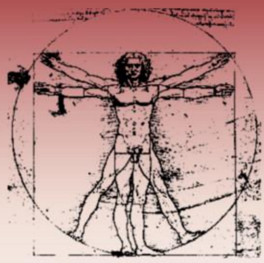
2022 IME



"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

MATEMÁTICA

Questão 01

Seja o sistema

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = 6x_4 - 1 \\ 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_4^2 = 6x_3 - 1 \\ 3x_1^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 6x_2 - 1 \\ 3x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 6x_1 - 1 \end{cases}$$

O valor de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ é:

a) 12

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{1}{3}$

e) 9

Resolução:

Para x_i complexo, encontraremos resultados não presentes nas alternativas, portanto, a recomendação seria a anulação do problema. Considerando, entretanto, x_1, x_2, x_3 e x_4 reais, o problema pode ser resolvido com uma única resposta final. Apresentaremos a solução nesse caso.

Subtraindo a segunda equação da primeira, temos:

$$3\left(x_3^2 - x_4^2\right) = 6\left(x_4 - x_3\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x_3 - x_4\right)\left(x_3 + x_4 + 2\right) = 0$$

Caso 1: Se $x_3 + x_4 + 2 = 0$, então $x_3 + x_4 = -2$. Dessa forma, efetuando a soma da primeira equação com a segunda, temos:

$$6x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = 6\underbrace{\left(x_3 + x_4\right)}_{-2} - 2$$

$$\Downarrow$$

$$6x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_4^2 = -14 \quad (\text{absurdo!})$$

Então é necessário ser o Caso 2.

Caso 2: $x_3 = x_4$.

Aplicando o raciocínio análogo, identificamos que a condição de igualdade deve ser válida em todos os pares de equações, ou seja, $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = k$. A partir de uma das equações, temos que:

$$9k^2 - 6k + 1 = 0 \rightarrow (3k - 1)^2 = 0 \rightarrow k = \frac{1}{3}.$$

O problema pede $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$, que é igual a $\frac{4}{k} = 12.$

Alternativa A.

Questão 02

Seja B o conjunto de todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a soma dos termos da progressão

$$-\frac{4}{3x}, \frac{16}{9x^2}, -\frac{64}{27x^3}, \frac{256}{81x^4}, \ldots$$

assume um valor finito. Define-se a função $f : B \to \mathbb{R}$ para cada $x \in B$, tal que

$$f(x) = -\frac{4}{3x} + \frac{16}{9x^2} - \frac{64}{27x^3} + \frac{256}{81x^4} - \ldots$$

A soma das raízes da equação $f(x) = -x, x \in B$, é:

a) 0
b) -2
c) -4/3
d) 2/3
e) 4/3

Resolução:

Com $x \neq 0$, a progressão $-\frac{4}{3x}, \frac{16}{9x^2}, -\frac{64}{27x^3}$, ... é uma progressão geométrica cuja razão é $-\frac{4}{3x}$. Para a soma assumir um valor finito, deve-se ter $-1 < -\frac{4}{3x} < 1$, o que implica $x < -\frac{4}{3}$ ou $x > \frac{4}{3}$. Com isso, $B = \left]-\infty, -\frac{4}{3}\right[\cup \left]\frac{4}{3}, +\infty\right[$. Sabe-se que $-\frac{4}{3x} + \frac{16}{9x^2} - \frac{64}{27x^3} + \ldots = \frac{-\frac{4}{3x}}{1 - \left(-\frac{4}{3x}\right)}$, ou ainda, $-\frac{4}{3x} + \frac{16}{9x^2} - \frac{64}{27x^3} + \ldots = -\frac{4}{3x+4}$, com $x \in B$. Disso, $f(x) = -\frac{4}{3x+4}$. Com $f(x) = -x$, obtém-se $-\frac{4}{3x+4} = -x$, ou ainda, $3x^2 + 4x - 4 = 0$, o que quer dizer que $x = -2$ ou $x = \frac{2}{3}$. Ocorre que $\frac{2}{3} \notin B$ e, por isso, apenas $x = -2$ é raiz da equação $f(x) = -x$. Assim, a soma das raízes é igual a -2.

Alternativa B.

Questão 03

Considere o conjunto de todas as retas que são secantes ao gráfico da função

$$f(x) = ln\left(\left|-\frac{7}{12} + x - x^2\right|^{(3x-1)}\right)$$

e que passam pelo ponto $\left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right)$.

O menor valor dentre os coeficientes angulares das retas desse conjunto é:

a) $-3ln(3)$
b) $\frac{1}{2} ln\left(\frac{1}{3}\right)$
c) $3ln\left(\frac{13}{36}\right)$
d) 0
e) $\frac{1}{2}$

Resolução:

Notemos que $f\left(\frac{1}{3}\right) = ln\left(\left|-\frac{7}{12} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right|^0\right) = 0$. Portanto, as retas secantes passam pelo ponto $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

Além disso, vemos que $\frac{-7}{12}+x-x^2<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, pois $\Delta = 1^2-4\cdot 1\cdot\frac{7}{12}=1-\frac{7}{3}=\frac{-4}{3}<0$.

Então, $f(x)=(3x-1)\cdot ln\left|-\frac{7}{12}+x-x^2\right|=(3x-1)\cdot ln\left(x^2-x+\frac{7}{12}\right)$. Para a reta *r*: *y* = *mx* + *n* passar por $\left(\frac{1}{3},0\right)$, temos $0=\frac{m}{3}+n\Leftrightarrow n=-\frac{m}{3}$.

Logo, r: $y=mx-\frac{m}{3}=m\left(x-\frac{1}{3}\right)$.

Para a reta *r* ser secante ao gráfico de *f*, temos duas interseções entre *r* e o gráfico de *f*

$$\underbrace{r\cap \text{graf}(f)}_{\left(p/x\neq 1/3\right)}:m\cancel{\left(x-\frac{1}{3}\right)}=3\cancel{\left(x-\frac{1}{3}\right)}ln\left(x^2-x+\frac{7}{12}\right)\Leftrightarrow m=3ln\left(x^2-x+\frac{7}{12}\right)$$

Como queremos o valor mínimo de *m*, já que *ln*(*x*) é uma função crescente, será correspondente ao mínimo de $\left(x^2-x+\frac{7}{12}\right)$, que é $-\frac{\Delta}{4a}=\frac{1}{3}$.

Logo, min $\{m\}=3ln\left(\frac{1}{3}\right)=-3\,ln\,3$.

Alternativa A.

Questão 04

Quantos pares ordenados (*x*, *y*) de números inteiros satisfazem a equação $1/x+1/y=1/23$?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

Resolução:

Considerando que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{23}$, temos que $23(x+y)=xy$. Então $xy-23x-23y=0$. Somando 23^2 em ambos os lados, temos:

$$xy-23x-23y+23^2=23^2$$
$$\Downarrow$$
$$(x-23)(y-23)=23^2$$

Precisamos de *x* e *y* inteiros não nulos que satisfaçam a equação acima.
Para isso, temos 6 possibilidades, considerando que 23 é primo:

$$(x-23,\ y-23)=(23,23),\ (-23,-23),\ (23^2,1),\ (-23^2,-1),\ (1,23^2),(-1,-23^2)$$

Onde será descartado o par $(-23,-23)$, pois este geraria *x* e *y* nulos. Então temos 5 soluções possíveis:

$(x,y)=(46,46),\ (552,24),\ (-506,22),(24,552)$ e $(22,-506)$.

Alternativa E.

Questão 05

Seja $\alpha\in\mathbb{R}$ e $z_1,\ z_2,\ z_3$ números complexos tais que $|z_1|=|z_2|=|z_3|=4$ e $z_1\neq z_2$. O menor valor de $|\alpha z_1-(\alpha-1)z_2-z_3|$, é:

a) $\frac{1}{8}|z_1+z_2|$

b) $\frac{1}{4}|z_1-z_2|$

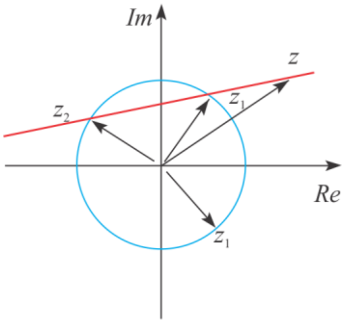
c) $\frac{1}{8}|z_3-z_1||z_3-z_2|$

d) $\frac{1}{4}|z_1-z_2-z_3|$

e) $|z_3|$

Resolução:

Com $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 4$, os afixos de z_1, z_2 e z_3 pertencem à circunferência centrada na origem com raio igual a 4. Sabe-se que, com $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha z_1 - (\alpha - 1)z_2 = z$, ou melhor, $\alpha z_1 + (1-\alpha)z_2 = z$, sendo z um ponto da reta definida pelos afixos de z_1 e z_2. Observe a figura.



Disso, $|\alpha z_1 - (\alpha - 1)z_2 - z_3| = |z - z_3|$. Ocorre que $|z - z_3|$ é a distância de z, um ponto da reta definida por z_1 e z_2, até z_3, um ponto da circunferência à qual pertencem z_1, z_2 e z_3. Tal distância é mínima no caso em que $z_3 = z_1$ ou $z_3 = z_2$. Assim, a distância mínima é igual a 0. Das alternativas sugeridas, a única que origina a distância igual a 0, com $z_3 = z_1$ ou $z_3 = z_2$, é a alternativa **C**.

Alternativa C.

Questão 06

Seja o número complexo $z = \left(1 - 2\sqrt{2i}\right)^{12}$. Sabe-se que $m = |z|$. O valor de x na expressão $2x = \log_m (27m)$ é:

a) 15/14
b) 5/14
c) 5/8
d) 15/4
e) 3/8

Resolução:

$$z = \left(1 - 2\sqrt{2}i\right)^{12}$$
$$m = |z|$$
$$2x = \log_m (27m)$$

Sabemos que $|z| = \left|1 - 2\sqrt{2}i\right|^{12} = \left(\sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2}\right)^{12} = \left(\sqrt{1+8}\right)^{12} = 3^{12}.$

Logo, a equação que temos que resolver é

$$2x = \log_{3^{12}}\left(27 \cdot 3^{12}\right) = \log_{3^{12}}\left(3^3 \cdot 3^{12}\right) =$$
$$= \log_{3^{12}}\left(3^{15}\right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$
$$2x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{8}$$

Alternativa C

Questão 07

Seja a equação do terceiro grau em x:

$$x^3 + p_1x^2 + p_2x + p_3 = 0$$

onde $p_1 < p_2 < p_3$ são números primos menores que 100. Para que a razão entre a soma e o produto das raízes da equação seja a maior possível, o valor de $p_2 + p_3$ deve ser:

a) 144
b) 152
c) 162
d) 172
e) 196

Resolução:

Os números primos menores que 100 são:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, e 97.

Pelas Relações de Girard, a soma das raízes será $-p_1$ e o produto será $-p_3$. Buscamos maximizar $\frac{p_1}{p_3}$. Como $p_1 < p_2 < p_3$, os possíveis valores dos primos são:

$$(p_1,\ p_2,\ p_3) = (2,3,5),\ (5,7,11),\ (7,11,13),\ (11,13,17),\dots,\ (71,73,79),\ (73,79,83),\ (79,83,89) \text{ e } (83,89,97).$$

Testando os primos em ordem decrescente, percebemos que a maior razão $\frac{p_1}{p_3}$ possível ocorre quando $(p_1, p_2, p_3) = (67,71,73)$. Então $p_2 + p_3 = 71 + 73 = 144$.

Alternativa A.

Questão 08

Os valores para *s* e *t* são escolhidos no intervalo (0, r), tais que s + t < r. Considere três segmentos de reta com comprimentos s, t e r - s - t. Qual a probabilidade desses segmentos formarem um triângulo?

a) 2/3
b) 1/2
c) 1/3
d) 1/4
e) 3/4

Resolução:

O conjunto dos possíveis pares (s,t) é
$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < s < r \text{ e } 0 < t < r \text{ e } s + t < r\}$.
A figura ilustra o conjunto.

