2022 IME

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

2ª FASE
MATEMÁTICA

Questão 01

Seis irmãos conversavam quando um deles, Matias, enunciou: a soma das idades de todos nós é cinco vezes a minha idade atual e sou seis anos mais novo que Sófocles. Quando Sófocles tiver três vezes a minha idade atual, constataremos que:

- a soma da minha idade com a de Dâmocles será igual à soma da idade atual dos irmãos de César;
- a idade de Erastóstenes será três vezes a idade dele atual; e
- a idade do Lutero será duas vezes a idade atual do Sófocles, mais um ano.

Diante do exposto, qual é a soma das idades atuais de Sófocles e Matias?

Resolução:
Considere como momento presente o momento atual e o momento futuro como o momento em que Sófocles terá três vezes a idade atual de Matias. Sendo $\boldsymbol{x}$ anos a idade de Matias no presente e a considerar que Matias é seis anos mais novo que Sófocles, a idade de Sófocles no presente é $x+6$. Tendo em conta que, no futuro, a idade de Sófocles será três vezes a idade de Matias no presente, o intervalo de tempo, em anos, que se passa do momento presente para o momento futuro é $3x-(x+6)=2x-6$. Sendo $\boldsymbol{y}$ a idade de Erastóstenes no presente e, contando que sua idade no futuro será três vezes a idade no presente, tem-se $y+2x-6=3y$, o que quer dizer que $y=x-3$. Disso, a idade de Erastóstenes no presente é $x-3$ e, no futuro, é $3x-9$. Já que, no futuro, a idade de Lutero será duas vezes a idade atual de Sófocles mais um ano, a idade de Lutero será $2\cdot(x+6)+1=2x+13$, o que quer dizer que sua idade no presente é $2x+13-(2x-6)=19$ anos. Sendo $\boldsymbol{z}$ a idade de Dâmocles e considerando que, no futuro, a soma da idade de Matias com a de Dâmocles será igual à soma da idade de todos os irmãos de César no presente, tem-se $x-3+x+x+6+z+19=3x-6+z+2x-6$, o que implica $x=17$. Assim, a idade de Matias no presente é 17 anos, a idade de Sófocles no presente é 23 anos e a soma das idades atuais dos dois é 40 anos.

Questão 02

Suponha que a e b são raízes reais e diferentes da equação $4x^2-4tx-1=0\left(t\in\mathbb{R}\right)$. O intervalo $\left[a,b\right]$ é o domínio da função $f\left(x\right)=\dfrac{2x-t}{x^2+1}$. Seja $g\left(t\right)=\max\ f\left(x\right)-\min\ f\left(x\right)$. Determine $g\left(0\right)$.

Resolução:

$g\left(t\right)=\max f\left(x\right)-\min f\left(x\right)$.

Para $t=0$, temos que a equação $4x^2-4tx-1=0$ se reduz a $4x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Portanto, $a=-\dfrac{1}{2}$ e $b=\dfrac{1}{2}$, de modo que $Dom\left(f\right)=\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

Para $t=0$, $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

Abaixo, vamos mostrar que *f* é estritamente crescente em seu domínio $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$.

$$f'(x)=\frac{2\left(x^2+1\right)-2x\left(2x\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}>0\text{, pois } x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\Rightarrow x^2\le\frac{1}{4}\Rightarrow 1-x^2>0\,.$$

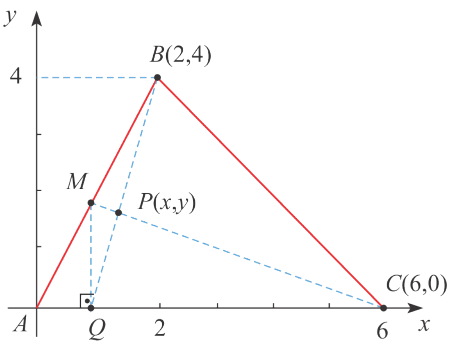
Logo, $\max f\left(x\right)=f\left(b\right)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1}=\dfrac{4}{5}$ e $\min f\left(x\right)=f\left(a\right)=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{4}{5}$.

Então, $\boxed{g\left(0\right)=\dfrac{4}{5}-\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{8}{5}}$.

Questão 03

Em um triângulo de vértices *A(0,0)*, *B(2,4)* e *C(6,0)*, toma-se um ponto variável *M* sobre o lado *AB*. Desse ponto, traça-se a perpendicular ao lado *AC* que intercepta em *Q*.
Identifique o lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção das retas *BQ e CM* e escreva a sua equação.

