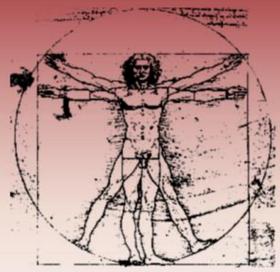


"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

MATEMÁTICA

Questão 01

Considere as matrizes $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Seja X^T a transposta da matriz X.

Sabendo que $X^TA^{-1} = B$ então X^{-1} é

a) $-\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 39 & -11\end{pmatrix}$

b) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix}11 & -5\\ -39 & 12\end{pmatrix}$

c) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix}12 & -39\\ -5 & 11\end{pmatrix}$

d) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 39 & -11\end{pmatrix}$

e) $-\frac{1}{63}\begin{pmatrix}11 & 39\\ -5 & 12\end{pmatrix}$

Resolução:

Multiplicando a equação $X^TA^{-1}=B$ por A à direita, temos $X^T=BA$.

Efetuando a multiplicação, temos $X^T=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 39\\ 5 & 11\end{pmatrix}$ e, portanto, $X=\begin{pmatrix}12 & 5\\ 39 & 11\end{pmatrix}$.

Sabemos que $X^{-1}=\frac{1}{\det X}\operatorname{adj}(X)$, onde $\operatorname{adj}(X)$ é a matriz adjunta da matriz X.

Então $\det X=12\cdot 11-5\cdot 39=132-195=-63$.

Como $\operatorname{adj}(X)$ é a transposta da matriz dos cofatores, $\operatorname{adj}(X)=\begin{pmatrix}11 & -5\\ -39 & 12\end{pmatrix}$ e, portanto, $X^{-1}=-\frac{1}{63}\begin{pmatrix}11 & -5\\ -39 & 12\end{pmatrix}$.

Alternativa B.

Questão 02

Seja $f(x)$ uma função definida em $\mathbb{R}$ tal que $f(1)=1$. Para todo $x\in\mathbb{R}$ valem as seguintes desigualdades

$$f(x+7)\geq f(x)+7 \quad e \quad f(x+1)\leq f(x)+1.$$

Se $g(x)=f(x-1)-x+2$, o valor de $g(2023)$ é

a) 0
b) 1
c) 2
d) 2022
e) 2023

Resolução:

$f(1)=1$

$f(x+7)\geq f(x)+7$

$f(x+1)\leq f(x)+1$

Fazendo x receber $x+6$ na segunda desigualdade, temos $f(x+7)\leq f(x+6)+1.$

Analogamente, usando $x+5$ no lugar de x na segunda desigualdade, temos $f(x+6)\leq f(x+5)+1.$

Logo, $f(x+7)\leq f(x+6)+1\leq f(x+5)+2$

Continuando o processo, obtemos $f(x+7)\leq f(x)+7.$

Ou seja:

$$\begin{cases} f(x+7)\geq f(x)+7 \\ f(x+7)\leq f(x)+7 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x+7)=f(x)+7}$$

Como $f(1)=1,$ temos $f(1+7)=f(8)=f(1)+7=8.$

Ou: $f(7k+1)=7k+1,$ ou seja $f(2024)=2024.$

Da segunda desigualdade, $f(x)\geq f(x+1)-1$ e $f(x+1)\geq f(x+2)-1.$

Logo, $f(x)\geq f(x+2)-2.$

Fazendo $x=2022,$ temos que $f(2022)\geq f(2024)-2=2024-2=2022.$ (I)

Mas, aplicando sucessivamente a segunda desigualdade, temos que:

$f(x+2021)\leq f(x+2020)+1\leq f(x+2019)+2\leq f(x+2018)+3\leq\ldots\leq$

$f(x+1)+2020\leq f(x)+2021.$

Com $x=1,$ vem: $f(2022)\leq f(1)+2021=1+2021=2022$ (II)

De (I) e (II): $f(2022)=2022.$

Portanto, $g(2023)=f(2022)-2023+2=2022-2023+2=1.$

Alternativa B.

Questão 03

Considere os conjuntos de números complexos:

$$A=\{x+iy \text{ tal que } x,\, y\in\mathbb{R} \text{ e } |x|+|y|\leq r\}$$

e

$$B=\{x+iy \text{ tal que } x,\, y\in\mathbb{R} \text{ e } \max\{|x-a|,|y-b|\}\leq c\},$$

onde *r*, *a*, *b* e *c* são números reais positivos e $\max\{x_1, x_2\}$ e o maior valor entre os reais x_1 e x_2.

O menor valor de *r*, em função de *a*, *b* e *c*, para que se tenha $B\subset A$ e

a) $a+b+c$

b) $(a+b)\sqrt{2}+c$

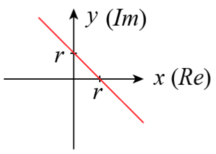
c) $2(a+b)+c$

d) $a+b+2c$

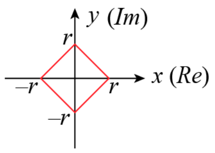
e) $2(a+b+c)$

Resolução:

O conjunto de pontos (x, y) com $x+y\leq r$ é:



Portanto, o conjunto A é:

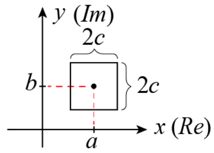


Para o conjunto B:

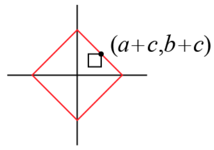
– se $|x-a| \geq |y-b|$, então $|x-a| \leq c \Leftrightarrow (a-c \leq x \leq a+c)$

– se $|x-a| < |y-b|$, então $|y-b| \leq c \Leftrightarrow (b-c \leq y \leq b+c)$

Portanto, o conjunto B é:



Para $B \subset A$, temos:



A reta $x+y=r$ de A deve conter o vértice $(a+c,\, b+c)$ de B.

Ou: $a+c+b+c=r \Leftrightarrow \boxed{r=a+b+2c}$.

Alternativa D.

Questão 04

A equação $arctg(z)+arctg(z+1)=arctg\left(\frac{4}{3}\right)$, em que $arctg(x)$ é o arco tangente de x, apresenta:

a) duas soluções reais sendo uma positiva e outra negativa.
b) duas soluções reais positivas.
c) duas soluções reais negativas.
d) uma única solução real, sendo esta positiva.
e) uma única solução real, sendo esta negativa.

Resolução:

$$arctg(z)+arctg(z+1)=arctg\left(\frac{4}{3}\right)$$

Sejam $\alpha = arctg(z)$ e $\beta = arctg(z+1)$.

Lembrando que *arctg* é uma função de contradomínio $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

temos $(\alpha+\beta)$ no primeiro quadrante, pois $arctg\left(\frac{4}{3}\right) > 0$.

$$tg(\alpha+b)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\times tg\beta}=\frac{z+z+1}{1-z(z+1)}=\frac{2z+1}{1-z-z^2}=\frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6z+3=4-4z-4z^2 \Leftrightarrow 4z^2+10z-1=0 \Leftrightarrow z=\frac{-5\pm\sqrt{29}}{4}.$$

Mas, se $z=\frac{-5-\sqrt{29}}{4}$, então $\alpha<0$ e $\beta<0$, o que não é uma solução válida.

Portanto, a única solução válida é $z=\frac{-5+\sqrt{29}}{4}>0$.

Alternativa D.

Questão 05

Dez números reais formam uma progressão geométrica (PG) com razão $q > 1$. Removem-se ao acaso cinco desses números. A probabilidade de que os cinco números restantes estejam em PG é

a) $\dfrac{1}{252}$

b) $\dfrac{1}{126}$

c) $\dfrac{3}{126}$

d) $\dfrac{2}{63}$

e) $\dfrac{3}{63}$

Resolução:

Seja a PG $(a, aq, aq^2, ..., aq^9)$, onde $q > 1$. Ao removermos 5 números, teríamos uma sequência com uma razão do tipo q^k, onde k é natural e maior ou igual a 1. Como são 5 números possíveis, temos que $(q^k)^4 \le q^9 \Rightarrow k = 1$ ou $k = 2$.

Se a razão for q, temos as sequências $(a, aq, aq^2, aq^3, aq^4)$, $(aq, aq^2, aq^3, aq^4, aq^5)$, ..., $(aq^5, aq^6, aq^7, aq^8, aq^9)$ possíveis, totalizando 6 sequências.

Se a razão for q^2, temos as sequências $(a, aq^2, aq^4, aq^6, aq^8)$ e $(aq, aq^3, aq^5, aq^7, aq^9)$ possíveis, totalizando 2 sequências.

Como o total de sequências com 5 termos é $\binom{10}{5} = 252$, a probabilidade pedida é $\dfrac{6+2}{252} = \dfrac{2}{63}$.

Alternativa D.

Questão 06

Seja um tetraedro de vértices *A*, *B*, *C* e *D*. São dados os ângulos em radianos:

$$ADB = \frac{\pi}{3} \quad \text{e} \quad CDC = \frac{\pi}{2}$$

e os comprimentos das arestas em centímetros $\overline{CD} = 3$ e $\overline{AD} = \overline{BD} = 4$.

A distância em centímetros do ponto *D* ao plano *ABC* é

a) $\dfrac{6}{7}\sqrt{7}$

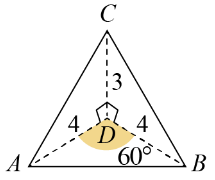
b) 3

c) $2\sqrt{3}$

d) 4

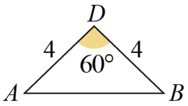
e) 5

Resolução:



Por Pitágoras, $\overline{AC} = \overline{BC} = 5.$

Destacando a base do tetraedro:

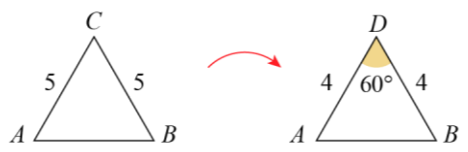


$$[ADB] = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \ sen\ 60° = 4\sqrt{3}$$

Volume $(ABCD) = \dfrac{1}{3} \cdot [ADB] \cdot \overline{DC} = \dfrac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3 = 4\sqrt{3}.$

Por outro lado, Volume $(ABCD) = \dfrac{1}{3} \cdot [ABC] \cdot h,$ onde *h* é a distância pedida.