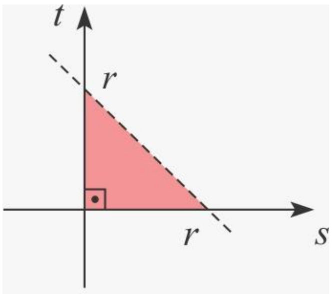


Figura 1

Para se ter um triângulo, $s < t + r - s - t$, $t < s + r - s - t$ e $r - s - t < s + t$, ou ainda, $s < \frac{r}{2}$, $t < \frac{r}{2}$ e $t > -s + \frac{r}{2}$. Disso, o conjunto de pares (s,t) com os quais é possível formar um triângulo é
$\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s < \frac{r}{2} \text{ e } t < \frac{r}{2} \text{ e } t > -s + \frac{r}{2}\}$.
A figura ilustra o conjunto.

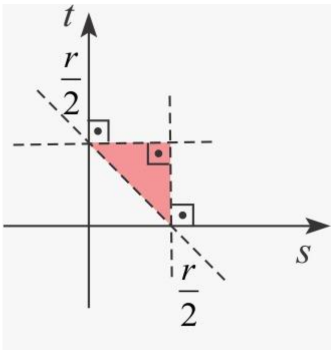


Figura 2

Considerando que a área da região destacada na figura **2** é $\frac{r^2}{8}$ e a área da região destacada na figura 1 é $\frac{r^2}{2}$, a probabilidade de os segmentos formarem um triângulo é $\frac{\frac{r^2}{8}}{\frac{r^2}{2}}$, isto é, a probabilidade é igual a $\frac{1}{4}$.

Alternativa D.

Questão 09

Considere o quadrado de lado L apresentado na Figura A. Ao aplicar uma determinada operação de corte, obtém-se a Figura B e repetindo a operação, em cada quadrado remanescente obtém-se a Figura C. Qual será a área remanescente, a partir do quadrado da Figura A, ao final de 10 operações?

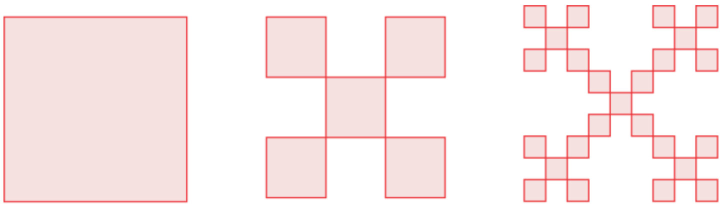


Figura A   Figura B   Figura C

a) $\dfrac{5^9 L^2}{9^9}$

b) $\dfrac{5^{10} L^2}{9^{10}}$

c) $\dfrac{5^{11} L^2}{9^{11}}$

d) $\left(\dfrac{9^{10}-5^{10}}{9^{10}}\right)L^2$

e) $\left(\dfrac{5^{10}-9^{10}}{9^{10}}\right)L^2$

Resolução:

Área $[A]=L^2$

Área $[B]=5.\left(\dfrac{L}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}\cdot L^2$

Área $[C]=25.\left(\dfrac{L}{9}\right)^2=\left(\dfrac{5}{9}\right)^2\cdot L^2$

Notemos que, após uma operação, $S_1=\text{Área}[B]=\dfrac{5}{9}L^2$, pois substituímos o quadrado de lado L por 5 quadrados de lado $\dfrac{L}{3}$. Para o cálculo de $S_2=\text{Área}[C]$, temos que substituir cada um dos 5 quadrados de B por 5 novos quadrados de lado $\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{L}{3}\right)=\dfrac{L}{9}$.

Assim, $S_1=\dfrac{5}{9}L^2$, $S_2=\left(\dfrac{5}{9}\right)^2\cdot L^2$, $S_3=\left(\dfrac{5}{9}\right)^3\cdot L^2,\ldots, S_{10}=\left(\dfrac{5}{9}\right)^{10}L^2$ (temos as áreas em PG de razão $\dfrac{5}{9}$).

Logo, após 10 operações, $S_{10}=\dfrac{5^{10}L^2}{9^{10}}$

Alternativa B

Questão 10

Considere as propriedades dos coeficientes binomiais. Qual das seguintes identidades está incorreta?

a) $\binom{100}{0}^2+\binom{100}{1}^2+\ldots+\binom{100}{100}^2=\binom{200}{100}^2$

b) $\binom{100}{39}+\binom{100}{40}=\binom{101}{40}$

c) $2\times1\times\binom{100}{2}+3\times2\times\binom{100}{3}+4\times3\times\binom{100}{4}+\ldots+100\times99\times\binom{100}{100}=9900\times2^{98}$

d) $\binom{100}{1}+2\times\binom{100}{2}+3\times\binom{100}{3}+\ldots+100\times\binom{100}{100}=100\times2^{99}$

e) $1-\binom{100}{1}+\binom{100}{2}-\binom{100}{3}+\ldots+\binom{100}{100}=0$

Resolução:

A Convolução de Vandermonde afirma que:

$$\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\ldots+\binom{m}{p}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{p}$$

Considerando $m=n=p=100$, temos:

$$\binom{100}{0}\binom{100}{100}+\binom{100}{1}\binom{100}{99}+\ldots+\binom{100}{100}\binom{100}{0}=\binom{200}{100}$$

Como $\binom{100}{k}=\binom{100}{100-k}$, então:

$$\binom{100}{0}^2+\binom{100}{1}^2+\ldots+\binom{100}{100}^2=\binom{200}{100}$$

O que nos diz que a alternativa A está incorreta. As demais alternativas estão corretas.

Alternativa A.

Questão 11

Seja a matriz quadrada A de ordem 2021 cujo elemento da linha i e coluna j é

$$a_{i,j}=\begin{cases}1, \text{ se } i=1 \text{ ou } i\neq j\\ 0, \text{ se } i=j\neq 1\end{cases}$$

com $i,\ j\in\{1,2,\ldots,2021\}$. O valor do determinante de A é:

a) -2021
b) 2021
c) 0
d) 1
e) -1

Resolução:

Tem-se que

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}.$$

Adicionando-se aos elementos da linha $\boldsymbol{i}$, $\forall\ \boldsymbol{i}$ = **2**, **3**, **4**, ..., **2021**, os opostos dos elementos da linha **1**, obtém-se

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}.$$

Com isso, det **A** = **1** · $(-1)^{2020}$, o que implica det **A** = **1**.

Alternativa D.

Questão 12

Para cada número *n* natural, seja a função real $f_n(x)$ definida para cada $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \neq (k+1)\pi/2,\ \forall k \in \mathbb{Z}$, de forma que:

$$f_n(x) = \frac{[tg(x)]^n + 1}{n[\sec(x)]^n}$$

A função $g(x)$ que atende $g(x) = f_6(x) - f_4(x) + \frac{1}{3}$ é:

a) $\cos(x) + 3$

b) $\frac{1}{4}$

c) $sen(x) - 2$

d) $\frac{1}{12}$

e) $tg(x) - \frac{1}{3}$

Resolução:

$$g(x) = f_6(x) - f_4(x) + \frac{1}{3} = \frac{tg^6 x + 1}{6\sec^6 x} - \frac{tg^4 x + 1}{4\sec^4 x} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{sen^6 x + \cos^6 x}{6} - \frac{sen^4 x + \cos^4 x}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{2(sen^6 x + \cos^6 x) - 3(sen^4 x + \cos^4 x) + 4}{12} =$$

$$= \frac{2(sen^2 x + \cos^2 x)(sen^4 x - sen^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) - 3sen^4 x - 3\cos^4 x + 4}{12}$$

$$= \frac{-sen^4 x - \cos^4 x - 2sen^2 x \cos^2 x + 4}{12} = \frac{4 - (sen^2 x + \cos^2 x)^2}{12} =$$

$$= \frac{4 - 1^2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Alternativa B.

Questão 13

Considere o ponto *A*(-4, 2) e *B* um ponto variável sobre o eixo das ordenadas. Traçam-se as retas *AB* e por *B*, a perpendicular a *AB* que intercepta o eixo das abcissas em *C*. Seja a equação do lugar geométrico do ponto de interseção da perpendicular ao eixo das abcissas traçada por *C* com a perpendicular ao eixo das ordenadas traçada por *B*. A equação desse lugar geométrico é:

a) $x^2 = 4y + 1$

b) $y^2 = 4x$

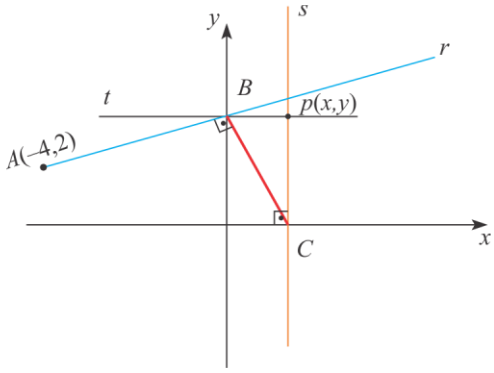
c) $y = -x + 2$

d) $x^2 + (y-2)^2 = 4$

e) $(y-1)^2 = 4x + 1$

Resolução:

A situação pode ser ilustrada como a seguir:



Seja m o coeficiente angular da reta r. Então ela terá equação $(y-2)=m(x+4)$.

Se $x=0 \to y=4m+2$, então o ponto B tem coordenadas $(0,\ 4m+2)$.

A reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem coeficiente angular $-\frac{1}{m}$, então terá equação $(y-4m-2)=-\frac{1}{m}\cdot x$.

Se $y=0 \to x=m(4m+2)$, então o ponto C tem coordenadas $(4m^2+2m,\ 0)$.

A reta t tem equação $y=4m+2$. A reta s tem equação $x=4m^2+2m$.

Portanto o ponto P tem coordenadas $(4m^2+2m, 4m+2)$

Então:

$$x=4m^2+2m \quad (1)$$
$$y=4m+2 \quad (2)$$

Pela Eq. (2), temos $m=\frac{y-2}{4}$. Substituindo na Eq. (1), temos:

$$x=4\left(\frac{y-2}{4}\right)^2+2\cdot\left(\frac{y-2}{4}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$x=\frac{y^2}{4}-\frac{y}{2}$$

Então o lugar geométrico tem equação:

$$y^2-2y=4x \Rightarrow (y-1)^2=4x+1$$

Alternativa E.

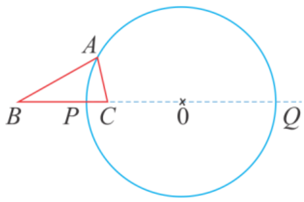
Questão 14

Considere os triângulos ΔABC em que $\overline{BC}=32$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=3$. O maior valor possível para a altura relativa ao lado $\overline{BC}$ é:

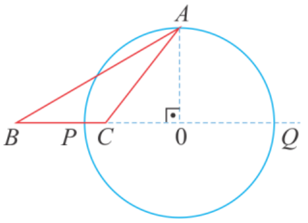
a) 8
b) 9
c) 10
d) 11
e) 12

Resolução:

Seja $P \in \overline{BC}$ e $Q \in \overleftrightarrow{BC}$, com $C \in \overline{PQ}$, tais que **BP** = **3** $\cdot$ **PC** e **BQ** = **3** $\cdot$ **QC**. Sabe-se que o lugar geométrico definido pelas possíveis posições do vértice **A** é a circunferência com diâmetro $\overline{PQ}$, com exceção de **P** e **Q**. Trata-se da circunferência de Apolônio. A figura ilustra o lugar geométrico.



Com **BC** = **32**, obtém-se **PC** = **8** e **CQ** = **16**. Disso, o diâmetro $\overline{PQ}$ tem medida igual a **24**. A maior altura ocorre em um ponto da circunferência mais distante da reta **BC**. A distância de tal ponto é igual ao raio da circunferência. A figura ilustra um ponto em que a distância é máxima.



Considerando que o raio da circunferência seja **12**, o maior valor possível para a altura é **12**.

Alternativa E.