Resolução:



Como $M \in \overline{AB} \Rightarrow M(a,2a)$

Então, $Q(a,0)$

Dessa forma, temos as retas abaixo.

- Reta BQ: $m = \dfrac{4-0}{2-a} = \dfrac{4}{2-a}$

  $y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = \dfrac{4}{2-a}(x-a) \Rightarrow y = \dfrac{4(x-a)}{2-a}$

  $\Rightarrow 2y - ay = 4x - 4a \to (4-y)a = 4x - 2y$

  $\to a = \dfrac{4x-2y}{4-y} \qquad (I)$

- Reta CM: $m = \dfrac{2a-0}{a-6} = \dfrac{2a}{a-6}$

  $y - y_0 = m(x - x_0) \to y - 0 = \dfrac{2a}{a-6}(x-6) \to y = \dfrac{2a(x-6)}{a-6} \to ay - 6y = 2ax - 12a \to (2x - y - 12)a = -6y$

  $\to a = \dfrac{-6y}{2x-y-12} \qquad (II)$

Como temos o mesmo parâmetro a em I e II, segue:

$\dfrac{4x-2y}{4-y} = \dfrac{-6y}{2x-y-12} \Rightarrow 6y^2 - 24y = 8x^2 - 4xy - 48x - 4xy + 2y^2 + 24y \Rightarrow$

$8x^2 - 8xy - 4y^2 - 48x + 48y = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - 2xy - y^2 - 12x + 12y = 0$

Temos uma equação geral do 2º grau e devemos avaliar se é uma cônica degenerada. Isolando a equação em x^2:

$2x^2 - (2y+12)x + 12y - y^2 = 0$

$\Delta = 4y^2 + 48y + 144 - 96y + 8y^2 = 12y^2 - 48y + 144 = 12(y^2 - 4y + 12)$

Temos que esse Δ é sempre maior que zero, pois $y^2 - 4y + 12 > 0$ (seu $\Delta < 0$ e concavidade para cima), e não é um quadrado perfeito.
Logo não é uma cônica degenerada.
Portanto, usando a Equação Geral do 2º Grau $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, podemos usar o $\Delta_{cônica} = B^2 - 4AC$.
Sendo a equação $2x^2 - 2xy - y^2 - 12x + 12y = 0$, temos $A = 2$, $B = -2$ e $C = -1$.
Logo $\Delta_{cônica} = 4 - 4(2)(-1) = 12 > 0 \;\Rightarrow$ É um arco de hipérbole

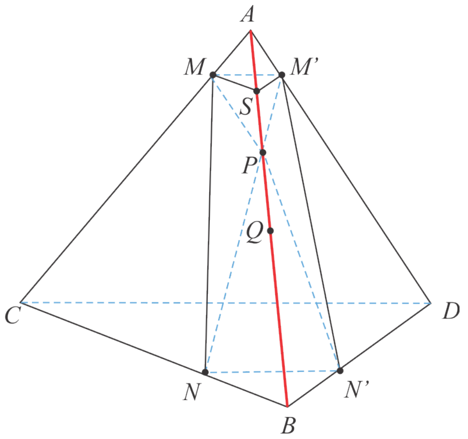
Resposta: Arco de hipérbole $(0 \le x \le 2)$, cuja equação é $2x^2 - 2xy - y^2 - 12x + 12y = 0$.

Questão 04

Seja um tetraedro regular $ABCD$ de aresta α e o ponto Q médio de AB. O ponto P sobre a aresta AB, entre Q e A, é projetado nas arestas AC e AD, sobre os pontos M e M', respectivamente, e também nas arestas BC e BD, sobre os pontos N e N', respectivamente. O plano $MM'NN'$ divide o tetraedro em dois volumes com razão de 1 para 4. Determine QP em função de α.

Resolução:

Considere a figura.