Destacando ABC:



Lei dos cossenos em ADB:

$\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 60° = 16 \;\Rightarrow \overline{AB} = 4$

$[ABC] = \sqrt{p(p-5)^2(p-4)} = \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 3} = 2\sqrt{21}$

Então, volume $(ABC) = 4\sqrt{3} = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{21} \cdot h \Rightarrow \boxed{h = \frac{6\sqrt{7}}{7}}$

Alternativa A.

Questão 07

A soma dos inversos das soluções inteiras da equação

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

é

a) 0
b) $-\frac{19}{30}$
c) -15
d) 15
e) $\frac{19}{30}$

Resolução:

O determinante da matriz pode ser calculado utilizando a regra de Sarrus:

$$\left| \begin{array}{ccc} 2 & & x \\ x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & x \\ x & & 3 \end{array} \right| = 2 \cdot 2 \cdot 3 + x \cdot x \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot 3 - x \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot x \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot x = 0$$

Desenvolvendo, obtemos a equação polinomial:

$$x^3 - 19x + 30 = 0$$

Por inspeção, percebe-se que 2 é raiz. Com isso, a partir do algoritmo de Briot-Ruffini, a equação polinomial acima pode ser escrita como:

$$(x-2)(x^2 + 2x - 15) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(x-2)(x-3)(x+5) = 0$$

As raízes inteiras da equação acima são 2, 3 e –5.
A soma dos seus inversos é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{19}{30}.$$

Alternativa E.

Questão 08

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$. Então:

a) $f(x)$ é uma função par.

b) $f(x)$ é uma função ímpar.

c) $f(2x)>f(x)$ para todo $x\neq 0$.

d) $f(x)$ tem duas raízes reais.

e) $f(x)$ não tem raiz real.

Resolução:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$f(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
$$f(-x)=\log\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\log\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right)=$$
$$=\log\left[\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}\right]=-\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$$

Como $f(-x)=-f(x)$, temos que *f* é ímpar.

Alternativa B.

Questão 09

Um polígono regular possui $2n$ vértices $(n\in\mathbb{N},\ n>1)$. Escolhem-se ao acaso 4 vértices do polígono, formando o quadrilátero *ABCD*. A probabilidade de *ABCD* ser um retângulo é

a) $\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{4}}$

b) $\dfrac{n-1}{\binom{2n}{4}}$

c) $\dfrac{\binom{n+2}{4}}{\binom{2n}{4}}$

d) $\dfrac{\binom{2n}{2}}{6\binom{2n}{4}}$

e) $\dfrac{n^2+2n+4}{12\binom{2n}{4}}$

Resolução:

Um polígono regular de $2n$ vértices é sempre inscritível e, também, o retângulo formado por alguns de seus vértices estará inscrito na mesma circunferência. O encontro das diagonais do retângulo será o centro da circunferência e, portanto, as diagonais dos retângulos serão diâmetros.

Como há n pares de vértices diametralmente opostos, o número de retângulos é $\binom{n}{2}$. Como há $\binom{2n}{4}$ quadriláteros possíveis de serem formados, a probabilidade é $\dfrac{\binom{n}{2}}{\binom{2n}{4}}$.

Alternativa A.

Questão 10

Considere um ponto P cujas coordenadas (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$, satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 4\operatorname{cossec}(\alpha)x - 6\cot(\alpha)y & = 4\, sen(\alpha) \\ 12\operatorname{cossec}(\alpha)y - 8\cot(\alpha)x & = 0 \end{cases}$$

onde α é um ângulo em radianos diferente de $k\pi(k \in \mathbb{Z})$. O lugar geométrico descrito pelos pontos P, conforme se varia o ângulo α, é um segmento de:

a) reta horizontal.
b) reta vertical.
c) reta inclinada.
d) elipse.
e) parábola.

Resolução:

$$\begin{cases} 4\operatorname{cossec}(\alpha)x - 6\cot g(\alpha)y = 4\, sen(\alpha) \\ 12\operatorname{cossec}(\alpha)y - 8\cot g(\alpha)x = 0 \end{cases}$$

A segunda equação nos dá:

$$12\operatorname{cossec}(\alpha)y = 8\cot g(\alpha)x \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}\cos(\alpha)x.$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{4x}{\operatorname{sen}(\alpha)} - 6y \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\operatorname{sen}(\alpha)} = 4\operatorname{sen}(\alpha) \Leftrightarrow 4x - 4x\cos^2(\alpha) = 4sen^2(\alpha) \Leftrightarrow x = 1 \text{ e } y = \frac{2}{3}\cos(\alpha).$$

Portanto, quando α varia, temos que o lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ é um segmento de reta vertical, em que $x = 1$ e $y \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$.

Alternativa B.

Questão 11

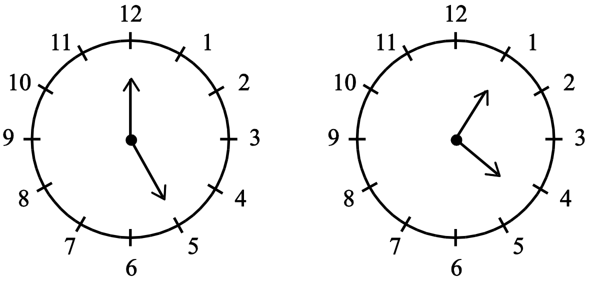
Um aluno distraído desmontou um relógio. Ao remontá-lo, trocou a posição dos ponteiros das horas e dos minutos, de modo que o ponteiro das horas passou a girar com a velocidade do ponteiro dos minutos, e vice-versa. Sabendo que o relógio foi acertado para as 4 horas, o intervalo que contem o horário t que marcará a hora certa novamente pela primeira vez é

a) $4h30min \leqslant t < 5h$
b) $5h \leqslant t < 5h30min$
c) $5h30min \leqslant t < 6h$
d) $6h \leqslant t < 6h30min$
e) $6h30min \leqslant t < 7h10min$

Resolução:

Durante a primeira hora, ou seja, das 04:00 às 05:00, o relógio não marcará a hora correta, pois ele foi acertado na hora correta e passará 1 hora girando na velocidade errada.

Às 05:00, como o ponteiro dos minutos terá andado 5 minutos (posição 1) e o ponteiro das horas voltará para a posição 4. Com isso, às 5:00, o relógio marcará 4h05. O desenho a seguir ilustra esse momento:



HORA REAL HORA DO RELÓGIO

Para que a hora real coincida com a hora do relógio, a posição de ambos os ponteiros deve ser a mesma.

Na hora real, temos que o ponteiro dos minutos formará um ângulo de $\frac{360}{60}t = 6t$ graus com o eixo vertical, enquanto que o ponteiro dos minutos do relógio formará um ângulo de $30^{\circ} + \frac{30}{60}t^{\circ} = 30 + \frac{t}{2}$ graus, onde t, em ambas as equações, está em minutos. Para que a posição do ponteiro dos minutos se iguale, então $6t = 30 + \frac{t}{2} \Rightarrow t = \frac{60}{11}$ minutos. Como esse tempo é aproximadamente 5,45 minutos, os ponteiros das horas em ambos os relógios marcarão 5 horas.

Então a hora pedida é 5 horas e $\frac{60}{11}$ minutos.

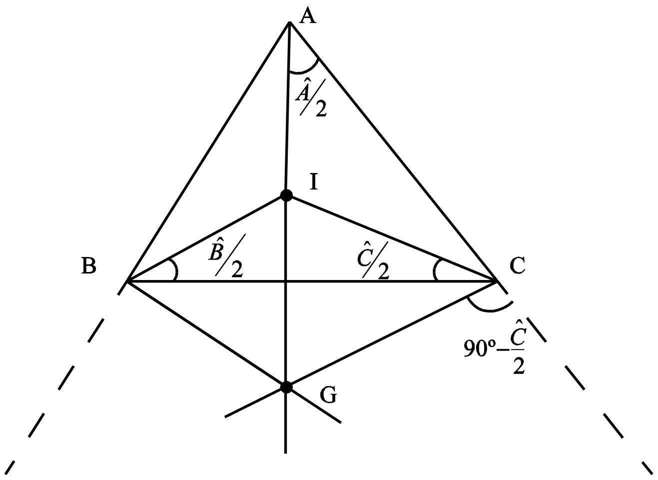
Alternativa B.

Questão 12

Um triângulo ABC possui incentro I e ex-incentro G relativo ao lado $\overline{BC}$. Se $B\hat{I}C + AGC = 155^{\circ}$, então o ângulo ACB é

a) 30º
b) 45º
c) 50º
d) 60º
e) 90º

Resolução:



$$B\hat{I}C = 180^{\circ} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$A\hat{G}C = 180^{\circ} - \frac{\hat{A}}{2} - \left(180^{\circ} - \left(90^{\circ} - \frac{\hat{C}}{2}\right)\right) =$$

$$= \cancel{180^{\circ}} - \frac{\hat{A}}{2} - \cancel{180^{\circ}} + 90^{\circ} - \frac{\hat{C}}{2} =$$

$$= 90^{\circ} - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}$$

Logo, $B\hat{I}C + AGC = 180^{\circ} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} + 90^{\circ} - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} = 155^{\circ}$

Ou: $180^{\circ} - \frac{\left(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}\right)}{2} + 90^{\circ} - \frac{\hat{C}}{2} = 155^{\circ} \Leftrightarrow \frac{\hat{C}}{2} = 25^{\circ}$

Portanto, $\hat{C} = 50^{\circ}$

Alternativa C.

Questão 13

Seja a equação

$$\frac{144^x + 324^x}{64^x + 729^x} = \frac{6}{7}.$$

A soma dos módulos das soluções reais desta equação é

a) 1
b) 2
c) 3
d) 8
e) 9

Resolução:
Considerando $2^{2x} = a$ e $3^{2x} = b$, temos que, como $144 = 2^4 \cdot 3^2$, $324 = 2^2 \cdot 3^4$, $64 = 2^6$ e $729 = 3^6$, então a expressão é idêntica a

$$\frac{a^2 \cdot b + a \cdot b^2}{a^3 + b^3} = \frac{6}{7}.$$

Então, como $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, a expressão será $\frac{ab}{a^2 - ab + b^2} = \frac{6}{7}$, ou seja,

$$6a^2 - 13ab + 6b^2 = 0.$$

Dividindo por ab, a expressão se torna $6\frac{a}{b} - 13 + 6\frac{b}{a} = 0$. Seja $\frac{a}{b} = y$, então

$$6y - 13 + \frac{6}{y} = 0 \Rightarrow 6y^2 - 13y + 6 = 0.$$

A equação acima tem soluções $y = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{3}{2}$. Então:

Se $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Se $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{3}{2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.