Questão 15

Seja o cone de revolução de raio de base R e altura $\frac{3R}{2}$ com a base apoiada em um solo horizontal. Um ponto luminoso está localizado a uma altura $3R$ do solo e distante, horizontalmente, $2R$ do centro da base do cone. A área S da região iluminada no cone é:

a) $\pi R^2\sqrt{13}$

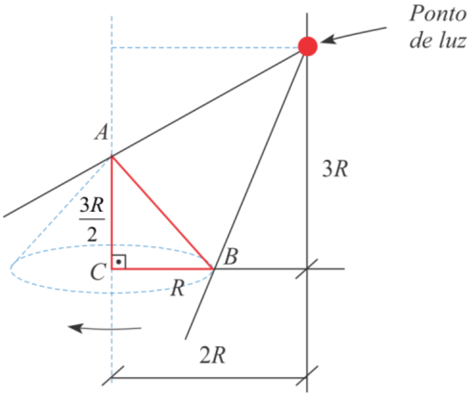
b) $2\pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{3}$

c) $\pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{2}$

d) $\pi R^2 \frac{\sqrt{13}}{3}$

e) $\frac{13}{4}\pi R^2$

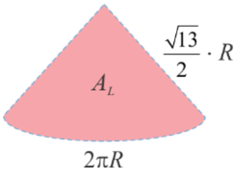
Resolução:



Notemos que, com certeza, há um pedaço do cone na sombra. Portanto, a área iluminada é menor que a área lateral do cone.

No triângulo ABC, por Pitágoras, temos $AB^2 = R^2 + \left(\frac{3R}{2}\right)^2 \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{13}}{2} \cdot R$

Seja A_L a área lateral do cone.



A_L ______________ $2\pi R$

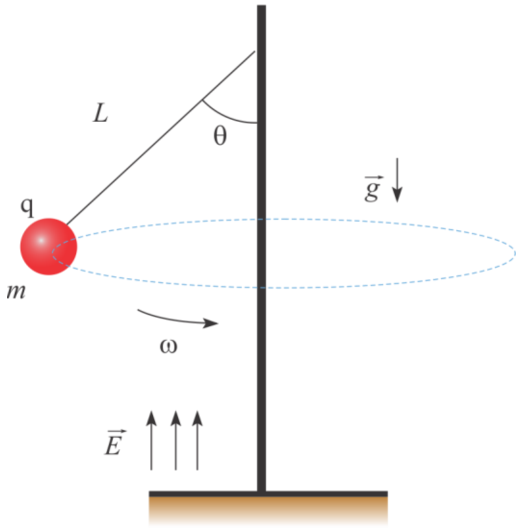
$\pi\left(\frac{\sqrt{13}}{2}R\right)^2$ _______ $2\pi \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}R$

$A_L = \pi \frac{\sqrt{13}}{2} R^2$

Logo, a área iluminada deve ser menor que A_L.
Das opções, a única que satisfaz isso é a alternativa D

Alternativa D

Questão 16



A figura mostra uma pequena esfera carregada, interligada por um cabo de comprimento *L*, inextensível e de massa desprezível, que gira em torno de um eixo vertical com velocidade angular ω. O movimento da esfera ocorre numa região submetida a um campo elétrico uniforme *E*, conforme indicado na figura.

Dados:

- massa da esfera: m = 50 g;
- carga elétrica da esfera: q = - 10 C;
- intensidade do campo elétrico: $|\vec{E}|$ = 0,07 N/C;
- velocidade angular do eixo: ω = 120 rpm;
- comprimento do cabo: $L = 30$ cm;
- aceleração da gravidade: g = 10 m/s^2; e
- $\pi^2 \approx 10$

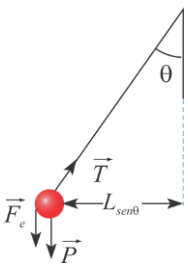
Observação:

- a espessura do eixo vertical é desprezível.

O ângulo θ formado entre o cabo e o eixo é aproximadamente:

a) 75°
b) 60°
c) 45°
d) 30°
e) 15°

Resolução:



Aplicando a 2ª Lei de Newton nas direções horizontal e vertical para as forças na esfera:

$$\begin{cases} T\,\text{sen}\,\theta = F_{cp} \\ T\cos\theta = P + F_e \end{cases} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{m\omega_0^{\,2} L\,\text{sen}\,\theta}{mg - qE} \Rightarrow \cos\theta = \frac{mg - qE}{m\omega_0^{\,2} L}$$

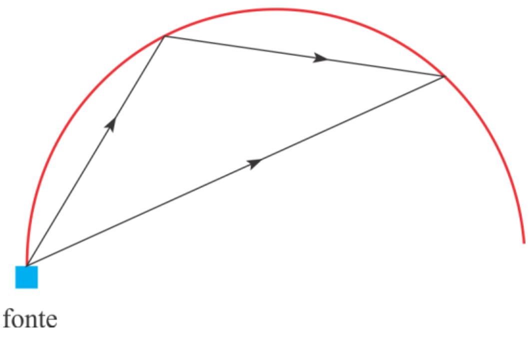
Substituindo valores:

$$\cos\theta = \frac{50\cdot 10^{-3}\cdot 10 + 10\cdot 0{,}07}{50\cdot 10^{-3}(2\cdot 2\pi)^2 0{,}30} = \frac{1{,}2}{2{,}4} = 0{,}5$$

$$\theta = 60^{o}.$$

Alternativa B.

Questão 17



Conforme ilustrado na figura, uma fonte localizada na extremidade de um anteparo, que é reflexivo e tem a forma de uma semicircunferência, emite raios luminosos de comprimento de onda constante, em fase, em todas as direções.

Observações:

- para cada ponto da semicircunferência, considere apenas o efeito da interferência de uma única reflexão, como exemplificado na figura; e
- considere que, na reflexão, o raio luminoso sofra uma inversão de fase.

Sabendo que a razão entre o raio da semicircunferência e o comprimento de onda é 30, o número N de máximos locais de interferência que serão observados no anteparo é tal que:

a) $N < 5$

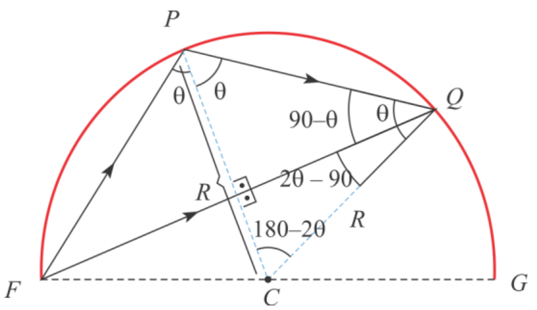
b) $5 \leq N < 12$

c) $12 \leq N < 21$

d) $21 \leq N < 27$

e) $27 \leq N$

Resolução:



Máximos: como há uma reflexão com inversão de fase, temos que usar a condição da interferência destrutiva.

$$\Delta l = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\Delta l = FP + PQ - FQ > 0 \therefore m \geq 0$$

$$\Delta CPQ \rightarrow PQ = 2R\cos\theta$$

$$\Delta FPQ \rightarrow FP = PQ \text{ e } FQ = 2\cdot PQ\cdot sen\theta$$

$$\Delta l = 4R\cos\theta - 2\cdot 2R\cdot\cos\theta\cdot sen\theta = 4R\cos\theta(1-sen\theta)$$

$$4R\cos\theta(1-sen\theta) = (m+\frac{1}{2})\lambda$$

O maior Δl ocorre para θ = 45°, quando $Q = G$

$$m+\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{R}{\lambda}\cdot\cos 45°\ (1\text{-}sen\ 45°) = 4\cdot 30\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$m+\frac{1}{2} = 60\left(\sqrt{2}-1\right) \simeq 24{,}85$$

$$m \simeq 24{,}85 - 0{,}5 = 24{,}35$$

$$m_{MÁX} = 24$$

$$m = 0,1,2,\ldots,24$$

$$N = 25 \rightarrow 21 \le N < 27$$

Alternativa D.

Questão 18

Uma fonte sonora A, que emite um som de frequência constante, e um observador B estão próximos um do outro e movem-se lentamente de acordo com as equações temporais no Plano *XY* mostradas abaixo:

$$x_A = \cos(t) + \log(1+t)$$

$$Y_A = 2t+3$$

$$X_B = \log(1+t) - sen(t)$$

$$Y_B = 2t-1$$

Considerando que a fonte sonora emita um som de frequência constante, a frequência percebida pelo observador, dentre as opções, é desprovida de efeito Doppler quando o instante *t* for:

A) 0.

B) $\pi/6$.

C) $\pi/2$.

D) $3\pi/4$.

E) π.

Resolução:

Não haverá efeito doppler quando não houver componente de velocidade relativa entre a fonte A e o observador B na direção do vetor que une A e B, isto é, quando o produto escalar $\vec{v}_{A,B}\cdot\vec{r}_{A,B}$ for nulo.

$$\vec{r}_{A,B} = \vec{r}_A - \vec{r}_B = (\cos t + \log(1+t),\ 2t+3) - (\log(1+t) - sent,\ 2t-1) = (\cos t + sent,\ 4)$$

$$\vec{v}_{A,B} = \vec{v}_A - \vec{v}_B = \frac{dr\vec{a}}{dt} - \frac{dr\vec{b}}{dt} = \left(-sent + \frac{1}{(1+t)\cdot lento},\ 2\right) - \left(\frac{1}{(1+t)\cdot ln10} - \cos t,\ 2\right) = \left(-sent + \cos t, 0\right)$$

$$\vec{r}_{A,B}\cdot\vec{v}_{A,B} = (\cos t + sent)(-sent + \cos t) = \cancel{-sent\cdot\cos t} + \cos^2 t + \cancel{sent\cdot\cos t} - sen^2 t = \cos^2 t - sen^2 t = \cos 2t$$

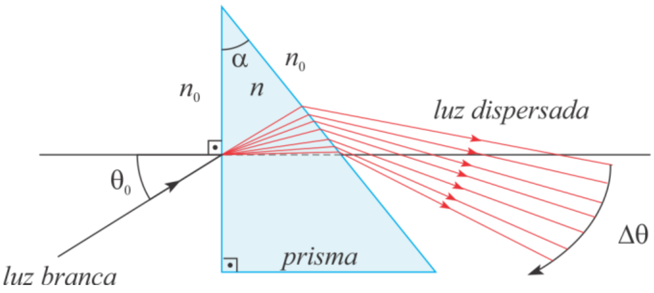
$$\cos 2t = 0 \ \Rightarrow\ 2t = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4}$$

Alternativa D.

Questão 19



Um prisma possui um ângulo agudo α e índice de refração variável de acordo com a expressão: $n(\lambda) = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$ em que A e B são constantes e λ é o comprimento de onda.

Uma luz branca vinda do ar $(n_0 = 1)$ incide sobre a face vertical do prisma e sofre dispersão cromática no seu interior, voltando para o ar ao sair do prisma. Tal luz, possui componentes espectrais no intervalo: $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$.

Consideração:

- os ângulos θ_0 e α são tão pequenos que a aproximação $sen(x) \cong x$ é válida, para $x = \theta_0$ ou $x = \alpha$.

