disso, $OMI = O\hat{I}M = 2\beta$

$\left(\Delta OIM \text{ é isósceles de base } \overline{IM}\right)$

3) Seja $\overline{IJ}$ um diâmetro da circunscrita ao ΔIME. $JOM = 4\beta$ (ângulo externo no ΔOMI)

4) Sendo L o ponto médio de $\overline{EM}$, tracemos $\overline{OL}$, $\left(\overline{OL} \perp \overline{EM}\right.$ e,

portanto, $\left.\overline{OL} \parallel \overline{IX}\right)$. Resulta-se:

$LOJ = X\hat{I}J = \beta \therefore OML = 90° - 5\beta$

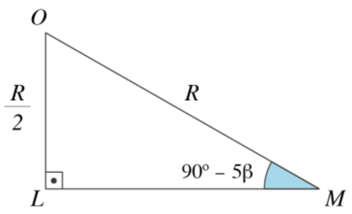
5) ΔOEI : isósceles de base $\overline{EI}$

$(90° - 5\beta) + \alpha = 3\beta \therefore \boxed{\alpha = 8\beta - 90°}$

6) Pelo estudo da reta de Euler $\left(\overleftrightarrow{OH}\right)$,

Sabemos que $IH = 2 \cdot OL$.

Sendo $IH = IO = R$, temos: $OL = \dfrac{R}{2}$



Sendo $OL = \dfrac{1}{2}OM$,

segue:

$90° - 5\beta = 30° \therefore \boxed{\beta = 12°}$

$\alpha = 8 \cdot (12°) - 90° = 6°$

$\therefore \boxed{HEO = 6°}$

Questão 08

Sejam a, b, c números reais maiores que 1. Considere a expressão:

$$S = \frac{xy + yz + xz + 2(x + y + z) + 3}{(x+1)(y+1)(z+1)}$$

onde $x = \log_c ab, y = \log_b ac, z = \log_a bc$.

Prove que o valor de S é um número inteiro e calcule este valor.

Resolução

Sejam $\log a = p$, $\log b = q$ e $\log c = t$. Dessa forma, sabemos que $x = \dfrac{p+q}{t}$, $y = \dfrac{p+t}{q}$ e $z = \dfrac{q+t}{p}$.

Tem-se, então, que o denominador será $(x+1)(y+1)(z+1) = \dfrac{(p+q+t)^3}{pqt}$.

O produto notável $(p+q+t) = p^3 + q^3 + t^3 + 3(p+q)(q+t)(p+t)$ também é conhecido.

Para o cálculo do numerador, calculamos o termo $xy + 2x + 1$ separadamente:

$$\frac{p+q}{t}\frac{p+t}{q} + \frac{2(p+q)}{t} + 1 = \frac{p(p+q)(p+t) + 2pq(p+q) + pqt}{pqt} = \frac{p^3 + 3p^2q + 2pq^2 + p^2t + 2pqt}{pqt}$$

Como o cálculo dos outros termos – $yz+2y+1$ e $xz+2z+1$ – é análogo, o numerador será igual a

$$\frac{\left(p^3+q^3+t^3\right)+3\left(p^2q+q^2t+t^2p\right)+2\left(pq^2+qt^2+tp^2\right)+\left(p^2t+q^2p+t^2q\right)+6pqt}{pqt}.$$

Colocando $3p$ e $3t$ em evidência e considerando $6pqt=3pqt+3pqt$, teremos:

$$\frac{p^3+q^3+t^3+3p\left(pq+pt+q^2+qt\right)+3t\left(pq+pt+q^2+qt\right)}{pqt}$$

Como $pq+pt+q^2+qt=p\left(q+t\right)+q\left(q+t\right)=\left(p+q\right)\left(q+t\right)$, então o numerador será igual a

$$\frac{p^3+q^3+t^3+3\left(p+q\right)\left(q+t\right)\left(p+t\right)}{pqt}=\frac{\left(p+q+t\right)^3}{pqt}.$$

Como o numerador e o denominador são iguais, concluímos que $S=1$, um valor inteiro.

Questão 09

Sejam P_1 um tetraedro regular e P_2 um prisma triangular reto. Ambos os poliedros possuem uma base comum, e a razão entre as áreas totais de P_2 e P_1 é 2.
Determine a razão entre os volumes de P_2 e P_1.