Portanto, a soma dos módulos das soluções reais da equação é $\left|\frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| = 1$.

Alternativa A.

Questão 14

Seja a equação $2x^2 + cxy - 3x + 6y^2 - 4y - 2 = 0$ representa no plano real duas retas concorrentes, então o valor positivo do número real c é

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Resolução:

$2x^2 + cxy - 3x + 6y^2 - 4y - 2 = 0$
$2x^2 + x(cy - 3) + (6y^2 - 4y - 2) = 0$

Para termos duas retas concorrentes, precisamos que o delta da equação acima seja um quadrado perfeito em y.

$\Delta = (cy - 3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (6y^2 - 4y - 2) = (c^2 - 48)y^2 + (32 - 6c)y + 25$

Então, $\Delta = (a + 5)^2 = a^2 + 10a + 25 = (c^2 - 48)y^2 + (32 - 6c)y + 25$

Ou seja, $a = \frac{16 - 3c}{5}y$ e $\left(\frac{16 - 3c}{5}\right)^2 = c^2 - 48 \Leftrightarrow c^2 + 6c - 91 = 0 \Leftrightarrow$

$c = 7$ ou $c = -13$

Como a questão pede o valor de c positivo, só pode ser 7.

Alternativa B.

Questão 15

Um número natural é palíndromo quando é o mesmo lido da esquerda para a direita e vice-versa. Seja n um número natural palíndromo tal que $1000 \le n \le 9999$. Se n é um cubo perfeito, então a soma dos algarismos de n é

a) 8
b) 10
c) 12
d) 14
e) 16

Resolução:

O número palíndromo terá a forma $\overline{ABBA} = 1000A + 100B + 10B + A$, ou seja, $1001A + 110B = 11(91A + 10B)$.

Com isso, tem-se que ele será múltiplo de 11.

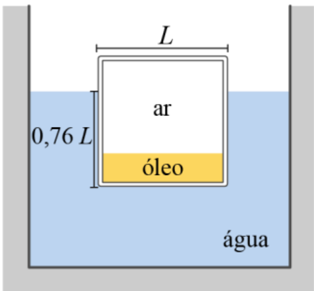
Como 11 é primo e o número é um cubo perfeito, ele será múltiplo de $11^3 = 1331$.

Contudo, como $11^3 \cdot 2^3 = 10.648$, a única possibilidade será $\overline{ABBA} = 1331$, ou seja, $1+3+3+1=8$.

Alternativa A.

FÍSICA

Questão 16



Um cubo de arestas de comprimento L é fabricado a partir de uma chapa metálica fina de densidade superficial de massa S. O cubo encontra-se bem vedado e possui 20% de seu volume interior preenchido com óleo e o restante preenchido com ar. Em certo momento, o cubo é colocado dentre de um reservatório de água e permanece em equilíbrio na posição ilustrada na figura.

Dados:

- massa específica da água: 1 g/cm^3;
- massa específica do óleo: 0,8 g/cm^3.

Observações:

- a massa do ar no interior do cubo é desprezível;
- a espessura da chapa é desprezível em relação ao comprimento L das arestas;
- a unidade de L é cm;
- a unidade de S é g/cm^2.

A relação L/S, em cm^3/g, é:

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

Resolução:

$$Empuxo = E = \rho_L \cdot v_{sub} \cdot g = 1 \cdot L^3 \cdot 0{,}76 \cdot g$$

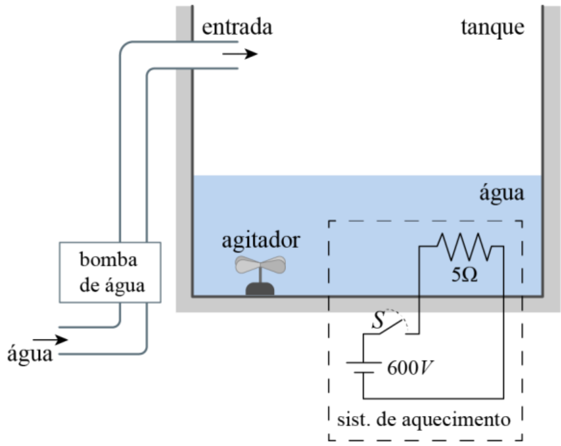
$$Peso = P = \left[m_{chapa} + \cancel{m_{ar}} + m_{óleo}\right] \cdot g = \left[6L^2S + \frac{1}{5}L^3 \cdot 0{,}8\right] \cdot g$$

$$\text{Como: } E = P \Rightarrow L^3 \cdot 0{,}76 = 6L^2S + L^3 \cdot 0{,}16$$

$$\Rightarrow 6\frac{S}{L} = 0{,}6 \;\Rightarrow\; \frac{L}{S} = 10$$

Alternativa E.

Questão 17



Na figura mostra-se um tanque sendo alimentado por uma bomba d'água, um agitador e um sistema de aquecimento.

Dados:

- massa específica da água: 1 g/cm^3;
- calor específico da água: 1 cal/(g.°C);
- vazão de água da bomba: 10 *L/min*;
- 1 cal = 4,2 J.

Observações:

- não há perdas de calor pelo tanque;
- toda energia dissipada pela resistência aquece a água;
- o agitador mistura toda a água do tanque, mantendo-a numa mesma temperatura.

A água do tanque e a fornecida pela bomba encontram-se a 20 °C. Em determinado instante, o tanque contém 220 *L* de água e a chave *S* do sistema de aquecimento é fechada. O tempo, em minutos, para que a água do tanque atinja 60 °C será:

a) 8
b) 11
c) 14
d) 17
e) 20

Resolução:

Potência dissipada pelo resistor:

$$Pot = \frac{U^2}{R} = \frac{600^2}{5} = 7,5 \cdot 10^4 W$$

Quantidade de calor fornecida para a água

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta$$

$$Pot \cdot \Delta t = d \cdot V(t) \cdot c \cdot \Delta\theta \quad \text{sendo} \quad V(t) = (220 + 10\Delta t)\,litros$$

$$7,2 \cdot 10^4 \cdot (60 \cdot \Delta t) = 1 \cdot (220 + 10\Delta t) \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot (60 - 20) \qquad (\text{Com } \Delta t \text{ em min})$$

$$72(60\Delta t) = (220 + 10\Delta t) \cdot 4,2 \cdot 40$$

$$18 \cdot 6\Delta t = (220 + 10\Delta t) \cdot 4,2$$

$$\Delta t = \frac{220 \cdot 4,2}{66} = 14\,\text{min}$$

Alternativa C.

Questão 18

Um físico pilotando uma espaçonave foi multado por avanço de um semáforo de trânsito interestelar. Em sua defesa, alegou que via luz verde ao avançar o semáforo. Além de ter sua defesa indeferida, o físico ainda recebeu outra multa por excesso de velocidade.

Dados:

- velocidade da luz no vácuo: c;
- comprimento de onda da cor verde ("siga"): λ_g;
- comprimento de onda da cor vermelho ("pare"): λ_r.

A velocidade mínima da espaçonave era:

a) $\dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)}{1+\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)}c$

b) $\dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_g}\right)}{1+\left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_g}\right)}c$

c) $\dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2}c$

d) $\dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_g}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\lambda_r}{\lambda_g}\right)^2}c$

e) $\dfrac{1+\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)}{1-\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)}c$

Resolução:

Como o observador (físico) se aproxima da fonte (semáforo), $f_{obs} = f_{fonte}\sqrt{\dfrac{1+\beta}{1-\beta}}$

Mas $f_{obs} = \dfrac{c}{\lambda_g}$, $f_{fonte} = \dfrac{c}{\lambda_r}$ e $\beta = v/c$

Então $\dfrac{c}{\lambda_g} = \dfrac{c}{\lambda_r}\sqrt{\dfrac{1+v/c}{1-v/c}}$

Daí, $\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r} = \sqrt{\dfrac{1-v/c}{1+v/c}}$

Elevando ao quadrado, $\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2 = \dfrac{1-v/c}{1+v/c}$

Considerando $\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2 = \left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2 /1$, podemos, nos dois lados da proporção, substituir N/D por (D-N)/(D+N).

Assim, $\dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2} = \dfrac{2v/c}{2}$

Daí, $v = \dfrac{1-\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\lambda_g}{\lambda_r}\right)^2}c$

Alternativa C.

Questão 19

Em dois experimentos, A e B, uma partícula foi fixada à esquerda e outra partícula à direita foi solta com velocidade nula, conforme geometrias apresentadas nas figuras acima. Em cada experimento, mediu-se a velocidade final que a partícula da direita alcançou muito tempo após ser solta.

Observação:

- os movimentos das partículas nos experimentos ocorrem sempre na horizontal e sem a influência da gravidade.

Definindo v_A como a velocidade escalar final da partícula solta no experimento A e v_B como a velocidade escalar final da partícula solta no experimento *B*, a razão v_A/v_B é

a) 16/9
b) $\sqrt{2}$
c) 2
d) 4
e) $2\sqrt{3}/3$

Resolução:

Por conservação de Energia, temos:

Experimento A:

$$E_{pe} = E_c$$

$$\frac{k \cdot Q \cdot 2Q}{d} = \frac{(2m) \cdot v_A^2}{2}$$

$$v_A^2 = \frac{2kQ^2}{md}$$

Experimento B:

$$E_{pe} = E_c$$

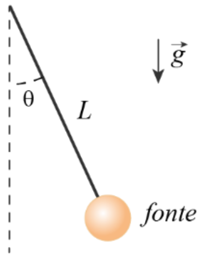
$$\frac{k \cdot Q \cdot 3Q}{2d} = \frac{6m \cdot v_B^2}{2}$$

$$v_B^2 = \frac{kQ^2}{2md}$$

Logo: $\dfrac{v_A^2}{v_B^2} = \dfrac{\frac{2kQ^2}{md}}{\frac{kQ^2}{2md}} = 4 \Rightarrow \dfrac{v_A}{v_B} = \sqrt{4} = 2$

Alternativa C.