Diante do exposto, a maior abertura angular $\Delta\theta$ entre as componentes espectrais é aproximadamente:

A) $\dfrac{\alpha A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1\lambda_2}$

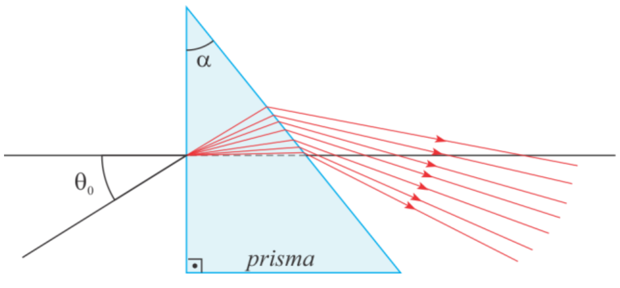
B) $\dfrac{\theta_0 A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{\lambda_1\lambda_2}$

C) $\dfrac{\alpha B(\lambda_2^2 + \lambda_1^2)}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$

D) $\dfrac{\theta_0 B(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$

E) $\dfrac{\alpha B(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{(\lambda_1\lambda_2)^2}$

Resolução:



Escrevendo a Lei de Snell na primeira interface ar/prisma, temos:

$n_0 \cdot sen\theta \cdot = n \cdot senr$ como os ângulos são pequenos $\to n_0 \cdot \theta_0 = n \cdot r \to r = \dfrac{n_0\theta_0}{n}$

Para a segunda interface prisma/ar, podemos escrever:

$n \cdot senr' = n_0 \cdot sen\theta \Rightarrow n \cdot r' = n_0 \cdot \theta \Rightarrow \theta = \dfrac{nr'}{n_0}$

Como $\alpha = r + r'$ $\Rightarrow \theta = \dfrac{n\cdot(\alpha - r)}{n_0}$. Substituindo r ficaremos com: $\theta = \dfrac{n(\alpha - \frac{n_0\theta_0}{n})}{n_0} = \dfrac{n\alpha}{n_0} - \theta_0$

O desvio total de um dado raio de luz é: $\delta = \theta_0 + \theta - \alpha$

Considerando os desvios limites, podemos escrever a abertura espectral como:

$\Delta\theta = \delta_{\lambda_1} - \delta_{\lambda_2} = (\cancel{\theta_0} + \theta_{\lambda_1} - \cancel{\alpha}) - (\cancel{\theta_0} + \theta_{\lambda_2} - \cancel{\alpha})$

$$\Delta\theta = \theta_{\lambda 1} - \theta_{\lambda 2} = \left(\frac{n_{\lambda_1}\alpha}{\cancel{n_0}} - \cancel{\theta_0}\right) - \left(\frac{n_{\lambda_2}\alpha}{\cancel{n_0}} - \cancel{\theta_0}\right) = \alpha\left[\left(\cancel{A} + \frac{B}{\lambda_1^2}\right) - \left(\cancel{A} + \frac{B}{\lambda_2^2}\right)\right]$$

$$\Delta\theta = \alpha B \frac{\left(\lambda_2^2 - \lambda_1^2\right)}{\lambda_1^2\lambda_2^2}$$

Alternativa E.

Questão 20

Gás	***v* [m/s]**
argônio	319
criptônio	221
hélio	1 007
hidrogênio	1 270
oxigênio	326
xenônio	178

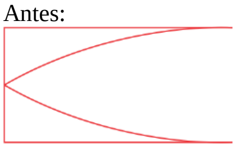
Fonte: <*https://pages.mtu.edu/~suits/SpeedofSoundOther.html*>.

A tabela mostra a velocidade *v* do som, a 20 °C e 1 atm, em seis gases diferentes. Quando um tubo aberto em uma das extremidades é enchido com oxigênio, a frequência do primeiro harmônico do som produzido pelo tubo é 163 Hz. Quando o oxigênio é substituído por um dos cinco gases restantes, a frequência do quinto harmônico do som produzido pelo tubo é 2 517,5 Hz. Isso significa que o gás escolhido para o segundo experimento foi o:

a) argônio.
b) criptônio.
c) hélio.
d) hidrogênio.
e) xenônio.

Resolução:

Antes:



$\frac{\lambda}{4} = L$ (1º harmônica)

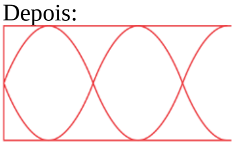
$V_{som} = f \cdot \lambda$

$V_{som} = f \cdot 4L$

$326 = 163 \cdot 4L$

$L = 0{,}5m$

Depois:



$\frac{5\lambda}{4} = L$ (5º harmônica)

$V_{som} = f \cdot \lambda$

$V_{som} = \frac{4L}{5}$

$V_{som} = 2517{,}5 \cdot 4 \cdot \frac{0{,}5}{5} = \frac{5035}{5} = 1007 m/s$

Logo, o gás é o Hélio.

Alternativa C.

Questão 21

Um aluno está em uma nave (referencial *S*) que viaja a uma velocidade *v* relativa ao professor (referencial *S'*). Em $t = t' = 0$ (tempo em cada um dos referenciais), a nave passa pelo professor e o aluno inicia uma prova de física. Em $t = \tau$, um pulso de luz é emitido pelo aluno até o professor e é refletido de volta à nave, quando então a prova é encerrada. Sabendo que a velocidade da luz é c e que $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, a duração da prova no referencial do professor é:

a) $\gamma\tau/(1-v/c)$

b) $(1+v/c)\gamma\tau$

c) $\gamma\tau/(1+v/c)$

d) $\gamma\tau/(1-v/c)/(1+v/c)$

e) $\gamma\tau/(1+v/c)/(1-v/c)$

Resolução:

Para resolver esse problema, usaremos as transformações de Lorentz. Como é o referencial S que se move no sentido positivo (assim supomos) de x em relação a S', teremos:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x+vt) \\ t' = \gamma\left(t + \dfrac{v}{c^2}x\right) \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = \gamma(x'-vt') \\ t = \gamma\left(t' - \dfrac{v}{c^2}x'\right) \end{cases}$$

Podemos analisar o problema a partir de quatro eventos:
Evento A: início da prova.
Evento B: emissão do pulso de luz pelo aluno.
Evento C: reflexão do pulso.
Evento D: pulso refletido atinge a nave.
Para o primeiro evento, as coordenadas espaço-temporais coincidem: (0, 0). O evento B ocorre nas coordenadas $(0,\tau)$ para o estudante. Aplicando as transformações, encontramos suas coordenadas no referencial do professor:

$$t'_B = \gamma\left(\tau + \frac{v}{c^2}\cdot 0\right) = \gamma\tau$$

$$x'_B = \gamma(0 + v\tau) = \gamma v\tau$$

O pulso emitido então percorre, no referencial do professor, a distância $\gamma v\tau$, levando, portanto, um intervalo de tempo igual a $\dfrac{\gamma v\tau}{c}$ para chegar até o ponto onde é refletido. Sendo assim, o evento C possui as coordenadas $\left(0, \gamma\tau + \dfrac{\gamma v\tau}{c}\right)$ em S'. Aplicando as transformações, encontramos suas coordenadas em S:

$$t_C = \gamma\left(\gamma\tau + \frac{\gamma v\tau}{c} - \frac{v}{c^2}\cdot 0\right) = \gamma^2\tau\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

$$x_C = \gamma\left[0 - v\left(\gamma\tau + \frac{\gamma v\tau}{c}\right)\right] = -\gamma^2 v\tau\left(1+\frac{v}{c}\right)$$

O pulso refletido então leva um tempo $\dfrac{\gamma^2 v\tau}{c}\left(1+\dfrac{v}{c}\right)$ para chegar até o aluno, de modo que o evento D tem as coordenadas $\left(0, \gamma^2\tau\left(1+\dfrac{v}{c}\right)^2\right)$ em S.

A duração da prova corresponde à coordenada temporal do evento D em S'. Aplicando a transformação:

$$t'_D = \gamma\left(\gamma^2\tau\left(1+\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{v}{c^2}\cdot 0\right) = \gamma^3\tau\left(1+\frac{v}{c}\right)^2$$

O fator de Lorentz pode ser explicitado em função das velocidades para simplificar a expressão:

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{(c+v)(c-v)}$$

Logo:

$$t'_D = \gamma\cdot\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{(c+v)}(c-v)}\cdot\tau\cdot\frac{(c+v)\cancel{^2}}{\cancel{c^2}} = \gamma\tau\frac{c+v}{c-v}$$

$$t'_D = \gamma\tau(1+v/c)/(1-v/c)$$

Para enxergar melhor, vejamos as coordenadas espaço-temporais (x, t) de todos os eventos:

	Evento A	Evento B	Evento C	Evento D
S (aluno)	$(0,0)$	$(0,\tau)$	$\left(-\gamma^2 v\tau\left(1+\frac{v}{c}\right), \gamma^2\tau\left(1+\frac{v}{c}\right)\right)$	$\left(0, \gamma^2\tau\left(1+\frac{v}{c}\right)^2\right)$
S' (professor)	$(0,0)$	$(\gamma v\tau, \gamma\tau)$	$\left(0, \gamma\tau + \frac{\gamma v\tau}{c}\right)$	$\left(\frac{v\tau}{(1-v/c)^2}, \frac{\gamma\tau(1+v/c)}{1-v/c}\right)$

Alternativa E.

Questão 22

Um bloco cúbico homogêneo de aresta L parte do repouso em uma rampa de altura h. O bloco desliza sem atrito até que seu vértice P alcance a coordenada $x = 0$ em uma superfície plana. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é para $x \geq 0$, a coordenada x_p do vértice P em que o bloco estaciona, considerando que $x_p \geq L$, é :

A) $a)\dfrac{h}{\mu}+\dfrac{L}{2}$

B) $b)\dfrac{h}{\mu}-\dfrac{L}{2}$

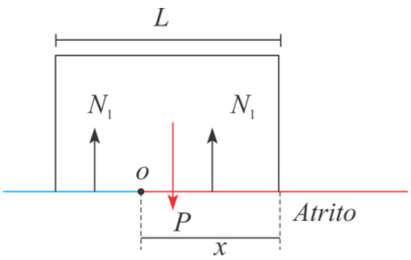
C) $c)\sqrt{\dfrac{hL}{\mu}}+\dfrac{L}{2}$

D) $d)\sqrt{\dfrac{2hL}{\mu}}$

E) $e)\dfrac{h}{\mu}$

Resolução:

Assim que o bloco entra na região onde existe atrito, caso ele não tombe, mantendo contato com o solo por toda a base, teremos parte da força normal atuando na região lisa e parte na região com atrito:



Pelo equilíbrio de momentos:

$$\tau_o = P\left(x - L/2\right) - N_2 \cdot x/2 + N_1 \cdot (L-x)/2 = 0$$

Do equilíbrio de forças:

$$F_R = 0 \Rightarrow N_1 = P - N_2$$

Substituindo na equação anterior:

$$mgx - \cancel{mg\frac{L}{2}} - \cancel{N_2\frac{x}{2}} + \cancel{mg\frac{L}{2}} - mg\frac{x}{2} - N_2\frac{L}{2} + \cancel{N_2\frac{x}{2}} = 0$$

$$N_2 = mg\frac{x}{L}$$

Logo, teremos uma força de atrito linearmente crescente no intervalo $0 < x < L$ e, em seguida, constante. Aplicando o Teorema da Energia Cinética desde o início até a parada:

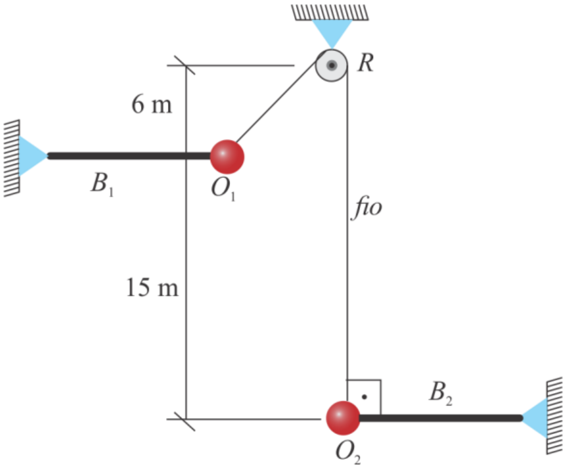
$$T_T = \Delta E_c$$

$$mgh - \int_0^L \frac{\mu mgx}{L}dx - \mu mg(x-L) = 0$$

$$h - \frac{\mu L}{2} - \mu x + \mu L = 0$$

$$x = \frac{h}{\mu} + \frac{L}{2}$$

Alternativa A



O sistema da figura acima é composto por duas barras articuladas B_1 e B_2, uma roldana R e um fio inextensível, todos de massa desprezível, e dois objetos carregados eletricamente, O_1 e O_2. O_1 e O_2 estão fixados cada um a uma extremidade livre do fio e também à extremidade livre de B_1 e B_2, respectivamente. O sistema encontra-se em equilíbrio e está estático na posição mostrada na figura.

Dados:

- comprimento total do fio = 31 m;
- massa de O_1 = 4 kg;
- massa de O_2 = 12 kg; e
- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m}/s^2$.

Considerações:

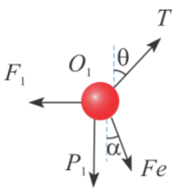
- os objetos O_1 e O_2 estão carregados eletricamente com cargas opostas;
- as dimensões de O_1, O_2 e da roldana são desprezíveis; e
- B_1 e B_2 estão paralelas ao eixo horizontal.