Com $QP = x$, $AP = \frac{a}{2} - x$ e $BP = \frac{a}{2} + x$. Com $AP = \frac{a}{2} - x$ e $P\hat{A}M' = 60°$, obtém-se $AM' = \frac{a}{4} - \frac{x}{2}$. Com $BP = \frac{a}{2} + x$ e $P\hat{B}N' = 60°$, obtém-se $BN' = \frac{a}{4} + \frac{x}{2}$. De modo análogo, obtém-se $AM = \frac{a}{4} - \frac{x}{2}$ e $BN = \frac{a}{4} + \frac{x}{2}$. O $\Delta AMM'$ é equilátero de lados medindo $\frac{a}{4} - \frac{x}{2}$, assim como o $\Delta BNN'$ é equilátero de lados medindo $\frac{a}{4} + \frac{x}{2}$. Sendo S, em AB, o ponto tal que MS e SM' são paralelos, respectivamente, a CB e BD, o $\Delta MSM'$ é equilátero com lados medindo $\frac{a}{4} - \frac{x}{2}$, o que implica o tetraedro regular $AMSM'$. O menor sólido definido pelo plano $MM'NN'$ é a união do tetraedro regular $AMSM'$ com o tronco de pirâmide $NBN'MSM'$. O volume do tetraedro é $\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)^3 \sqrt{2}$. A altura do tronco de pirâmide é $\frac{\sqrt{6}}{3}$a $-\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)$ ou, ainda, $\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{3a}{4} + \frac{x}{2}\right)$. Com isso, o volume do tronco de pirâmide é igual a $\frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{3a}{4} + \frac{x}{2}\right)\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{4} + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{4} + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)\right]$ ou, ainda, $\frac{\sqrt{2}}{768}(3a + 2x)(3a^2 + 4x^2)$. Sendo $\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)^3 \sqrt{2}$ o volume do tetraedro $AMSM'$ e $\frac{\sqrt{2}}{768}(3a + 2x)(3a^2 + 4x^2)$ o volume do tronco de pirâmide, considerando que o menor sólido definido pelo plano $MM'NN'$ tem volume igual a $\frac{1}{5}$ do volume do tetraedro $ABCD$, obtém-se $\frac{1}{12} \cdot \left(\frac{a}{4} - \frac{x}{2}\right)^3 \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{768}(3a + 2x)(3a^2 + 4x^2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, o que implica $x = \frac{\sqrt{105}}{30}a$.

Questão 05

Considere o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = ky \\ (1-k)x - y + 4z = 0 \\ 2x + y - kz = z \end{cases}$$

Determine o menor valor da constante real k que torna o sistema indeterminado. Para esse valor de k, encontre a solução x, y, z do sistema acima que minimiza o valor de $(x - z)^2 + e^{x+y} - 4|x| - 2y$.

Resolução:

O sistema é homogêneo e pode ser escrito como

$$\begin{cases} 3x+2(2-k)y-z=0 \\ (1-k)x-y+4z=0 \\ 2x+y+(-1-k)z=0 \end{cases}$$

Para regra de Cramer, o sistema é SPI se, e só se,

$$\begin{vmatrix} 3 & (2-k) & -1 \\ (1-k) & -1 & 4 \\ 2 & 1 & (-1-k) \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(1+k)+(k-1)+8(2-k)=2+12+(2-k)(1-k)(1-k)(-1-k)$$

$$\Leftrightarrow -4k+18=14+(2-k)(k^2-1)=-k^3+2k^2+k+12$$

$$\Leftrightarrow k^3-2k^2-5k+6=0 \quad (*)$$

Por inspeção, 1 é raiz da equação $(*)$.

Fazendo Briot-Ruffini, temos

	1	−2	−5	6
1	1	−1	−6	0

$\rightarrow k^2-k-6=0$

$$k^2-k-6=0$$

$$\Delta=1+24=25$$

$$k=\frac{1\pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

Logo, os valores de *k* que tornam o sistema SPI são *-2*, *1* e *3*. Portanto, o menor valor é *-2*. Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 3x+4y-z=0 \\ 3x-y+4z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y-5z=0 \\ 5x+5z=0 \end{cases}$$

Logo, $V=\{(-z,z,z),\ z\in\mathbb{R}\}$

Agora, vamos substituir na equação a ser minimizada.

$$(x-z)^2+e^{x+y}-4|x|-2y=(-2z)^2+e^{-z+z}-4|-z|-2z$$

$$=4z^2+1-4|z|-2z=4z^2-2z+1-4|z|$$

$(i)\ z>0$

Vamos buscar minimizar $4z^2-6z+1$

$$x_v=\frac{6}{8}=\frac{3}{4};\ y_v=-\frac{5}{4}.$$

Logo, com $z>0$, o mínimo é atingido em $z=\frac{3}{4}$ e vale $-\frac{5}{4}$.

$(ii)\ z\le 0$

Vamos buscar minimizar $4z^2+2z+1$. Neste caso, $x_v=-\frac{1}{4}$ e $y_v=\frac{3}{4}$. Então, com $z\le 0$, o valor mínimo é $\frac{3}{4}$.

Portanto, o valor de *z* que minimiza a expressão pedida é, pelo caso (i), $\frac{3}{4}$, gerando a solução $\left(-\frac{3}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$ do sistema.