Questão 20



Uma fonte sonora está pendurada por um fio ideal, conforme ilustrado na figura, realizando um movimento pendular.

Dados:

- frequência da fonte sonora: f ;
- comprimento do fio do pêndulo: L ;
- aceleração da gravidade: g ;
- velocidade do som: v .

Se $\theta_{máx}$ é o ângulo máximo atingido pelo fio que sustenta a fonte com relação à vertical, a frequência máxima do som ouvido por um observador localizado a uma distância ínfima do ponto mais baixo da trajetória da fonte é:

a) $\dfrac{fv}{v - \sqrt{2gL\left[1 - \text{sen}(\theta_{máx})\right]}}$

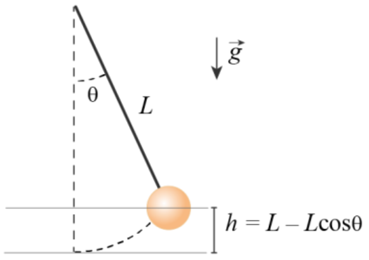
b) $\dfrac{fv}{v - \sqrt{2gL\left[1 - \cos(\theta_{máx})\right]}}$

c) $\dfrac{f}{v}\left\{v - \sqrt{2gL\left[1 - \text{sen}(\theta_{máx})\right]}\right\}$

d) $\dfrac{f}{v}\left\{v - \sqrt{2gL\left[1 - \cos(\theta_{máx})\right]}\right\}$

e) $\dfrac{fv}{v - \sqrt{2gL\cos(\theta_{máx})}}$

Resolução:



Por conservação de energia:

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_f = \cancel{m}gh \Rightarrow v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}$$

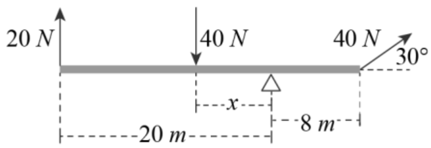
Do efeito Doppler, temos:

$$f_{obs} = f \cdot \frac{v}{v - v_f} = f \cdot \frac{v}{v - \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}}$$

$$f_{obs} = \frac{fv}{v - \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}}$$

Alternativa B.

Questão 21



Uma balança de massa desprezível recebe a aplicação de 3 forças, como indicado na figura acima. A distância x assinalada, em metros, que garante o equilíbrio, é aproximadamente:

a) 2,0
b) 6,0
c) 8,3
d) 9,1
e) 14,0

Resolução:

Para o equilíbrio, a soma dos momentos em relação ao ponto fixo deve ser zero.
Considerando positivos os momentos no sentido horário e negativos os momentos no sentido anti-horário:

$$20 \cdot 20 - 40 \cdot x - (40 \cdot sen30°) \cdot 8 = 0$$

$$400 - 40 \cdot x - 20 \cdot 8 = 0$$

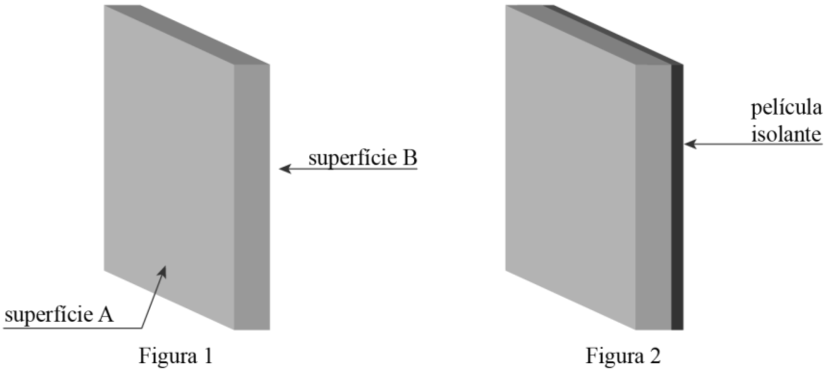
$$400 - 40 \cdot x - 160 = 0$$

$$40 \cdot x = 400 - 160 = 240$$

$$x = 6m$$

Alternativa B.

Questão 22



Considere uma parede plana que apresenta temperaturas conhecidas e distintas em suas superfícies A e B (Figura 1), respectivamente iguais a T_{A1} e T_{B1}. De modo a minimizar a taxa de transferência de calor, decide-se recobrir a superfície B com uma película isolante.

Dados:

- espessura da parede: 10 cm;
- espessura da película isolante: 6 mm;
- razão entre a taxa de transferência de calor da parede recoberta com a película isolante e a taxa de transferência de calor na situação não isolada: 0,4.

Observações:

- com o recobrimento da superfície B (Figura 2), suponha as temperaturas externas iguais a T_P (lado da película) e a T_{A2};
- a taxa de transferência de calor é constante ao longo das paredes nas duas situações.

Para garantir-se $T_{B1} - T_{A1} = T_P - T_{A2}$, a razão entre as condutividades térmicas da película isolante e do material da parede é:

a) 0,04
b) 0,06
c) 0,40
d) 0,60
e) 0,80

Resolução:

Situação inicial: $\Phi_{antes} = \Phi = \dfrac{k \cdot A \cdot \Delta\theta}{e}$; com $\Delta\theta = T_{B1} - T_{A1}$

Situação final: $\Phi_{depois} = 0,4\Phi = \dfrac{K \cdot A \cdot \Delta\theta_{parede}}{e} = \dfrac{K_p \cdot A \cdot \Delta\theta_{película}}{e_p}$

$$\Delta\theta_{parede} + \Delta\theta_{película} = \left(T_p - T_{A2}\right) = \Delta\theta = T_{B1} - T_{A1}$$

$$\frac{0,4\Phi \cdot e}{K \cdot A} + \frac{0,4\Phi \cdot e_p}{K_p \cdot A} = \frac{\Phi \cdot e}{K \cdot A}$$

$$\frac{0,4 \cdot 0,1}{K} + \frac{0,4 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{K_p} = \frac{0,1}{K}$$

$$\frac{2,4 \cdot 10^{-3}}{K_p} = \frac{0,6 \cdot 0,1}{K} \Rightarrow \frac{K_p}{K} = \frac{2,4 \cdot 10^{-2}}{0,6} = 0,04$$

Alternativa A.

Questão 23

Duas partículas A e B de massas iguais se deslocam no plano XY. As coordenadas de suas posições, em função do instante de tempo t, em que $0 \le t \le t_{choque}$, são, respectivamente, $S_A = \left(t^2 - 9t + 13,\ t - 2\right)$ e $S_B = \left(-2t + 3,\ t^2 - 7t + 13\right)$. No instante $t = t_{choque}$, as partículas chocam-se elasticamente. Imediatamente após o choque, o módulo da soma de seus vetores de velocidade é:

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt{10}$
c) $\sqrt{13}$
d) $\sqrt{17}$
e) $\sqrt{53}$

Resolução:

No choque temos:

$$S_A = S_B \Rightarrow \begin{cases} x_A = x_B \\ y_A = y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2 - 9t + 13 = -2t + 3 \\ t - 2 = t^2 - 7t + 13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 7t + 10 = 0 \\ t^2 - 8t + 15 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo as equações do 2° grau verifica-se que o instante de tempo que satisfaz simultaneamente as duas equações é $t = 5s$.

As velocidades nesse instante são dadas por:

$$v_A = \frac{dS_A}{dt} = (2t - 9)\hat{\imath} + j = (\hat{\imath} + j)\,m/s$$

$$v_B = \frac{dS_B}{dt} = (-2)\hat{\imath} + (2t - 7)\,j = (-2\hat{\imath} + 3j)\,m/s$$

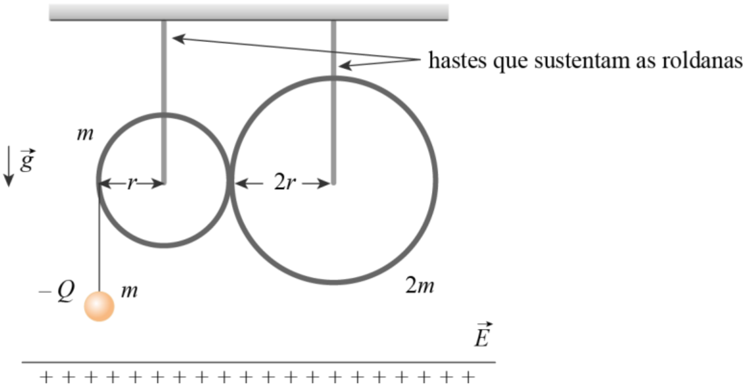
Como o choque é elástico, o módulo da soma dos vetores velocidade imediatamente antes e depois é igual.

$$\vec{v_A} + \vec{v_B} = (\hat{\imath} + j) + (-2\hat{\imath} + 3j) = (-\hat{\imath} + 4j)$$

$$\left|\vec{v_A} + \vec{v_B}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

Alternativa D.

Questão 24



Uma partícula de carga negativa, inicialmente em repouso, está sujeita ao seu peso e ao campo elétrico $\vec{E}$ vertical constante provocado por um plano infinito eletrizado. Como mostrado na figura, a partícula está presa por um fio ideal não condutor enrolado a uma roldana em forma de anel. Essa roldana pode girar de forma solidária a uma outra roldana com o dobro da massa e o dobro do raio. Ao girar, o fio é desenrolado à mesma velocidade escalar dos pontos do perímetro da roldana menor.

Dados:

- aceleração da gravidade: g;
- módulo do campo elétrico vertical: E;
- massa da partícula: m;
- massa da roldana menor: m;
- massa da roldana maior: $2m$;
- carga da partícula: $-Q$;
- raio da roldana menor: r;
- raio da roldana maior: $2r$.

Observações:

- as roldanas estão sustentadas por hastes presas do teto aos respectivos centros;
- as roldanas giram sempre em torno de seus centros e sem atrito;
- todos os pontos do anel de cada roldana sempre estão à mesma velocidade escalar;
- toda a massa de cada roldana está igualmente distribuída em seu respectivo perímetro.