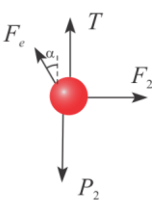
Diante do exposto, o módulo da força elétrica entre os objetos O_1 e O_2, em N, é aproximadamente:

a) 18
b) 20
c) 23
d) 26
e) 30

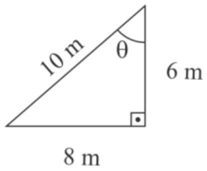
Resolução:

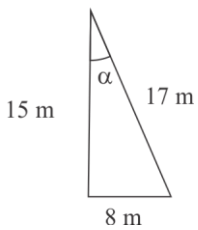
Começamos representando as forças que atuam em cada um dos objetos:





Os ângulos acima podem ser determinados pela geometria do problema, a partir dos comprimentos fornecidos podemos formar os seguintes triângulos:





Com isso, estão determinados os senos e cossenos dos ângulos α e θ. Aplicando a condição de equilíbrio de forças na vertical para cada um dos objetos:

$$\begin{cases} T\cos\theta = F_e\cos\alpha + P_1 \\ T + F_e\cos\alpha = P_2 \end{cases}$$

Multiplicando a equação inferior por $\cos\theta$ e subtraindo a superior, encontramos:

$$F_e = \frac{P_2\cos\theta - P_1}{\cos\alpha(1+\cos\theta)} = \frac{120\cdot 0,6 - 40}{\frac{15}{17}(1+0,6)} = 22,66... \cong 23N$$

Alternativa C.

Questão 24

Você está desenvolvendo um sistema embarcado autônomo para desinfecção de ambientes. O sistema é composto por um carrinho elétrico com uma lâmpada e uma bateria. Para que o processo de desinfecção funcione apropriadamente, o sistema deverá deslocar-se com velocidade constante por um piso rugoso.

Dados:

- massa do carrinho: 6 kg;
- massa da bateria: 4 kg;
- tensão da bateria: 24 V;
- massa da lâmpada: 2 kg;
- coeficiente de atrito cinético: 0,2;
- aceleração da gravidade: $10 m/s^2$;
- velocidade do sistema: 0,5 m/s; e
- potência da lâmpada: 96 W.

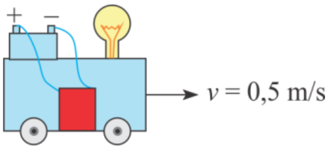
Considerações:

- as perdas do motor do carrinho são desprezíveis; e
- a energia da bateria necessária para fazer o carrinho chegar à velocidade de funcionamento do sistema é desprezível.

Sabendo que a bateria fornece energia para o carrinho e para a lâmpada e que, para a perfeita desinfecção da sala, o sistema deve trabalhar durante 90 minutos, a mínima capacidade da bateria do sistema, em mAh, é:

a) 6 370
b) 6 375
c) 6 500
d) 6 625
e) 6 750

Resolução:



Massa do conjunto: $M_T = 6+4+2 = 12\ Kg$

$F_R = 0 \Rightarrow F_{TRAÇÃO} - f_{at} = 0$

$F_{TRAÇÃO} = \mu\cdot N = \mu\cdot mg = 0,2\cdot 12\cdot 10 = 24N$

Potência desenvolvida pelo carrinho:

$Pot_C = F_{TRAÇÃO}\cdot v = 24\cdot 0,5 = 12\ W$

Potência entregue pela bateria (carrinho + lâmpada):

$Pot_B = Pot_C + Pot_L = 12 + 96 = 108\ W$

$$Pot_B = U\cdot i = U\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 24\cdot\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 108 \quad\Rightarrow\quad \Delta Q = \frac{108}{24}\cdot\Delta t$$

Para 90 min de funcionamento: $\Delta Q = \frac{108}{24}\cdot(90\cdot 60) = 24300\ C$

ΔQ em mAh será dado por: $\Delta Q = 24300\left(\frac{10^3}{3600}\right) \Rightarrow \Delta Q = 6750\ mAh$

Alternativa E.

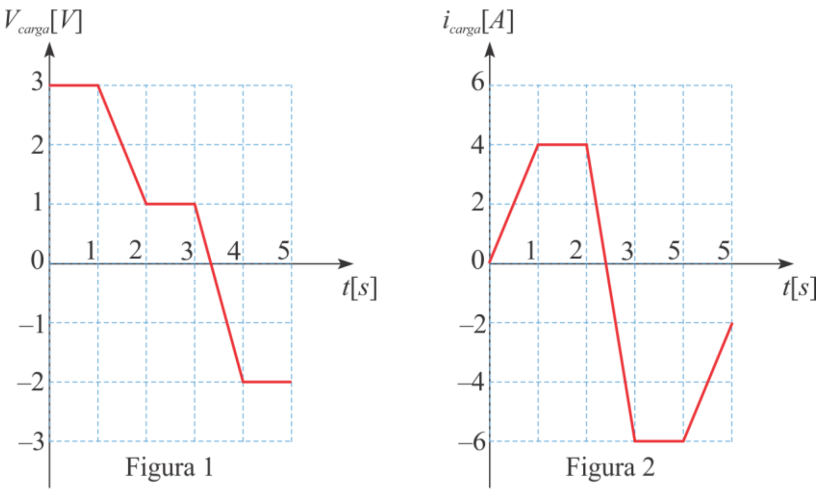


Figura 1 Figura 2

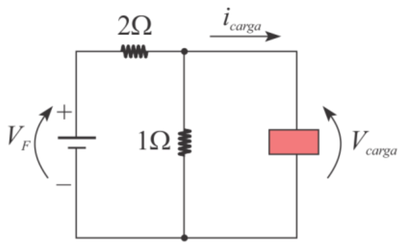
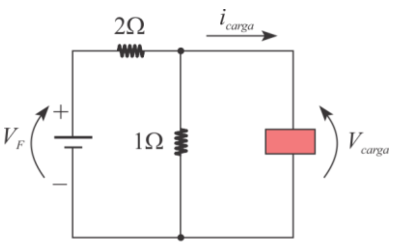


Figura 3

As Figuras 1 e 2 apresentam, respectivamente, as formas de onda da tensão $V_{carga}(t)$ e da corrente $i_{carga}(t)$ sobre o dispositivo eletrônico hipotético da Figura 3. Para o instante de tempo t = 3 s, a potência fornecida ao circuito pela fonte de tensão (V_F), em W, é:

a) – 45
b) 45
c) – 57
d) 57
e) 60

Resolução:



Analisando os gráficos, observamos que para $t = 3s,\ V_{carga} = 1V\ e\ i_{carga} = -6A$

Aplicando a Lei de Ohm na carga, temos:

$V_{carga} = R_{carga} \cdot i_{carga}$

$R_{carga} = 6\Omega$

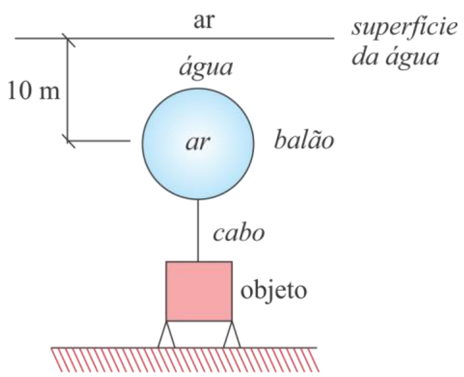
Como o resistor de 1Ω está em paralelo com a carga, temos a mesma tensão sobre ele e uma corrente de: $i = {}^{1}\!/_{1} = 1A$

Logo, a corrente que atravessa a resistência de 2Ω, e que é fornecida pela fonte será: $i_F = +1 - 6 = -5A$

A tensão da fonte V_F, é dada por: $V_F = 2 \cdot (-5) + 1 = -9V$

Logo sua potência será: $Pot = (-9) \cdot (-5) = +45\,W$

Alternativa B.



Um objeto de formato cúbico, com aresta de comprimento L e de massa específica μ_{obj}, encontra- se apoiado no fundo do mar, devendo ser içado por meio de um balão de borracha de massa m_b, que apresenta volume interno V de ar ajustável. A figura ilustra a situação descrita, com o centro do balão posicionado a 10 m de profundidade. O volume V do balão, em m^3, relaciona-se com a diferença de pressão Δp, em atm, entre a pressão interna e a externa do balão pela seguinte equação: $\Delta p = 1,4V^2 - 1,2V + 1,8$ para $1 \leq V \leq 3$.

Dados:

- massa do balão: m_b = 50 kg;
- massa do cabo: m_c = 100 kg;
- comprimento da aresta do objeto cúbico: L = 1 m;
- aceleração da gravidade: g = 10 m/ s^2 ;
- massa específica do objeto: μ_{obj} = 2 850 kg/ m^3;
- massa específica da água: μ_{agua} = 1 000 kg/ m^3; e
- 1 atm = 10^5 Pa.

Observações:

- o ar acima da superfície da água encontra-se a 1 atm de pressão;
- desconsidere o volume do cabo e a massa do ar internamente ao balão; e
- para efeito do cálculo da pressão hidrostática sobre o balão, considere que todo o volume V esteja posicionado na mesma profundidade de seu centro.

A pressão interna mínima do balão, em atm, a partir da qual será iniciado o movimento do objeto é:

a) 3,0
b) 4,2
c) 5,5
d) 7,0
e) 8,5

Resolução:

Na iminência do movimento, o peso total do conjunto se iguala ao empuxo.

$$\begin{cases} P_{obj} = \mu_{obj} L^3 g = 28500N \\ P_c = m_c g = 1000N \\ P_b = m_b g = 500N \end{cases} \Rightarrow P_{total} = 30000N$$

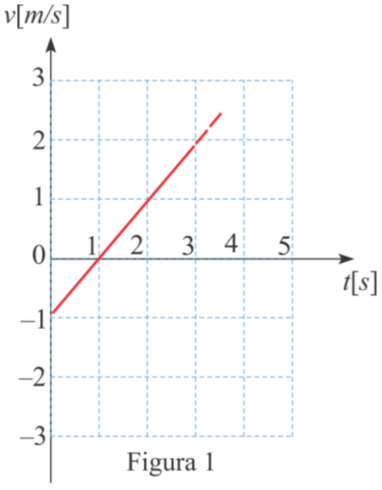
$$E = \mu_{agua}(L^3 + V)g = 10000 + 10000V$$

Igualando as forças, encontramos V = 2m³. Substituindo na expressão da diferença de pressão:

$$\Delta p = 1,4 \cdot 2^2 - 1,2 \cdot 2 + 1,8 = 5atm$$

Como o balão está a 10 m de profundidade, isso significa que a pressão externa vale 2 atm.
Para que o balão seja inflado, a pressão interna deve ser maior que a externa, logo teremos uma pressão interna de 7 atm.

Alternativa D.



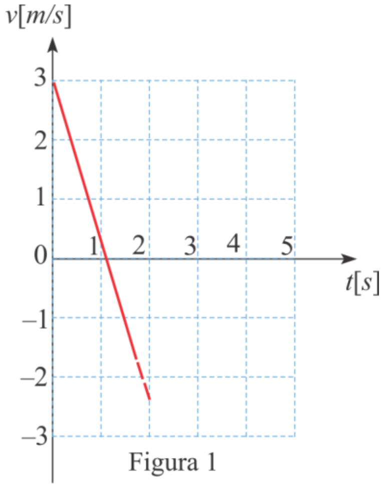


Figura 1
velocidade do objeto de
massa m_1

Figura 2
velocidade do objeto de
massa m_2

Em um experimento, dois objetos de massas m_1 e m_2 partem, respectivamente, das posições 0 e 30 m do mesmo eixo horizontal. Suas velocidades são programadas de acordo com os gráficos lineares mostrados nas Figuras 1 e 2, até que, na iminência de colisão perfeitamente inelástica entre elas, o sistema de controle das velocidades é desativado, mantendo-se a inércia de seus movimentos.