Resolução

Sejam H e h, respectivamente, as alturas de P_2 (Prisma) e P_1 (Tetraedro). Seja S a área da base comum a P_2 e P_1.
Temos:

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{S\cdot H}{\frac{1}{3}S\cdot h}=\frac{3H}{h} \quad (1)$$

Sejam S_2 e S_1 as áreas totais de P_2 e P_1, respectivamente. Seja ℓ a aresta do tetraedro, que coincide com a aresta da base triangular de P_2. Temos:

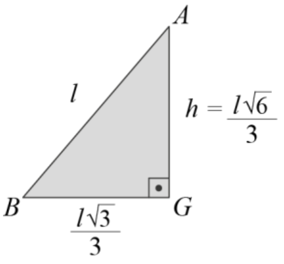
(2) $S_2=3\cdot\ell\cdot H+2\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}=3\cdot\ell\cdot H+\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$

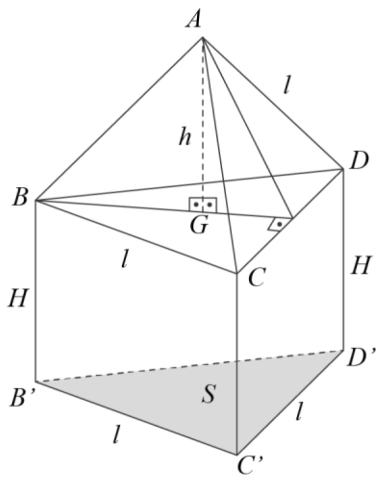
(3) $S_1=4\cdot\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}=\ell^2\sqrt{3}$

Sendo $S_2=2\cdot S_1$, segue: $H=\frac{\ell\cdot\sqrt{3}}{2}$ (4)

Partindo do fato de que $h=\frac{\ell\sqrt{6}}{3}$, temos, em conjunto com (1) e (4):

$$\frac{V_2}{V_1}=\frac{3\cdot\frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{\ell\cdot\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3}}\therefore \boxed{\frac{V_2}{V_1}=\frac{9\sqrt{2}}{4}}$$





Questão 10

Seja a equação (36x + 1)(27x + 3)(24x + 6)(18x + 3) = 189.
Determine as suas raízes reais.

Resolução

$(36x+1)(27x+3)(24x+6)(18x+3)=189 \Leftrightarrow$

$(36x+1)\frac{3}{4}(36x+4)\frac{2}{3}(36x+9)\frac{1}{2}(36x+6)=189 \Leftrightarrow$

$(36x+1)(36x+4)(36x+9)(36x+6)=756 \Leftrightarrow$ (sendo $k=36x$)

$(k+1)(k+4)(k+9)(k+6)=756 \Leftrightarrow$

$(k^2+10k+9)(k^2+10k+24)=756.$

Seja $w=k^2+10k+9$. Então, temos $w(w+15)=756$

$w^2+15w-756=0$

$\Delta=15^2+4\cdot 756=3249=57^2$

$w=\dfrac{-15\pm 57}{2}\begin{array}{l}\rightarrow -36\ (i)\\ \rightarrow 21\ (ii)\end{array}$

$(i)\ k^2+10k+9=-36$

$k^2+10k+45=0 \qquad \Delta<0\ \nexists$ solução real.

$(ii)\ k^2+10k+9=21$

$k^2+10k-12=0$

$\Delta=100+48=148$

$k=\dfrac{-10\pm 2\sqrt{37}}{2}=-5\pm\sqrt{37}\Rightarrow k=\dfrac{-5\pm\sqrt{37}}{36}$

Portanto, $S=\left\{\dfrac{-5-\sqrt{37}}{36},\dfrac{-5+\sqrt{37}}{6}\right\}$ (soluções reais)

Matemática
Alexandre Moraes
Kellem Corrêa
Mateus Bezerra

Colaboração
Alexandre Manso

Diagramação
Alex de Faria
Igor Soares
Moisés Nascimento

Revisão
Pedro Verdejo

Desenhista
Isabella Maciel

Supervisão Editorial
Aline Alkmin
Anderson Marques

A Resolução Comentada das provas do IME
*poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida,
dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.
Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br