Pelo princípio da conservação da energia, conclui-se que a aceleração da partícula eletrizada, ao iniciar seu movimento, é:

a) $\dfrac{(mg + EQ)}{2m}$

b) $\dfrac{(mg + EQ)}{4m}$

c) $\dfrac{3(mg + EQ)}{4m}$

d) $\frac{9(mg+EQ)}{4m}$

e) $\frac{(mg+EQ)}{8m}$

Resolução:

Realizando a conservação da energia, temos:

$$\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}I_1w_1^2+\frac{1}{2}I_2w_2^2=mgh$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2+\frac{1}{2}\cancel{m}r^2w_1^2+\frac{1}{2}\left(2\cancel{m}\right)\cancel{(2r)^2}\left(\frac{v_1}{\cancel{2r}}\right)^2=\cancel{m}gh$$

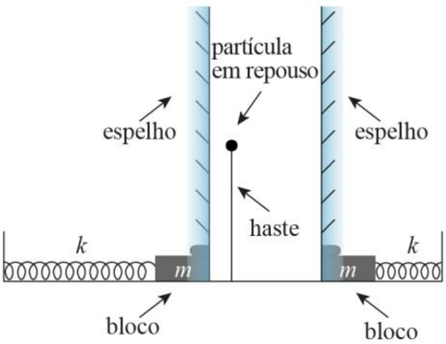
$$2v_1^2=g'h$$

Derivando a expressão em relação ao tempo:

$$2\cdot 2\cancel{v_1}\frac{dv_1}{dt}=g'\frac{\cancel{dh}}{\cancel{dt}} \Rightarrow a=\frac{g'}{4}=\frac{mg+EQ}{4m}$$

Alternativa B.

Questão 25



A figura mostra um esquema com dois espelhos planos verticais presos a blocos que oscilam na mesma direção sobre uma superfície horizontal sem atrito. Observa-se também a presença de uma partícula em repouso.

Dados:

- amplitude da oscilação de cada bloco: A;
- massa de cada conjunto (bloco e espelho): m;
- constante elástica de cada mola: k.

Observações:

- cada espelho chega a encostar com velocidade nula na partícula em repouso, porém em instantes diferentes;
- quando o espelho da esquerda encosta na partícula em repouso, o espelho da direita está voltando, com a mola se comprimindo, e à sua maior velocidade escalar.

A maior distância relativa entre as imagens da partícula nos espelhos e a maior velocidade escalar relativa entre elas são, respectivamente:

a) $6A$ e $\sqrt{2}A\sqrt{k/m}$

b) $6A$ e $4\sqrt{2}A\sqrt{k/m}$

c) $6A$ e $2\sqrt{2}A\sqrt{k/m}$

d) $2\left(2+\sqrt{2}\right)A$ e $\sqrt{2}A\sqrt{k/m}$

e) $2\left(2+\sqrt{2}\right)A$ e $2\sqrt{2}A\sqrt{k/m}$

Resolução:

$$x_E = A\cos(\omega t) - A \Rightarrow I_E = 2\left[A\left(\cos(\omega t) - 1\right)\right]$$

$$x_D = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + A \Rightarrow I_D = 2\left[A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + 1\right]$$

$$D = x_D - x_E = 2A\left[\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos(\omega t) + 2\right]$$

Derivando e igualando a zero, teremos:

$$2A\omega\left[-\text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) + \text{sen}(\omega t)\right] = 0 \Rightarrow \text{sen}(\omega t) = \cos(\omega t)$$

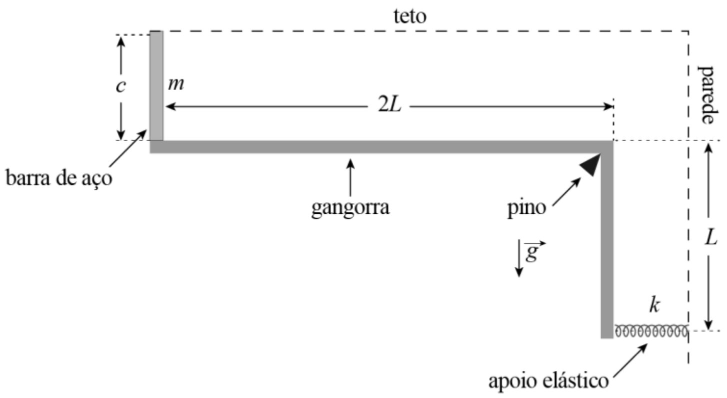
$$\text{tg}(\omega t) = 1 \Rightarrow \text{sen}(\omega t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D_{máx} = 2A\left[2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow D_{máx} = 2A\left[2 + \sqrt{2}\right]$$

$$v_{máx} = 2A\omega \cdot \sqrt{2} = 2A\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow v_{máx} = 2\sqrt{2}A\sqrt{k/m}$$

Alternativa E.

Questão 26



A figura acima mostra um aparato com uma barra de aço vertical, tendo sua extremidade superior presa ao teto e sua extremidade inferior encostada na ponta de uma gangorra em forma de "L". Por sua vez, a gangorra também encosta em um apoio elástico, que é preso na parede indicada. Após a montagem do aparato, a barra de aço e aquecida por igual.

Dados:
- aceleração da gravidade: g ;
- massa da barra de aço: m ;
- comprimento da barra de aço: c ;
- coeficiente de dilatação linear da barra de aço: α ;
- coeficiente elástico do apoio: k ;
- comprimento horizontal da gangorra: $2L$;
- comprimento vertical da gangorra: L ;
- variação de temperatura após o aquecimento: T .

Observações:
- a deformação da barra de aço após a dilatação e muito menor que L ;
- o pino indicado na figura mantém-se fixo;
- antes do aquecimento, o apoio elástico está encostado na gangorra e sem energia potencial armazenada.

Ao final do processo de aquecimento, o trabalho realizado pela forca peso da barra de aço e a energia potencial armazenada no apoio elástico são, respectivamente:

(A) $mg\alpha cT$ e $k(\alpha cT)2/8$

(B) $mg\alpha cT/2$ e $k(\alpha cT)2/8$

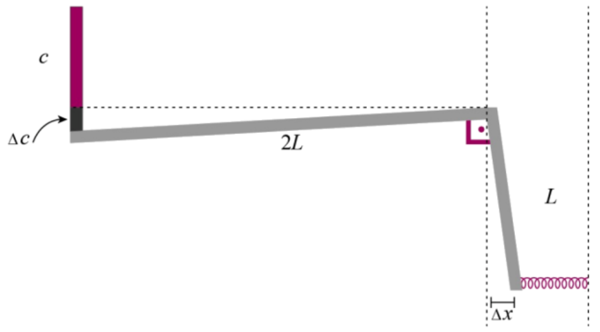
(C) $mg\alpha cT$ e $k(\alpha TL)2/16$

(D) $mg\alpha cT/2$ e $k(\alpha TL)2/16$

(E) $mg\alpha cT$ e $k(\alpha TL)2/8$

Resolução:

Após o aquecimento da barra, temos:



Trabalho do peso:

$\tau_p = mg\Delta h$

$\Delta h = {}^{\Delta c}\!/_{2} \Rightarrow$ Onde $\Delta c = c \cdot \alpha \cdot \Delta\theta = c \cdot \alpha \cdot T$

$\tau_p = mg \cdot \dfrac{c \cdot \alpha \cdot T}{2}$

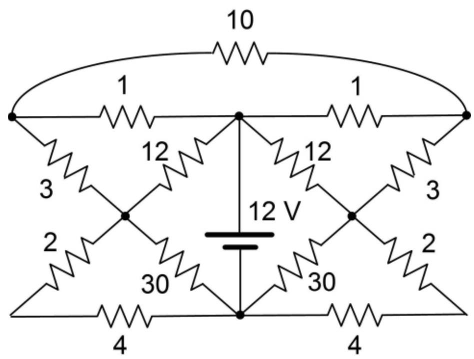
Deformação Δx da mola:

$\Delta x = {}^{\Delta c}\!/_{2}$ $\qquad\qquad$ $\Delta x = {}^{\Delta c}\!/_{2}$

$E_p = \dfrac{k \cdot \Delta x^2}{2} = \dfrac{k}{2}\left(\dfrac{c \cdot \alpha \cdot T}{2}\right)^2 = \dfrac{k\left(c \cdot \alpha \cdot T\right)^2}{8}$

Alternativa B.

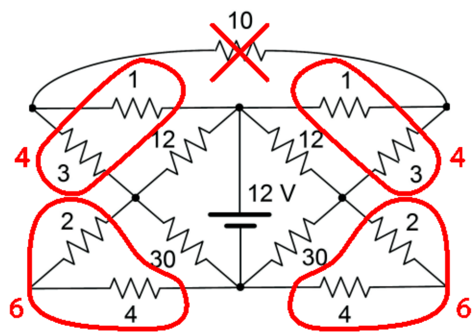
Questão 27



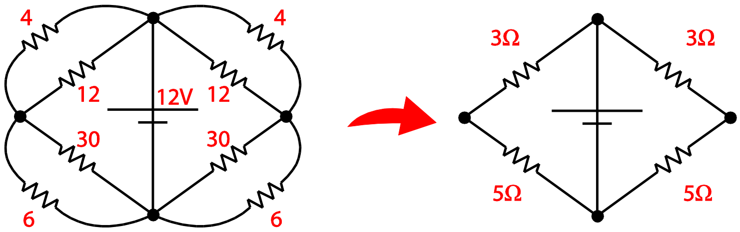
O circuito acima e alimentado por uma fonte de 12V. Todas os valores de resistências apresentados encontram-se em Ω. A potência, em W, fornecida pela fonte e:

a) 18
b) 36
c) 54
d) 72
e) 96

Resolução:



Por simetria, como a resistência de 10Ω está conectada em um mesmo potencial, ela pode ser removida. Assim, fazendo as associações em cada trecho, temos:



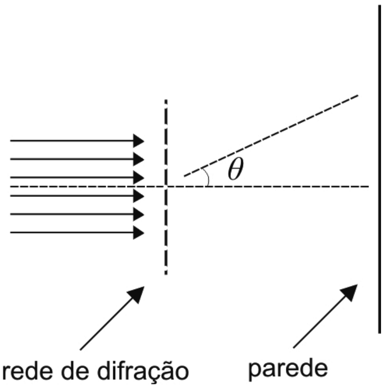
Logo:

$\mathrm{Re}q = 8\Omega // 8\Omega = 4\Omega$

$$Pot = \frac{U^2}{\mathrm{Re}q} = \frac{12^2}{4} = 36\,W$$

Alternativa B.