A razão m_1/m_2 para que, após a colisão, os objetos retornem unidos à posição 0 e com velocidade constante de módulo 2 é:

a) 1/7
b) 1/5
c) 1/3
d) 3/7
e) 3/5

Resolução:

- Equações do movimento:

$$S_1 = S_{0_1} + v_{0_1} t + \frac{a_1 \cdot t^2}{2} = 0 - 1t + \frac{1}{2}t^2 = -t + 0{,}5t^2$$

$$S_2 = S_{0_2} + v_{0_2} t + \frac{a_2 \cdot t^2}{2} = 30 + 3t - \frac{3}{2}t^2 = 30 + 3t - 1{,}5t^2$$

- Instante de encontro:

$$S_1 = S_2 \Rightarrow -t + 0{,}5t^2 = 30 + 3t - 1{,}5t^2 \Rightarrow 2t^2 - 4t - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 256 \Rightarrow t = \frac{+4 \pm 16}{2 \cdot 2} \Rightarrow t_1 = +5 \text{ e } \cancel{t_2 = -3}$$

- Velocidades na iminência do choque:

$V_1 = V_{0_1} + a_1 \cdot t = -1 + 1 \cdot 5 = 4\ m/s$ $\qquad$ $V_2 = V_{0_2} + a_2 \cdot t = 3 - 3 \cdot 5 = -12\ m/s$

Pela conservação da quantidade de movimento na colisão:

$$P_{0_1} + P_{0_2} = P_f \Rightarrow m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 \cdot 4 - m_2 \cdot 12 = (m_1 + m_2) \cdot (-2) \Rightarrow 6m_1 = 10m_2$$

$$\Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{5}$$

Alternativa E.

Questão 28

Um engenheiro recebe a tarefa de elaborar um anteprojeto para estabelecer alguns parâmetros de desempenho referentes a uma usina termelétrica a carvão que será empregada em situações emergenciais. Esta usina trabalhará segundo um ciclo termodinâmico e, em seu estudo, o engenheiro estabelece as afirmativas abaixo:

Afirmativa I: Se a temperatura da fonte fria for de 300 K e se o ciclo apresentar rendimento real correspondente a 75% do rendimento do Ciclo de Carnot associado, então a temperatura da fonte quente será de 750 K, para as condições de projeto.

Afirmativa II: A taxa de transferência de calor para a fonte fria nas condições de projeto será de 55/3 MW.

Afirmativa III: Nas condições de projeto, o consumo de carvão necessário para garantir o funcionamento ininterrupto da usina durante uma semana será de 560 toneladas.

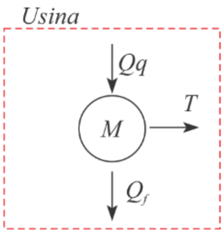
Condições de projeto:

- rendimento do ciclo: 45 %;
- calor de combustão do carvão: 36 kJ/g; e
- potência disponibilizada pela usina: 15 MW.

Diante do exposto, está(ão) correta(s) a(s) afirmativa(s):

a) I, apenas.
b) II, apenas.
c) I e III, apenas.
d) I e II, apenas.
e) I, II e III.

Resolução:



Afirmativa I:

$$Se\ T_q = 750\ K\ e\ T_f = 300\ K \Rightarrow \eta_{Carnot} = 1 - \frac{300}{750} = 1 - \frac{2}{5} = 0,6$$

$$\eta_{Usina} = 0,45 = 0,75 \cdot \eta_{Carnot} \quad (Verdadeiro)$$

Afirmativa II:

$$N_{Usina} = 0,45 = \frac{\tau}{Q_1} = \frac{\tau}{\tau + Q_2} \Rightarrow 0,45 = \frac{\tau/\Delta t}{\tau/\Delta t + Q_2/\Delta t} \Rightarrow \frac{15}{15 + Q_2/\Delta t} = 0,45$$

$$\Rightarrow 15 = 15 \cdot 0,45 + 0,45 \cdot \frac{Q_2}{\Delta t} \Rightarrow \frac{Q_2}{\Delta t} = \frac{15 \cdot 0,55}{0,45} = \frac{55}{3}\ MW \ \text{(Verdadeiro)}$$

Afirmativa III:

$$\text{Taxa de consumo} = \frac{Q_1}{\Delta t} = \frac{\tau}{\Delta t} + \frac{Q_2}{\Delta t} = 15 + \frac{55}{3} = \frac{100}{3}\ MW$$

$$1\ \text{semana} = 604 \cdot 800\ s$$

$$Q_1 = \frac{100M}{3} \Delta t = \frac{100 \cdot 10^6}{3}(604.800) = 6,048 \cdot 10^{13}\ J$$

$$M = Q_1/C_C = \frac{6,048 \cdot 10^{13}}{3 \cdot 36 \cdot 10^3} = \frac{16,8 \cdot 10^8}{3}\ g \Rightarrow M = 560\ \text{ton} \ \text{(Verdadeiro)}$$

Alternativa E.

Questão 29

Um Planeta P_1 foi arremessado de sua órbita original O_1 ao redor de sua estrela S_1 no Sistema Solar 1 e desde então vaga pelo Universo com velocidade constante v_1. Em um determinado momento, ao passar pelo Sistema Solar 2, P_1 se choca frontalmente com um planeta P_2, que se encontra no afélio de sua órbita O_2 em torno de sua única estrela, S_2. O choque entre os dois planetas é perfeitamente inelástico e resulta na criação de um novo Planeta P_3.

Dados:

- módulo da velocidade tangencial de P_2 no afélio de O_2 : v_2 ;
- módulo da velocidade de P_1 : $v_1 = 3v_2$;
- massa de $P_1 = 10^{-8}$ x massa da estrela S_2 ; e
- massa de P_2 = massa de P_1

Sobre a órbita O_3 de P_3 em torno de S_2 , é verdadeiro afirmar que:

a) o período de sua órbita O_3 é igual ao da órbita O_2 de P_2 .
b) o período de sua órbita O_3 é maior que o da órbita O_2 de P_2 .
c) o período de sua órbita O_3 é menor que o da órbita O_2 de P_2 .
d) não haverá órbita O_3 , pois o planeta P_3 irá de encontro à estrela S_2 .
e) não haverá órbita O_3 , pois o planeta P_3 escapará de sua órbita em torno de S_2 .

Resolução:

A questão não especifica se a colisão ocorre com os corpos se movendo no mesmo sentido ou em sentidos opostos. Vamos analisar os dois casos, considerando que a massa da estrela é muito maior que a dos planetas.

I – Corpos se movendo em sentidos opostos.

Pela conservação do momento, uma vez que $m_1 = m_2 = m$:

$$mv_1 - mv_2 = 2mv_3$$

$$v_3 = \frac{3v_2 - v_2}{2} = v_2$$

Logo, nesse caso a velocidade do novo planeta, P_3, tem o mesmo valor que a velocidade original de P_2, tendo sido apenas invertido o sentido do movimento. Logo, não só o período como também a trajetória da órbita conservar-se-ão, o que daria a opção A.

II – Corpos se movendo no mesmo sentido.

Dessa vez, a conservação do momento fornece

$$mv_1 + mv_2 = 2mv_3$$

$$v_3 = \frac{3v_2 + v_2}{2} = 2v_2$$

Nesse caso, tudo o que sabemos é que o novo planeta descreverá uma trajetória com maior excentricidade, podendo inclusive escapar da órbita em torno de S_2. Antes da colisão, o planeta P_2 possuía as seguintes energias, sendo "e" a excentricidade da órbita original:

$$E_p = -\frac{GMm}{a(1+e)}$$

$$E_c = \frac{GMm}{2a}\frac{1-e}{1+e}$$

$$E_T = -\frac{GMm}{2a}$$

Após a colisão, portanto, basta dobrar a massa e a velocidade:

$$E_p = -\frac{2GMm}{a(1+e)}$$

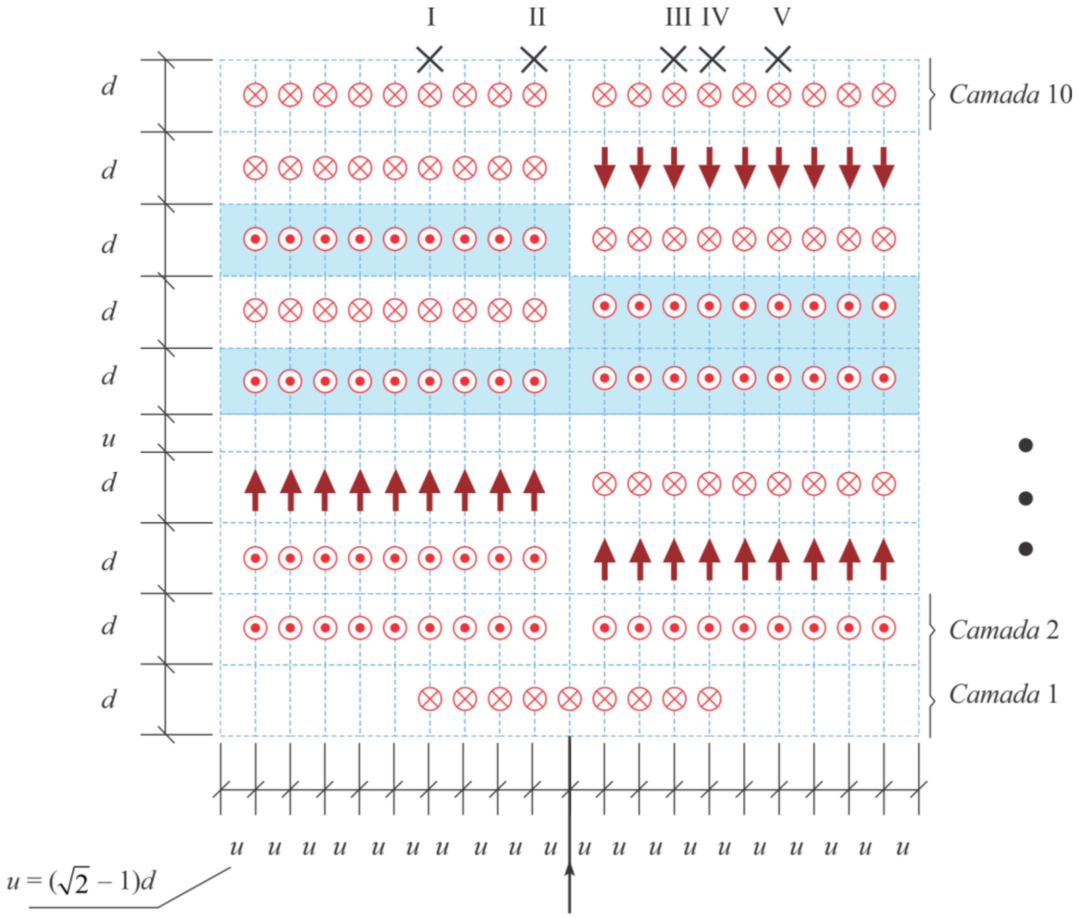
$$E_c = \frac{4GMm}{a}\frac{1-e}{1+e}$$

$$E_T = \frac{2GMm(1-2e)}{a(1+e)}$$

Ou seja, para alguns valores da excentricidade da órbita inicial, o planeta escapa, para outros, não. Portanto a questão ficaria sem resposta.

Conclusão: feitas as ressalvas, marcamos a opção A.

Alternativa A.

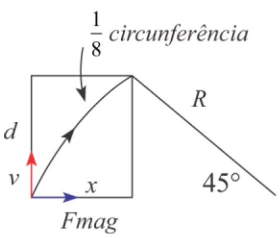


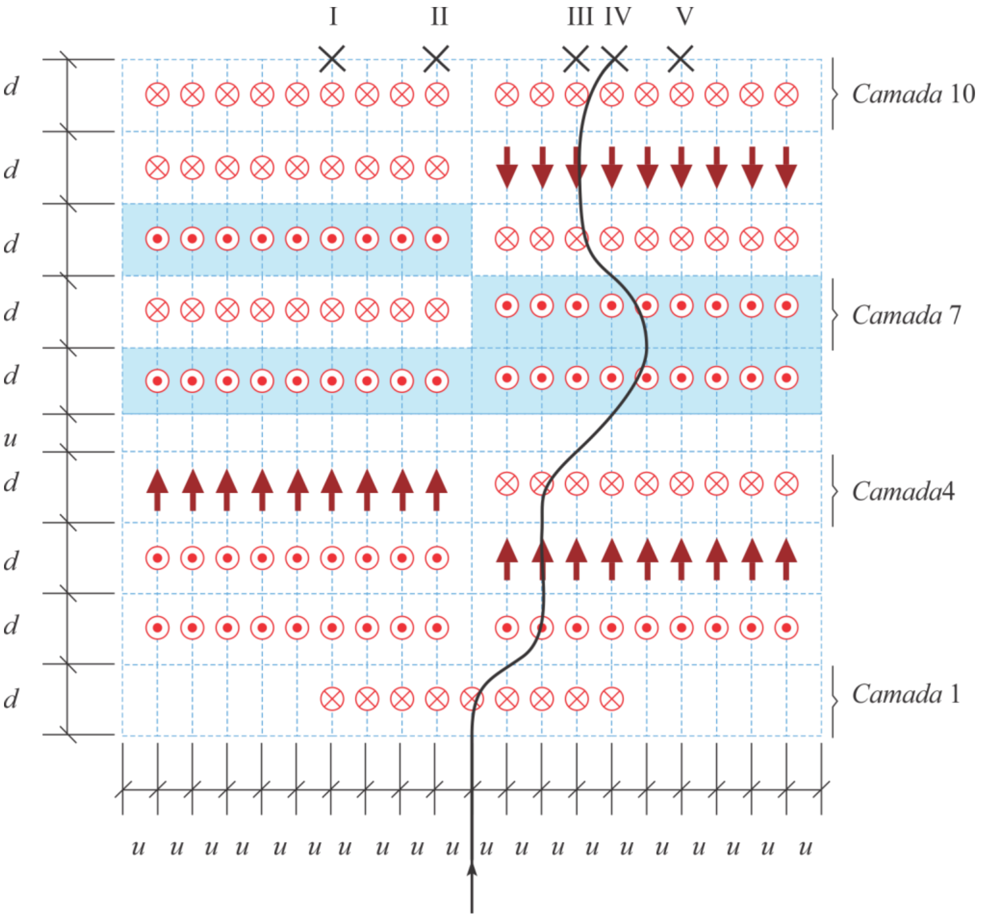
Um feixe de elétrons penetra em uma região, dividida em camadas espaçadas de acordo com as dimensões mostradas na figura, que está sujeita a um campo magnético heterogêneo. Em cada camada, a direção e o sentido do campo magnético mudam (vide figura), mas seu módulo será sempre constante. Note que na figura existem áreas desprovidas de campo magnético. Sabendo que, após passar pela primeira camada, o feixe descreve um arco de 1/8 de circunferência, ele sairá na camada 10 no ponto:

a) I
b) II
c) III
d) IV
e) V

Resolução:

Analisando a camada 1:





Trajetória circular:

$$\left.\begin{aligned} x = R - R\cdot\cos 45^\circ = R\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = u \\ d = R\cdot sen45^\circ = R\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\rangle \quad u = d\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Obs.:
- Para orientações de campo magnético entrando no plano temos F_{Mag} para direita.
- Para orientações de campo magnético saindo do plano temos F_{Mag} para esquerda.
- Para orientações de campo magnético paralelo à velocidade a partícula não sofre desvio.

Alternativa D.

QUÍMICA

Questão 31

Considere a seguinte reação em equilíbrio:

$$2SO_2(g) + O_2(g) \rightleftharpoons 2SO_3(g)$$

Dados:
- R = 8,3 J.(K.mol)$^{-1}$;
- In 1,6 = 0,47; e
- In 10 = 2,3.

Sabe-se que a constante de equilíbrio dessa reação é $4{,}0.10^{24}$, a 27 °C e $2{,}5.10^{10}$, a 227 °C. Qual a variação de entalpia padrão da reação, em kJ.mol^{-1}, considerando que ela seja constante nessa faixa de temperatura?

a) -8,3
b) 8,3
c) -74,1
d) -203,0
e) 0

Resolução:

A K_{eq} (constante de equilíbrio) varia com a temperatura conforme dito na questão.

$$T_1 \rightarrow \Delta G_1^0 = -RT_1\ \ell n K_1 \therefore \ell n K_1 = -\frac{\Delta G_1^0}{RT_1}$$

$$T_2 \rightarrow \Delta G_2^0 = -RT_2\ \ell n K_2 \therefore \ell n K_2 = -\frac{\Delta G_2^0}{RT_2}$$

$$\ell n\ K_1 - \ell n\ K_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\Delta G_2^0}{T_2} - \frac{\Delta G_1^0}{T_1}\right),$$

Assumindo $\Delta G^0 = \Delta H^0 - T\Delta S^0$ e considerando ΔS independente da temperatura (condição da questão),

$$\ell n\ K_1 - \ell n\ K_2 = \frac{1}{R}\left(\frac{\Delta H_2 - T_2\Delta S}{T_2} - \frac{\Delta H_1 - T_1\ \Delta S}{T_1}\right).$$

Assumindo o ΔH constante nessa faixa de temperatura,

$$\ell n\ K_1 - \ell n\ K_2 = \frac{\Delta H^0}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$\ell n\left(\frac{K_1}{K_2}\right) = \frac{\Delta H^0}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)$$

$$\ell n\left(\frac{4\cdot 10^{24}}{2{,}5\cdot 10^{10}}\right) = \frac{\Delta H^0}{8{,}3\ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}\left(\frac{1}{500K} - \frac{1}{300K}\right)$$

$$\ell n\left(1{,}6\cdot 10^{14}\right) = \frac{\Delta H^0}{8{,}3\ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}\left(-0{,}00133\ K^{-1}\right)$$

$$\frac{(\ell n\ 1{,}6 + 14\ \ell n\ 10)\cdot 8{,}3\ J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}{-0{,}00133\ K^{-1}} \therefore \Delta H \cong -203{,}8\ KJ/\text{mol}$$

Alternativa D.

Questão 32

Uma reação entre dois líquidos *A* e *B* produz dois compostos gasosos *C* e *D*, de acordo com a estequiometria *A* + *B* → *C* + *D*. Se conduzida a pressão e temperatura constantes, pode-se afirmar que:

a) a reação será sempre espontânea, se for endotérmica.
b) a reação será sempre espontânea, se for exotérmica.
c) a reação será sempre espontânea, independentemente de ser exotérmica ou endotérmica.
d) a reação nunca será espontânea, independentemente de ser exotérmica ou endotérmica.
e) não há como prever a espontaneidade da reação, mesmo que informações adicionais sobre o calor de reação estejam disponíveis.

Resolução:

$$A(l) + B(l) \longrightarrow C(g) + D(g)$$

$$\Delta S > 0$$

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

Como $\Delta S > 0,$ então o termo $T\Delta S < 0,$ logo, se $\Delta H < 0,$ a reação será espontânea.

Note que a reação produz gás, portanto $\Delta S > 0.$

Alternativa B.

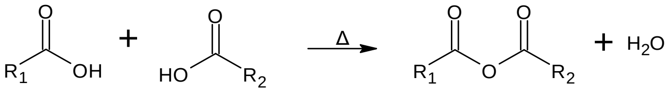
Questão 33

Na desidratação a alta temperatura de uma mistura reacional composta pelos ácidos fórmico, acético e propiônico, qual a quantidade máxima de diferentes anidridos que poderá ser obtido?

a) 3
b) 6
c) 8
d) 9
e) 27

Resolução:

Os anidridos orgânicos são formados pela desidratação intermolecular de dois ácidos carboxílicos.

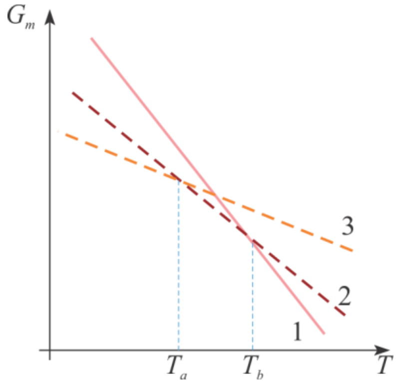


Podendo R_1 e R_2 serem iguais.
Como a mistura possui 3 monoácidos carboxílicos diferentes:
fórmico + fórmico
fórmico + acético
fórmico + propiônico
acético + acético
acético + propiônico
propiônico + propiônico
6 possibilidades.

Alternativa B.

Questão 34

O gráfico qualitativo abaixo ilustra a relação da energia livre de Gibbs molar (G_m) de uma substância pura com a temperatura (T) em seus estados sólido, líquido e gasoso.



Considere as afirmativas abaixo:

I. As três retas são decrescentes, pois a expressão $G_m = H_m - TS_m$ é representada por uma reta com inclinação definida pelo termo ($-S_m$).
II. As retas 1, 2 e 3 representam a substância nos estados sólido, líquido e gasoso, respectivamente.
III. A temperatura T_a indica o ponto de fusão da substância nas condições em que o gráfico foi obtido.
IV. Em temperaturas mais altas do que T_b, a fase 1 da substância é a mais estável.

Assinale as alternativas que são verdadeiras.

a) Somente I e II.
b) Somente III e IV.
c) Somente I, II e III.
d) Somente I, II e IV.
e) Somente I, III e IV.

Resolução:

G*m*: energia livre molar
H*m*: entalpia molar
T: temperatura
S*m*: entropia molar

I. (VERDADEIRO)
Como o gráfico é G x T, a inclinação será -S*m*.

II. (FALSO)
Pela inclinação das retas, quanto maior a inclinação, maior a entropia. Portanto,
Reta 1: maior inclinação, maior entropia, logo, representa a fase **gasosa**.
Reta 2: comparando com as retas 1 e 3, a reta 2 possui inclinação intermediária, logo, a entropia S_2 estará entre as entropias S_1 e S_3. Por isso, a reta 2 representa a fase **líquida**.
Reta 3: menor inclinação, menor entropia, logo, representa a fase **sólida**.
Nota: como a inclinação representa a entropia (S), conclui-se que $S_1 > S_2 > S_3$.

III. (VERDADEIRO)
Como as retas 2 e 3 se cruzam, sendo 2 e 3 as fases líquido e sólido, respectivamente, pode-se concluir que se tem um equilíbrio entre as duas fases, que é o equilíbrio de transição sólido/líquido, o ponto de fusão.

IV. (VERDADEIRO)
A fase 1 é a de menor energia livre, logo, é a de maior estabilidade.

Alternativa E.

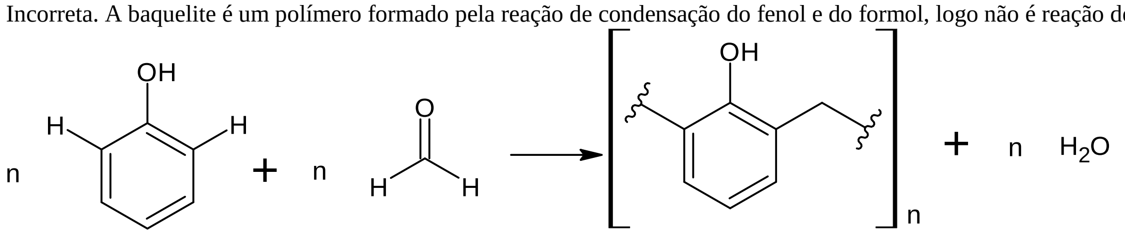
Questão 35

Assinale a afirmativa correta sobre as propriedades e características dos polímeros.

a) A dureza é uma propriedade física relacionada com a resistência à penetração ou ao risco e a cristalinidade com a ordem estrutural. Então, pode-se afirmar que polímeros semicristalinos possuem menor dureza que os amorfos.
b) A baquelite (polifenol) é formada pela reação de adição dos monômeros fenol e formaldeído, com a eliminação de água, sendo classificada como um polímero termofixo quanto a fusibilidade.
c) Os policarbonatos são usados em peças para atribuir transparência e resistência mecânica, devido a sua alta cristalinidade. Esses polímeros, que são semelhantes aos vidros, são classificados como termoplásticos quanto ao seu comportamento mecânico e podem ser moldados.
d) Os agentes plastificantes atuam entre as cadeias poliméricas, afastando-as umas das outras, o que reduz as forças de atração intermoleculares e, consequentemente, diminui a temperatura de transição vítrea (T_g) do polímero.
e) O Kevlar é uma fibra sintética polimérica presente em coletes balísticos, pois é muito resistente ao impacto mecânico. Sua alta resistência mecânica decorre das reticulações com ligações de hidrogênio presentes na sua cadeia polimérica, fornecendo uma baixa resistência à tração.