Questão 06

Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ que corresponde à solução da equação:

$$4^{\log_2 sen(x)}+\log_4 2^{\cos(2x)}+\frac{x}{\sqrt{4x^2}}=0.$$

Resolução:

Temos $4^{\log_2 sen(x)}+\log_4 2^{\cos(2x)}+\frac{x}{\sqrt{4x^2}}$

Condição de existência: $\begin{cases} x\ne 0 \\ sen(x)>0 \end{cases} \Rightarrow x\ne 0\ e\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Temos, portanto

$$4^{\log_2 sen(x)} + \log_4 2^{\cos(2x)} + \frac{x}{\sqrt{4x^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\log_2 (sen(x))^2} + \cos(2x)\cdot\log_4 2 + \frac{x}{2|x|} = 0 \Rightarrow sen^2 x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{x}{2|x|} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{sen^2} x + \frac{1}{2} - \cancel{sen^2} x + \frac{x}{2|x|} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{x}{2|x|} = 0 \Rightarrow x + |x| = 0$$

- Para $x > 0 \Rightarrow x + x = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$ (viola condição de existência).
- Para $x < 0 \Rightarrow x - x = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Todo $x < 0$ satisfaz.

Dessa forma, com base nas Condições de Existência e nas soluções acima, conclui-se que o subconjunto de $\mathbb{R}$ solução da equação é $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}_-^*\}$.

Questão 07

Sejam os pontos *a* e *b*, no plano complexo, representados pelos números $a = 9 + xi$ e $b = y + 3i$, onde *i* é a unidade imaginária tal que $i^2 = -1$. O ponto *a* é a rotação de 30° do ponto *b* em torno da origem no sentido anti-horário. Determine o valor do produto *xy*.

Resolução:

Considerando que *a* e *b* são pontos no plano complexo tais que $a = 9 + xi$ e $b = y + 3i$, com $i^2 = -1$, é certo que $x, y \in \mathbb{R}$. Já que a é a rotação de 30^o do ponto b no sentido anti-horário em torno da origem, tem-se que $a = b \cdot cis30^o$ ou, ainda, $9 + xi = (y + 3i)\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$. Disso, $9 = \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{3}{2}$ e $\frac{y}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = x$, o que implica $y = 7\sqrt{3}$ e $x = 5\sqrt{3}$. Assim, $xy = 105$.

Questão 08

Em uma sala com 11 estudantes, um professor decidiu aplicar um trabalho dividindo aleatoriamente a turma em três grupos de 3 estudantes e um grupo de 2 estudantes. Sabendo que na turma há um casal, qual é a probabilidade de que o mesmo faça o trabalho junto?

Resolução:

O total de possibilidades é:

- Escolhe o grupo de 2 estudantes: $\binom{11}{2} = 55$
- Escolhe o 1º grupo de 3 estudantes: $\binom{9}{3} = 84$
- Escolhe o 2º grupo de 3 estudantes: $\binom{6}{3} = 20$
- Escolhe o 3º grupo de 3 estudantes: $\binom{3}{3} = 1$

Como não importa a ordem entre os 3 últimos grupos, dividimos por 3!

$$\frac{55\cdot 84\cdot 20\cdot 1}{3!} = 55\cdot 14\cdot 20$$

O número de casos favoráveis, em que o casal esteja junto, é a soma dos seguintes casos:

(I) Casal no grupo de 2 estudantes.

Vamos distribuir os 9 estudantes em 3 grupos de 3, lembrando que não há ordem entre eles

$$\frac{\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}}{3!} = \frac{84\cdot 20\cdot 1}{6} = 14\cdot 20$$

(II) Casal num grupo de 3 estudantes.

Vamos escolher o terceiro integrante do grupo do casal de $\binom{9}{1} = 9$ formas. Então, distribuímos os 8 estudantes restantes em um grupo de 2 e dois de 3, lembrando que não há ordem entre esses últimos.

$$\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\binom{3}{3}}{2!} = \frac{28\cdot 20\cdot 1}{2} = 14\cdot 20$$

Logo, este caso (II) tem $9\cdot 14\cdot 20$ formas.

Assim, o número de casos favoráveis é $14\cdot 20 + 9\cdot 14\cdot 20 = 10\cdot 14\cdot 20$

E a probabilidade fica:

$$p = \frac{10\cdot 14\cdot 20}{55\cdot 14\cdot 20} = \frac{10}{55} = \boxed{\frac{2}{11}} \text{ ou, aproximadamente, } \boxed{18{,}18\%}.$$

Questão 09

Sabendo-se que $\dfrac{sen^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$ com $a\neq b$, $b\neq 0$ e $a+b\neq 0$, determine $\dfrac{sen^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}$ em função de a e b somente.