Questão 28



Um feixe de luz propaga-se na horizontal e atravessa uma rede de difração disposta na vertical.

Observações:

• comprimento de onda da luz: $\lambda = 5{,}5\ x\ 10^{-7}\,m$;

• número de fendas por centímetro da rede de difração: 4000.

Os valores mais próximos para os senos dos ângulos θ, indicados na figura, para $\theta > 0$, correspondentes aos dois primeiros pontos brilhantes projetados numa parede vertical são:

(A) 0,26 e 0,72 (B) 0,09 e 0,44 (C) 0,22 e 0,44 (D) 0,26 e 0,59 (E) 0,22 e 0,59

Resolução:

Os máximos, em uma rede de difração, são dados por:

$d.\cdot sen\,\theta = m\cdot\lambda$ com $m = 0,1,2,3\,...$

Onde d é dado por:

$$d = \frac{10^{-2}m}{n} = \frac{10^{-2}m}{4000} = 2{,}5.10^{-6}m$$

Logo:

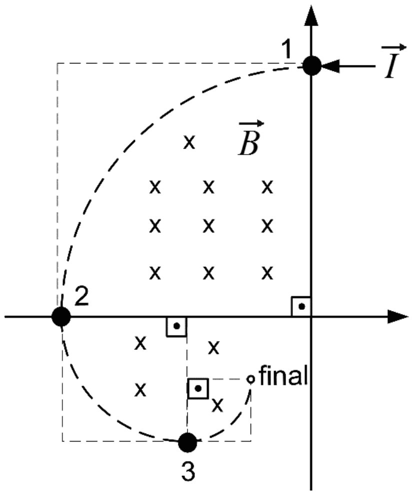
$$d\ sen\theta = m\cdot\lambda \Rightarrow 2{,}5\cdot 10^{-6}\cdot sen\theta = m\cdot 5{,}5.10^{7}$$

$$sen\theta = m\cdot\frac{5{,}5.10^{-1}}{2{,}5} = m\cdot 0{,}22$$

Como $sen\theta = 0{,}22m$, os dois primeiros máximos ($m = 1$ e $m = 2$) terão os valores de seno iguais a 0,22 e 0,44.

Alternativa C.

Questão 29



Três partículas carregadas, inicialmente em repouso no plano da página, estão posicionadas sobre uma região do espaço submetida a uma densidade de fluxo magnético uniforme $\vec{B}$, que aponta para dentro do plano da página. No instante $t = 0$, a partícula localizada no ponto 1 e submetida a um impulso $\vec{I}$ e descreve a trajetória indicada pela linha tracejada na figura, até ocorrer um choque perfeitamente inelástico com a partícula localizada no ponto 2. Pouco depois, outro choque perfeitamente inelástico ocorrera com a partícula localizada na posição 3.

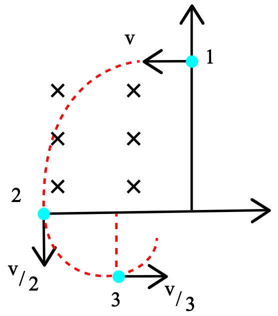
Dados:
• massa de cada partícula: m;
• carga da partícula inicialmente na posição 1: Q;
• carga da partícula inicialmente na posição 2: $2Q$;
• carga da partícula inicialmente na posição 3: $3Q$;
• modulo da densidade de fluxo magnético: B;
• intensidade do impulso: I.

Observações:
• não há efeito gravitacional;
• o sinal de Q está em conformidade com a geometria da figura;
• todas as forças de repulsão entre as partículas são desprezíveis;
• a trajetória tracejada na figura e composta pela união de três arcos de 1/4 de circunferência.

A distância total percorrida pela partícula impulsionada desde a posição 1 até o ponto identificado como final é:

A) $\frac{1}{2}(\frac{I\pi}{QB})$ B) $\frac{1}{4}(\frac{I\pi}{QB})$ C) $\frac{7}{8}(\frac{I\pi}{QB})$ D) $\frac{3}{4}(\frac{I\pi}{QB})$ E) $\frac{7}{12}(\frac{I\pi}{QB})$

Resolução:



Pelo teorema do impulso: $I = \Delta Q = mv - 0 = mv$

Raio da trajetória circular no campo magnético: $R = \dfrac{mv}{QB}$

Para o 1º trecho: $R_1 = \dfrac{mv}{QB} = \dfrac{I}{QB}$

Para o 2º trecho: $R_2 = \dfrac{(2m)\,.\,(v/2)}{3QB} = \dfrac{I}{3QB}$

Para o 3º trecho: $R_3 = \dfrac{(3m)\,.\,(v/3)}{6QB} = \dfrac{I}{6QB}$

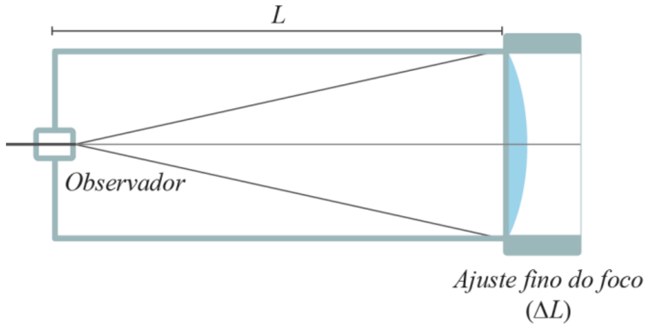
Distância total percorrida:

$$S = \frac{1}{4}(2\pi)(R_1 + R_2 + R_3) = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{I}{QB} + \frac{I}{3QB} + \frac{I}{6QB}\right)$$

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{6+2+1}{6QB}\right) I = \frac{3I}{4QB}$$

Alternativa D.

Questão 30



A figura mostra uma luneta, com foco ajustável, que possui em sua extremidade uma lente plano-convexa de raio de curvatura R. O índice de refração da lente varia com o comprimento de onda λ da luz incidente de acordo com a expressão:

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

A distância do plano da lente até o fundo da luneta é $L + \Delta L$, com L de valor fixo e ΔL que pode ser ajustado, de forma a coincidir o ponto focal da lente sempre com o fundo, ou seja, onde se encontra o observador. A luneta deve possibilitar que se foquem as luzes de comprimento de onda no intervalo $0{,}4\mu m \le \lambda \le 0{,}7\mu m$.

Dados:
- raio de curvatura da superfície convexa da lente: $R = 7$ cm;
- constante A da expressão: $1{,}5$;
- constante B da expressão: $0{,}00784\ \mu m^2$;
- índice de refração à esquerda é à direita da lente: 1.

Observação:
- a lente é plana à esquerda e convexa à direita;

Sabendo que ΔL pode ser nulo, o seu maior valor possível é, em cm, aproximadamente:

(A) 0,35 (B) 0,70 (C) 1,40 (D) 3,50 (E) 7,00

Resolução:

De acordo com a equação de Halley ou dos fabricantes de lentes, $\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$

Mas $n_{lente} = A + \frac{B}{\lambda^2}, n_{meio} = 1,\ R_1 = \infty\ e\ R_2 = 7cm$

Além disso, se $\Delta L = 0,\ então\ f = L\ e\ \lambda = \lambda_{mín} = 0{,}4\mu m$

Daí, $\frac{1}{L} = \left(1{,}5 + \frac{784.10^{-5}(\mu m)^2}{(0{,}4\mu m)^2} - 1\right)\frac{1}{7cm} = \left(0{,}5 + \frac{784.10^{-5}}{0{,}16}\right)\frac{1}{7cm} = (0{,}5 + 0{,}049)\frac{1}{7cm} = \frac{0{,}549}{7cm}$

Logo, $L = \frac{7}{0{,}549}cm$ (I)

Por outro lado, se $\Delta L = \Delta L_{máx}$, então $f = L + \Delta L_{máx}$ e $\lambda =_{máx} = 0{,}7\mu m$

Então, $\dfrac{1}{L+\Delta L_{máx}}=\left(1,5+\dfrac{784.10^{-5}(\mu m)^2}{(0,7\mu m)^2}-1\right)\dfrac{1}{7cm}=\left(0,5+\dfrac{784.10^{-5}}{0,49}\right)\dfrac{1}{7cm}=(0,5+0,016)\dfrac{1}{7cm}=\dfrac{0,516}{7cm}$

Portanto, $L+\Delta L_{máx}=\dfrac{7}{0,516}cm$ (II)

Fazendo (II)-(I), $\Delta L_{máx}=\left(\dfrac{7}{0,516}-\dfrac{7}{0,549}\right)cm=7\left(\dfrac{0,549-0,516}{0,549.0,516}\right)cm=7\left(\dfrac{0,033}{0,283284}\right)cm=0,815436\ cm$

Sem Alternativa

QUÍMICA

Questão 31

Em uma célula voltaica a energia de Gibbs padrão de reação é determinada pela expressão:
$\Delta G_r^o=-nFE_{cel}^o$
Em que n é um número adimensional que representa a quantidade de mols de elétrons transferidos nas semirreações de oxidação e de redução combinadas, F é constante de Faraday e E_{cel}^o é o potencial padrão da célula.
Considere F = 96500 C/mol e os potenciais padrão de redução do ferro e do alumínio, a 298 L, indicados abaixo.

$Fe^{2+}(aq)+2e^- \rightarrow Fe(s)$	$E^o=-0,44$ V
$Al^{3+}(aq)+3e^- \rightarrow Al(s)$	$E^o=-0,44$ V

Para uma célula voltaica formada pelo contato de dois metais quando uma peça de ferro é fixada com parafusos de alumínio , a 298 K, avalie as asserções a seguir.

I. O valor numérico de n é 5.
II. Com o passar do tempo, a peça fixada irá cair devido à corrosão do ferro.
III. Com o passar do tempo, a peça fixada irá cair devido à corrosão do alumínio
IV. A energia de Gibbs padrão de reação da célula é igual a -706 kJ/mol.
V. Na célula voltaica formada, a oxidação do ferro é um processo espontâneo.

Assinale a opção que apresenta APENAS as afirmativas verdadeiras.

a) I, II e V
b) I e III
c) II e III.
d) III e IV.
e) II, IV e V

Resolução:
Na célula Galvânica o maior potencial padrão de redução reduz. Logo:

$\times 2 \quad Al(s)\rightarrow Al^{3+}+3e^- \qquad E^o\text{oxi}=+1,66\text{ V}$

$\times 3 \quad Fe^{2+}+2e^-\rightarrow Fe(s) \qquad E^o\text{red}=-0,44\text{ V}$

$2Al(s)\rightarrow 2Al^{3+}+6e^- \qquad E^o\text{oxi}=+1,66\text{ V}$

$3Fe^{3+}+6e^-\rightarrow 3Fe^o \qquad E^o\text{red}=-0,44\text{ V}$

$2Al(s)+3Fe^{2+}(aq)\rightarrow 2Al^{3+}(aq)+3Fe(s) \qquad \Delta E^o=+1,22\text{ V}$

$\Delta G^o=-6\cdot 965000\cdot(+1,22\text{ V})$

$\Delta G^o=-706,38\text{ KJ/mol}$

I. F
II. F
III. V
IV. V
V. F

Alternativa D.

Questão 32

Uma mistura gasosa ideal de 4,0 kg de oxigênio e 1,3 kg de acetileno está contida em um vaso fechado de volume invariável, a 200 ºC e 300 kPa. Essa mistura entra em combustão e reage completamente, produzindo CO_2 e H_2O. Depois, deixa-se o meio resfriar por um certo tempo, de forma que os produtos continuam gasosos, e a pressão final medida é de 600 kPa.

É correto afirmar que:

a) a massa especifica do meio reacional aumenta e a pressão parcial final do CO_2 .é de 400 kPa.
b) a massa especifica do meio reacional diminui e sua temperatura final é de 946 K.
c) a massa especifica do meio reacional permanece constante e a pressão parcial final do vapor de água é de 200 kPa
d) a massa especifica do meio reacional aumenta e sua temperatura final é de 946 K.
e) a massa especifica do meio reacional permanece constante e sua temperatura final é igual à temperatura inicial.

Resolução:

$$n_{O_2} = \frac{400}{32} = 125 mols; \quad n_{C_2H_2} = \frac{1300}{26} = 50 mols$$

$$C_2H_2(g) \; + \; \frac{5}{2}O_2(g) \; \rightarrow \; 2CO_2(g) \; + \; 1H_2O(v)$$

	$C_2H_2(g)$	$\frac{5}{2}O_2(g)$	$2CO_2(g)$	$1H_2O(v)$
i)	50 mol	125 mols	0	0
f)	0	0	100 mols	50 mols

$$\underbrace{100 \text{ mols} \quad 50 \text{ mols}}_{N_{final}=150 \text{ mols}}$$

Cálculo da fração molar da água:

$$X_{H_2O} = \frac{N_{H_2O}}{N_{\text{total}}} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$$

Cálculo da pressão da água:

$$P_{H_2O} = P_{\text{total}} \cdot X_{H_2O} = 600\ kPa \cdot \tfrac{1}{3} = 200\ kPa$$

Nota: Como o sistema é fechado com volume constante, a massa inicial é igual a massa final, logo, a massa especifica não muda.

Alternativa C.

Questão 33

Catalisadores são substâncias de grande interesse industrial para processos químicos e biotecnológicos, pois permitem a obtenção de produtos-alvo com maior rapidez. Analise as afirmativas abaixo.

I. Na reação $2SO_2(g) + O_2(g) \xrightarrow{V_2O_5(s)} 2SO_3(g)$ o pentóxido de vanádio tem efeito de superfície, exemplificado em catálise heterogênea.
II. Dada a sua característica basicamente proteica e sua menor estabilidade em relação aos catalisadores químicos tradicionais, as enzimas são totalmente inativadas durante processos bioquímicos, independentemente das condições operacionais implementadas.
III. Os catalisadores reduzem a energia de ativação, resultando em aumento da velocidade de reação, sendo regenerados ao final da conversão química.
IV. A ação do catalisador cria um novo caminho reacional que requer menor energia de ativação. Alterando o equilíbrio da reação.
V. Todos os catalisadores conhecidos são compostos inorgânicos, geralmente constituídos por metais de transição.

Assinale a opção que apresenta APENAS as afirmativas verdadeiras.

a) III e V.
b) I, III e IV.
c) II, IV e V.
d) I e III.
e) I, II, IV e V.

Resolução:

I. Correto. Como o catalisador está no estado sólido e os reagentes no estado gasoso (catálise heterogênea), o aumento da superfície de contato do catalisador influencia na velocidade da reação.

II. Incorreto. As enzimas possuem atividade catalítica a depender das condições de temperatura e pH muito bem ativas.

III. Correto. É a correta descrição da ação de um catalisador.

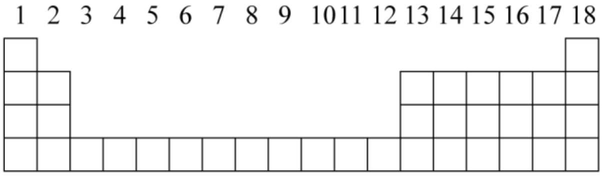
IV. Incorreto. O catalisador não altera o equilíbrio da reação, uma vez que aumenta as velocidades direta e inversa proporcionalmente.

V. Incorreto. Há catalisadores orgânicos também, como as enzimas.

Alternativa D.

Questão 34

Considere o arcabouço parcial da Tabela Periódica representado abaixo.



Seja um sal tal que:

I. seu ânion monoatômico apresenta a mesma distribuição eletrônica do gás nobre do 3ºo período;

II. seu produto de solubilidade (k_{PS}), quantificado em função da sua solubilidade molar (S), é dado por: $K_{PS} = S \cdot (2S)^2$;

III. o hidróxido de seu cátion monoatômico é uma base fraca; e

IV. seu cátion é oriundo de um metal com alta densidade.

O sal que melhor satisfaz essas características é:

a) CaF_2

b) $CaCl_2$

c) $AgCl$

d) MgF_2

e) $PbCl_2$

Resolução:

Da informação I, temos que o elemento formador do ânion é do 3 período.

Da informação II temos que o sal possui ou um cátion bivalente ou um ânion bivalente.

$$CA_2 \leftrightarrow C^{2+} + 2\,A^{-} \qquad K_{PS} = \left[C^{2+}\right].\left[A^{-}\right]^2 = S.(2S)^2$$

$$C_2A \leftrightarrow 2C^{+} + A^{2-} \qquad K_{PS} = \left[C^{+}\right].\left[A^{2-}\right]^2 = (2S)^2.S$$

Da informação III, o cátion não pode ser do grupo I ou II. Exceto *Be* e *Mg*.

Analisando as alternativas temos:

a) Incorreta, *Ca* forma base forte (contraria III) e *F* é do 2º período (contraria I).

b) Incorreta, *Ca* forma base forte (contraria III).

c) Incorreta, há apenas cátion e ânion monovalentes (contraria II).

d) Incorreta, *F* é do 2º período (contraria I).

e) Correta. *Pb* possui alta densidade é bivalente, forma uma base fraca e *Cl* está no 3º período.

Alternativa E.

Questão 35

Assinale a opção correta.

a) Os ácidos nucleicos são macromoléculas poliméricas, cujas unidades monoméricas são conhecidas como nucleosideos.

b) Os nucleosídeos são constituídos por uma base nitrogenada purínica ou pirimidínica, uma pentose e um íon fosfato.

c) A adenina e a guanina são bases nitrogenadas pirimidínicas, enquanto que a citosina, a timina e a uracila são bases nitrogenadas purínicas.

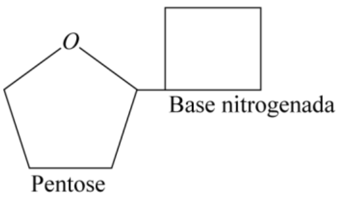
d) O DNA possui uma estrutura de dupla hélice, na qual os monômeros se conectam entre si por ligações peptídicas.

e) Os três principais tipos de RNA envolvidos na síntese de proteínas em organismos biológicos são o mensageiro, o transportador e o ribossômico.

Resolução:

a) Ácidos nucléicos são formados por unidades monoméricas nucleotídeos.

b) Nucleosideos



c) Adenina e guanina são biciclos = bases purínicas.
Citosina, Uracila e timina são monociclos = bases pirimídicas

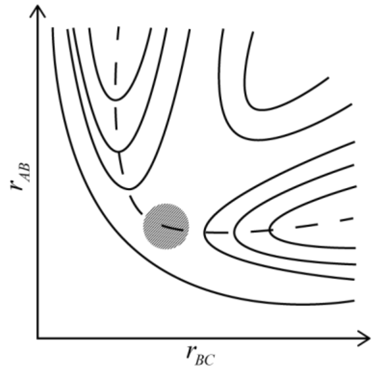
d) DNA $\Rightarrow$ Dupla Hélice ligação de hidrogênio
$\Rightarrow$ Unidades repetidas = lig. Fosfodiéster

e) Correta

Alternativa E.

Questão 36

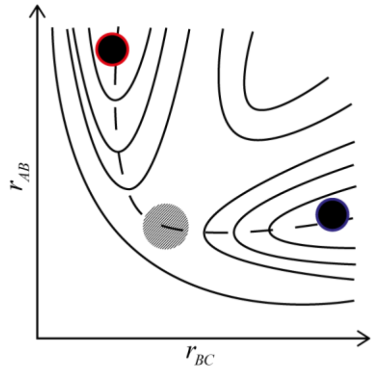
O mapa de contorno da figura abaixo é uma representação bidimensional de uma superfície de energia potencial para a reação $A + BC \rightarrow AB + C$ em função das distâncias r_{AB} e r_{BC} entre os átomos *A* e *B* e entre *B* e *C*, respectivamente. Nesse gráfico, cada uma das linhas cheias indica valores constantes dessa energia e a linha tracejada representa a trajetória da reação.



Qual das seguintes opções corresponde à identificação correta da região hachurada para a reação indicada?

a) Os reagentes *A* e *BC*.
b) Os produtos *AB* e *C*.
c) O complexo ativado *ABC*.
d) Os átomos separados *A*, *B* e *C*.
e) Os íons separados A^+, B^+ e C^+

Resolução:



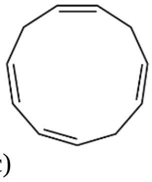
Na região circulada em azul, a distância entre *A* e *B* é quase mínima e a distância entre *B* e *C* é máxima, o que indica que é a situação dos reagentes. Já a região circulada em vermelho, a distância entre *A* e *B* é quase máxima e a distância entre *B* e *C* é mínima, o que indica que é a situação dos produtos. Na região hachurada, há a mínima distância para *A*,*B* e *C*, indicando que estão juntos, ou seja, o complexo ativado *ABC*.

Alternativa C.

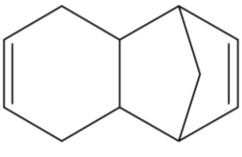
Questão 37

Identifique a fórmula estrutural do principal produto da reação entre o cicloexa-1,4-dieno e o ciclo-pentadieno, ocorrida mediante aquecimento.

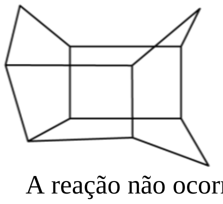
a)



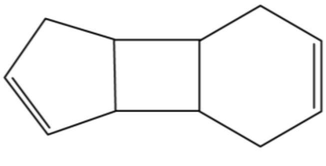
b)



c)



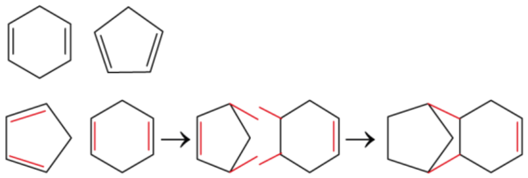
d)

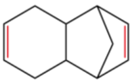


e) A reação não ocorre.

Resolução:

Cicloadição

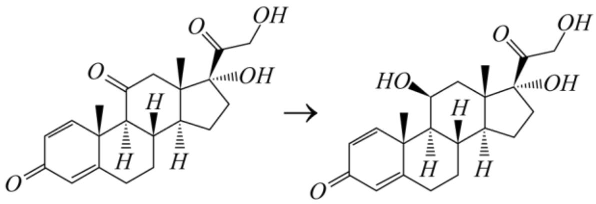


ou 

Alternativa B.

Questão 38

A prednisona é um pró-fármaco que é convertido, pelo fígado, no metabólito ativo prednisolona, o qual possui potente ação anti-inflamatória. Suas estruturas são mostradas abaixo:



Prednisona Prednisolona

Considerando as estruturas acima, são feitas as afirmações abaixo.

I. A prednisona sofre redução para se transformar em prednisolona.
II. Ambas as moléculas têm o mesmo número de carbonos quirais.
III. Os grupos cetona, álcool e éster são funções orgânicas presentes em ambas as moléculas.

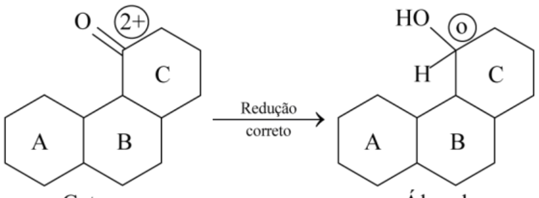
Assinale a opção que apresenta APENAS a(s) afirmativa(s) verdadeira(s)

a) I.
b) I e II.
c) I e III.
d) II e III.
e) I, II e III

Resolução:

Prednisona $\rightarrow$ Prednisolona

I.



Cetona Álcool

II. $\left.\begin{array}{l}\text{Prednisona} = 6\ C_{quirais} \\ \text{Prednisolona} = 7\ C_{quirais}\end{array}\right\} Falso$

III. Não há éster (falso)

Alternativa A.

Questão 39

Considere a teoria dos gases ideais e a equação dos gases de van der Walls dada abaixo.

$$P = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

Assinale a opção correta.

a) Independentemente da temperatura e do volume, um gás terá comportamento mais próximo do ideal quanto maior for sua pressão.
b) Na equação dos gases de van der Waals, os parâmetros *a* e *b* dependem somente da temperatura.
c) No estado gasoso, as interações intermoleculares são inexistentes, independentemente das condições em que o gás se encontra.
d) O parâmetro *a* é negativo porque entre as moléculas de um gás predominam as forças atrativas.
e) Espera-se que o parâmetro *b* da equação dos gases de van der Waals seja menor para o metano do que para o propano

---

Resolução:

Na equação de van der Waals, os termos a e b correspondem a:

a – termo de atração (forças intermoleculares)

b – termo de repulsão (forma e volume das moléculas)

Assim, vamos analisar cada item:

a) Incorreto, para se aproximar aos gases ideias, a equação deve se aproximar a:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

Ou seja, o fator $\left(a n^2\right)/V^2$ deve ser zerado, ou seja, a concentração molar do gás (n/V) deve ser pequena. Indicando um volume grande para tanto.

b) Incorreto, os parâmetros a e b dependem do gás em questão (molécula ou íon).

c) Incorreto, isso só é válido quando se aproxima das condições de gás ideal.

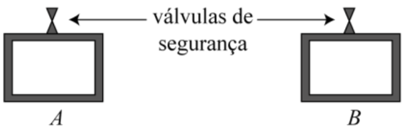
d) Incorreto, o parâmetro a é positivo, pois a atração entre as moléculas ou íons gera uma redução na pressão. Caso a fosse negativo o termo $\left(a n^2\right)/V^2$ seria negativo aumentando a pressão medida.

e) Correto, Como o metano (CH_4) é menor que o propano (C_3H_8) o termo relacionado ao volume da molécula (b) é menor.

Alternativa E.

Questão 40

Dois reatores *A* e *B*, com volumes invariáveis de 20 litros cada um, são aquecidos até atingir a temperatura de 819 ºC. Cada um dos reatores possui uma válvula de segurança: a do reator *A* se abre automaticamente quando são produzidas em seu interior pressões iguais ou superiores a 1,5 atm, enquanto que a do reator *B* se abre automaticamente quando são produzidas em seu interior pressões iguais ou superiores a 3,5 atm.



No reator A foi armazenada hidrazina Líquida $\left(N_2H_4\right)$, que se decompôs inteiramente em 0,163 mol de gás hidrogênio e 0,082 mol de gás nitrogênio a 819 ºC.

No reator B encontram-se em equilíbrio, amônia, $1{,}03 \times 10^{-2}$ mol/L de N_2 e $1{,}62 \times 10^{-2}$mol/L de H_2, a 819 ºC, com um valor de K_p (constante de equilíbrio em termos de pressão parcial) igual a 0,25.

Dados:

- massas atômicas: $H = 1$ u; $N = 14$ u;
- $R = 0{,}082$ atm.L(mol.K); e
- os gases se comportam idealmente.

Se aumentamos em 10 ºC a temperatura do reator *A*, podemos afirmar que:

a) a válvula do reator A se abre e a do reator B permanece aberta.
b) a válvula do reator A se abre e a do reator B permanece fechada.

c) a válvula do reator A permanece fechada e a do reator B permanece aberta.
d) as válvulas de ambos os reatores permanecem fechadas.
e) as válvulas de ambos os reatores permanecem abertas.

Resolução:
Reator A:
Se aumentarmos em 10°C a temperatura do reator, então teremos 829 °C (829 + 273 = 1102 K)
Admitindo, inicialmente, que não será formada amônio nesse reator, temos:

$N_{gás} = N_{H2} + N_{N2} = 0,163 + 0,082 = 0,245 \text{ mols}$

Aplicando a equação de Clapeyron:

$P \cdot V = N \cdot R \cdot T$

$P \cdot 20 = 0,245 \cdot 0,082 \cdot 1102$

$P = 1,107 \text{ atm} < 1,5 \text{ atm}$

Como na formação de amônia há um consumo gasoso

$3H_{2\,(g)} + N_{2\,(g)} \rightarrow 2NH_{3\,(g)}\ \Delta n = -2 \text{ mols}$

A pressão iria diminuir, ou seja, a válvula não iria abrir.
Reator B:
A temperatura em Kelvin é igual a 819 + 273 = 1092 K
Calculando as pressões parciais de H_2 e N_2

$P = (N \cdot R \cdot T)\ /\ \text{V}$

$P(H_2) = 1,62 \cdot 10^{-2} \cdot 0,82 \cdot 1092 = 1,45 \text{ atm}$

$P(N_2) = 1,03 \cdot 10^{-2} \cdot 0,82 \cdot 1092 = 0,92 \text{ atm}$

Para calcular a pressão parcial de amônia vamos considerar o equilíbrio:

$3H_{2\,(g)} + N_{2\,(g)} \leftrightarrow 2NH_{3\,(g)}$

$K_P = \left[P(NH_3)\right]^2 / \left\{P(N_2)\ .\ \left[P(H_2)\right]^3\right\}$

$\left[P(NH_3)\right]^2 = K_P \cdot P(N_2) \cdot \left[P(H_2)\right]^3 = 0,25 \cdot 0,92 \cdot 1,45^3$

$P(NH_3) = (0,25)^{0,5} \cdot \left(0,92 \cdot 1,45^3\right)^{0,5} = 0,5 \cdot 1,45 \cdot (1,334)^{0.5}$

$P(NH_3) = 0,5 \cdot 1,45 \cdot 1,155 = 0,84 \text{ atm}$

Então a pressão total seria:

$P = 0,84 + 0,92 + 1,45 = 3,21 \text{ atm} < 3,5 \text{ atm}$

Assim, nenhuma das válvulas se abrirá.

Alternativa D.

Matemática
Mateus Bezerra
Kellem Corrêa

Física
Anderson Marques
João Paulo Botelho
Paulo Wang

Química
Heitor Cruz
Welson Felipe

Colaboradores
Alexandre Manso

Digitação e Diagramação
Alex de Faria
Igor Soares
Isabella Maciel
Moisés Nascimento
Pollyanna Chagas

Ilustração
Alex de Faria
Jessica Loumine
Isabella Maciel
Moisés Nascimento

Supervisão Editorial
Aline Alkmin
Anderson Marques

Copyright©Olimpo2022

A Resolução Comentada das provas do IME poderá ser obtida diretamente no site do ***GRUPO OLIMPO****.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus EDITORA   olimpo