Resolução:

a) Incorreta. Quanto maior a cristalinidade de um polímero, maior a sua rigidez. As regiões não cristalinas contribuem para aumentar a flexibilidade de um polímero, devido à maior possibilidade de acomodação das cadeias carbônicas.
b) Incorreta. A baquelite é um polímero formado pela reação de condensação do fenol e do formol, logo não é reação de adição.



c) Incorreta. A alta cristalinidade significa que um polímero é feito por vários cristais, assim, ocorrem várias reflexões quando a luz tenta passar pelo polímero (entre as faces dos cristais), de forma que o polímero não fica translúcido. A afirmativa ficaria correta se fosse colocada a baixa cristalinidade dos policarbonatos.
d) Correta. A transição vítrea é a passagem do estado vítreo para um estado maleável, quanto menos intensas são as interações entre as cadeias poliméricas, mais fácil é essa passagem, ou seja, necessita-se de uma menor temperatura.
e) Incorreta. As ligações de hidrogênio entre as cadeias poliméricas geram uma alta resistência à tração, o que faz com que esse polímero possa ser utilizado em coletes à prova de balas.

Alternativa D.

Questão 36

É correto afirmar que:

a) o DNA é constituído por diferentes combinações dos aminoácidos citosina, guanina, adenina e timina, enquanto o RNA é constituído pelos aminoácidos citosina, guanina, adenina e uracila.
b) as proteínas são componentes importantes na dieta de praticamente todos os animais, uma vez que constituem a principal reserva de energia para os organismos.
c) a glicose e a frutose são exemplos de monossacarídeos, enquanto o amido e a celulose são exemplos de polissacarídeos.
d) as vitaminas são proteínas essenciais ao correto funcionamento do organismo dos seres humanos, geralmente atuando como coenzimas em reações bioquímicas.
e) os lipídios são compostos de origem biológica que se dissolvem em solventes polares.

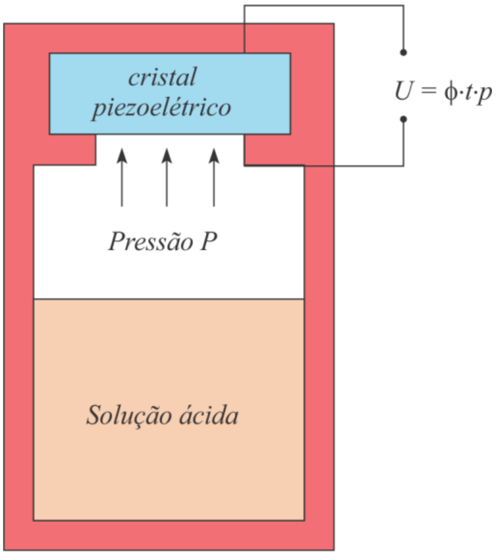
Resolução:

a) Incorreto. Citosina, guanina, adenina e timina são bases nitrogenadas que formam os nucleotídeos do DNA, e citosina, guanina, adenina e uracila os que constituem o RNA. Vale ressaltar que aminoácidos formam proteínas.
b) Incorreto. A principal reserva de energia se faz pelos carboidratos.
c) Correto. Glicose e frutose são hexoses (monossacarídeos), enquanto que o amido e a celulose são polissacarídeos formados pela polimerização da glicose.
d) Incorreto. Vitaminas não são proteínas, apesar de poderem agir em conjunto.
e) Incorreto. Os lipídeos são essencialmente apolares.

Alternativa C.

Questão 37

Bicarbonato de sódio reage estequiometricamente, em processo isotérmico a 300 K, com 50 ml de uma solução aquosa de um ácido monoprótico forte, em um recipiente rígido e fechado que, quando vazio, apresenta um volume útil de 74,9 mL, conforme o esboço a seguir:



O cristal piezoelétrico tem espessura (*t*) de 2 mm e suscetibilidade voltaica (Φ) de 0,050 V.(m.Pa)$^{-1}$ e, quando a reação atinge o equilíbrio, fornece um potencial elétrico (*U*) de 1,0 V. Considere a solubilidade molar de gases na água desprezível e a constante universal dos gases *R* = 8,3 J.(mol.K)$^{-1}$. Se o volume reacional é constante e igual ao volume da solução ácida inicial, a concentração molar inicial da solução do ácido monoprótico, em mol.L^{-1}, é:

a) 6
b) 2
c) 0,6
d) 0,002
e) 0,006

Resolução:

Dados: U = 1,0 V; Φ=0,050 V.(m.Pa^{-1}); t = 2 mm; R = 8,3 J.(mol.K)$^{-1}$
Utilizando a equação da voltagem dada temos:

$$U = \Phi \cdot t \cdot P$$

$$1{,}0 = 0{,}05 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot P$$

$$P = 10^{4}\ Pa$$

Como a solução ocupa um volume de 50 mL e o recipiente possui volume útil total de 74,9 mL, então o volume ocupado pelo gás é de 24,9 mL (24,9 . 10^{-6} m^{3}). Aplicando a equação de Clapeyron:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$10^{4} \cdot 24{,}9 \cdot 10^{-6} = n \cdot 8{,}31 \cdot 300$$

$$n \cong 0{,}0001\, mols = 10^{-4}\, mols$$

Da estequiometria da reação temos:

$$NaHCO_3 + HX \rightarrow NaX + H_2O + CO_2$$

$$\begin{array}{ll} 1mol & 1mol \\ y\,mols & 10^{-4}\,mols \therefore y = 10^{-4}\,mols \end{array}$$

Assim, a concentração molar será dada por:

$$M = \frac{y}{V} = \frac{10^{-4}}{50 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^{-3}\, mol.L^{-1}$$

Alternativa D.

Questão 38

Considere a célula eletroquímica abaixo:

$$Pt(s)|H_2(g)|HCl(aq)\|Hg_2Cl_2(s)|Hg(l)$$

Admita, ainda, a reação a seguir:

$$Hg_2Cl(s)+H_2(g)\rightarrow 2Hg(l)+2HCl(aq)$$

O potencial-padrão da célula acima a 294,5 K é +0,2678 V e a 302,5 K é +0,2638 V. Considere que tanto a entalpia, quanto a entropia de reação mudam muito pouco para variações de temperatura não muito amplas. A constante de Faraday é 96 500 C.mol^{-1}. A entropia-padrão da reação acima, a 298,15 K, em J.(K.mol)$^{-1}$, será aproximadamente:

a) -2,60
b) -48,20
c) -12,90
d) -96,50
e) -87,90

Resolução:

$$\begin{array}{c} \Delta G_1 = -nFE_1 \\ \Delta G_2 = -nFE_2 \\ \hline \Delta G_2 - \Delta G_1 = -nF(E_2 - E_1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} \Delta G_1 = \Delta H - T_1\Delta S \\ \Delta G_2 = \Delta H - T_2\Delta S \\ \hline \Delta G_2 - \Delta G_1 = -(T_2 - T_1)\Delta S \end{array}$$

Igualando as duas equações,

$$nF(E_2 - E_1) = (T_2 - T_1)\Delta S \therefore \Delta S = \frac{nF(E_2 - E_1)}{T_2 - T_1}$$

$$\Delta S = \frac{2\cdot 96500\cdot(0{,}2638 - 0{,}2678)}{302{,}5 - 294{,}5} \therefore \boxed{\Delta S = -96{,}5\frac{J}{mol\cdot K}}$$

Alternativa D.

Questão 39

Uma amostra de 390 g de sulfito de cálcio com 25% de impurezas, em massa, é atacada por ácido clorídrico concentrado em um meio reacional a 2 atm e 300 K. Considere comportamento ideal de gases.

Dados:

- massa molar do enxofre = 32 g.mol^{-1};
- massa molar do cálcio = 40 g.mol^{-1}; e
- massa molar do oxigênio = 16 g.mol^{-1}.

Pode-se afirmar que o volume, em litros, de anidrido sulforoso obtido pelo consumo completo do sulfito é:

a) 22,4
b) 30,0
c) 40,0
d) 54,6
e) 72,8

Resolução:

Cálculo da massa molar de $CaSO_3$
M = 40 + 32 + 3 . 16 = 120 g.mol^{-1}
A reação em questão e o cálculo estequiométrico envolvido são:

$$CaSO_3 + 2HC\ell \rightarrow CaC\ell_2 + H_2O + SO_2$$

$$\begin{array}{ll} 1mol & 1mol \\ 120g & 1mol \\ 0{,}75\cdot 390g & x mols \end{array}$$

$$\therefore x = \frac{0{,}75\cdot 390}{120} mols$$

Aplicando a equação de Clausius-Clapeyron:

$$P \cdot V = n \cdot R \cdot T$$
$$2 \cdot V = \frac{0,75 \cdot 390}{120} \cdot 0,082 \cdot 300$$
$$V \cong 30\, litros$$

Alternativa B.

Questão 40

Considere a representação simplificada dos seguintes decaimentos radioativos conhecidos:

$${}^{238}_{92}U \xrightarrow{x_1} {}^{234}_{90}Th$$
$${}^{234}_{90}Th \xrightarrow{x_2} {}^{234}_{91}Pa$$
$${}^{222}_{86}Rn \xrightarrow{x_3} {}^{218}_{84}Po$$
$${}^{218}_{84}Po \xrightarrow{x_4} {}^{214}_{82}Pb$$
$${}^{214}_{82}Pb \xrightarrow{x_5} {}^{214}_{83}Bi$$

Com relação aos decaimentos acima, é possível afirmar que:

a) o tório emite radiação alfa.
b) o radônio emite radiação alfa.
c) o urânio emite somente radiação gama.
d) o chumbo emite somente radiação gama.
e) somente o polônio emite radiação beta.

Resolução:

a) Incorreto.

$${}^{234}_{90}Th \to {}^{234}_{91}Th + {}^{A_2}_{Z_2}X_2$$
$$234 = 234 + A_2 \therefore A_2 = 0$$
$$90 = 91 + Z_2 \therefore Z_2 = -1$$

X_2 é partícula β (beta).

b) Correto

$${}^{222}_{86}Rn \to {}^{218}_{84}Po + {}^{A_3}_{Z_3}X_3$$
$$222 = 218 + A_3 \therefore A_3 = 4$$
$$86 = 84 + Z_3 \therefore Z_3 = 2$$

X_3 é partícula α (alfa).

c) Incorreto

$${}^{238}_{92}U \to {}^{234}_{90}Th + {}^{A_1}_{Z_1}X_1$$
$$238 = 234 + A_1 \therefore A_1 = 4$$
$$92 = 90 + Z_1 \therefore Z_1 = 2$$

A partícula X_1 é uma partícula α (alfa). Assim, além de emitir radiação γ (gama), emite partículas α (alfa).

d) Incorreto

$${}^{214}_{82}Pb \to {}^{214}_{83}Th + {}^{A_5}_{Z_5}X_5$$
$$214 = 214 + A_5 \therefore A_2 = 0$$
$$82 = 83 + Z_5 \therefore Z_5 = -1$$

X_5 é partícula β (beta)

e) Incorreto

$${}^{218}_{84}Po \to {}^{214}_{82}Pb + {}^{A_4}_{Z_4}X_4$$
$$218 = 214 + A_4 \therefore A_4 = 4$$
$$84 = 82 + Z_4 \therefore Z_4 = 2$$

O polônio está emitindo radiação α (alfa).

Alternativa B.

Matemática
Kellem Corrêa
Mateus Bezerra
Marcelo Salviano

Física
Anderson Marques
Rodrigo Bernadelli
João Paulo Botelho
Rodolfo Teixeira

Química
Emanuel Carvalho
Heitor Cruz

Colaboradores
Caíque Abraão
Fábio Augusto

Digitação e Diagramação
Igor Soares
Jessica Loumine
Pollyanna Chagas

Revisora
Thuanne Andrade

Desenhista
Rodrigo Ramos

Supervisão Editorial
Aline Alkmin

A Resolução Comentada das provas do IME
poderá ser obtida diretamente no site do ***GRUPO OLIMPO****.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida,
dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.
Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br