Resolução:

$\dfrac{sen^4\alpha}{a}+\dfrac{\cos^4\alpha}{b}=\dfrac{1}{a+b}$, queremos calcular $\dfrac{sen^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}$, $a\neq 0,\ b\neq 0,\ a+b\neq 0$

$$\frac{sen^4\alpha}{a}+\frac{\cos^4\alpha}{b}=\frac{1}{a+b}\Rightarrow b(a+b)sen^4\alpha+a(a+b)\cos^4\alpha=ab\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(a+b)sen^4\alpha+a(a+b)(1-sen^2\alpha)^2-ab=0\Rightarrow b(a+b)sen^4\alpha+a(a+b)(1-2sen^2\alpha+sen^4\alpha)-ab=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(a+b)sen^4\alpha+a^2+\cancel{ab}-2a(a+b)sen^2\alpha+a(a+b)sen^4\alpha-\cancel{ab}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+b)^2sen^4\alpha-2a(a+b)sen^2\alpha+a^2=0\Rightarrow[(a+b)sen^2\alpha-a]^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen^2\alpha=\frac{a}{a+b}\Rightarrow \cos^2\alpha=1-sen^2\alpha=\frac{b}{a+b}\Rightarrow sen^8\alpha=\frac{a^4}{(a+b)^4}\ e\ \cos^8\alpha=\frac{b^4}{(a+b)^4}$$

Portanto, $\dfrac{sen^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{a}{(a+b)^4}+\dfrac{b}{(a+b)^4}=\dfrac{(a+b)}{(a+b)^4}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$

Resposta: $\dfrac{sen^8\alpha}{a^3}+\dfrac{\cos^8\alpha}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$

Questão 10

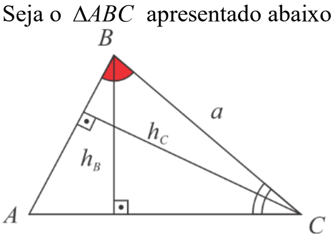
Seja um triângulo acutângulo ΔABC onde h_B e h_C são as alturas dos vértices B e C, respectivamente, e $\overline{BC}=a$. Sabendo-se que $\dfrac{h_Bh_C}{a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ e $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\dfrac{p}{q\sqrt{m}}$, calcule $p+q+m$.

<u>Dados</u>:

- *p, q* em são números naturais;
- *p* e *q* são primos entre si; e
- *m* é o menor possível.

Resolução:

Seja o ΔABC apresentado abaixo:



Temos os seguintes dados do enunciado

I. $\dfrac{h_Bh_C}{a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

II. $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}\cos\hat{C}=\dfrac{p}{q\sqrt{m}}$

Manipulando a 2ª equação, dado que $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ\Rightarrow\cos\hat{A}=-\cos(\hat{B}+\hat{C})$, temos:

$$\cos\hat{A}+\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}=\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}-\cos(\hat{B}+\hat{C})=\cancel{\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}-\cancel{\cos\hat{B}\cdot\cos\hat{C}}+sen\hat{B}\cdot sen\hat{C}=sen\hat{B}\cdot sen\hat{C}=\frac{p}{q\sqrt{m}}$$

Da figura, temos $\begin{cases} sen\hat{B}=\dfrac{h_C}{a} \\ sen\hat{C}=\dfrac{h_B}{a}\end{cases}\Rightarrow sen\hat{B}\cdot sen\hat{C}=\dfrac{h_B\cdot h_C}{a^2}$

Da equação I, temos $sen\hat{B}\cdot sen\hat{C}=\dfrac{h_B\cdot h_C}{a^2}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}=\dfrac{6}{4\sqrt{6}}=\dfrac{3}{2\sqrt{6}}=\dfrac{p}{q\sqrt{m}}$

Portanto, $p+q+m=3+2+6=11$.

Resposta: $p+q+m=11$

Professores de Matemática
Kellem Corrêa
Marcelo Salviano
Rodolfo Santos

Colaborador
Caíque Abraão

Digitação e Diagramação
Igor Soares
Pollyanna Chagas

Ilustração
Rodrigo Ramos

Revisão
Pedro Verdejo

Supervisão Editorial
Aline Alkmin

A Resolução Comentada das provas do IME
poderá ser obtida diretamente no site do ***GRUPO OLIMPO****.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo