"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

2ª FASE
MATEMÁTICA

Questão 01

Calcule o (s) valor (es) de k real (is) para que o determinante da matriz abaixo seja igual a 24.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Resolução:

Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

adicionando os elementos da 1ª linha aos da 4ª linha, obtém-se

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

Disso, aplicando-se o Teorema de Laplace com os elementos da 3ª coluna, obtém-se:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{vmatrix},$$

o que implica det$A$ = 5k – 1. Com isso, sendo det$A$ = 24, 5k – 1 = 24, ou seja, k = 5. Assim, o único valor de k para o determinante de A ser 24 é k = 5.

Questão 02

Calcule os valores reais de x que completam a inequação $\sqrt{\log_3(x)+1} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}}(x^2) + \frac{7}{3} > 0.$

Resolução:

Seja a equação:

$$\sqrt{\log_3 x + 1} + \frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} x^2 + \frac{7}{3} > 0.$$

Fazendo as condições de existência:

$$\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x^2 > 0 \\ \log_3 x + 1 \geq 0 \end{array}\right\} x \geq \frac{1}{3}$$

Seja $\log_3 x = y$ e sabendo que $\frac{1}{3}\log_{\frac{1}{3}} x^2 = -\frac{2}{3}\log_3 x$:

$\sqrt{y+1} - \frac{2y}{3} + \frac{7}{3} > 0.$

$\rightarrow \sqrt{y+1} > \frac{2y-7}{3}$

Temos, então, dois casos:

<u>Caso 1;</u>

$y \geq -1$ e $\frac{2y-7}{3} < 0$:

$\frac{2y-7}{3} < 0 \rightarrow 2y < 7 \rightarrow y < \frac{7}{2}.$

$\log_3 x < \log_3 3^{7/2} \rightarrow \boxed{x < 3^{7/2}}$

Já $y \geq -1$ representa $x \geq \frac{1}{3}$ (já feito na condição de existência). Temos, então, nesse Caso 1: $\frac{1}{3} \leq x < 3^{7/2}$.

<u>Caso 2;</u>

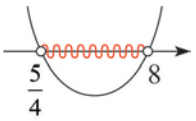
$y > -1,\ \frac{2y-7}{3} \geq 0$ e $9(y+1) > (2y-7)^2$

Nesse caso, temos

$y > -1 \rightarrow x > \frac{1}{3}$ (I)

$\frac{2y-7}{3} \geq 0 \rightarrow x \geq 3^{7/2}$ (II)

$9(y+1) > (2y-7)^2 \rightarrow 4y^2 - 37y + 40 > 0$

As soluções para y são: 

Então

$\frac{5}{4} < y < 8$

$\rightarrow 3^{5/4} < x < 6561$ (III)

Fazendo (I) $\cap$ (II) $\cap$ (III), temos:

$3^{7/2} \leq x < 6561.$

Unindo o Caso 1 ao Caso 2, temos

Resposta: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{1}{3} \leq x < 6561 \right\}$

Questão 03

Considere uma progressão aritmética (PA) de números inteiros com razão $p > 2$, seu primeiro termo maior do que 2 e seu último termo menor do que 47. Retirando-se uma determinada quantidade de elementos da PA, recai-se em uma PG de 3 elementos e razão $q > 2$. Para p e q inteiros, p diferente de q, determine a PA cuja soma de seus elementos seja a maior possível.

Resolução:

Sejam $(a_1, a_2, ..., a_n)$ a *PA* e (b_1, b_2, b_3) a *PG* de razões *p* e *q*, respectivamente. Como $q > 2$, começamos a análise com $q = 3$.

Notemos que, se $q \geq 4$, então $b_3 = q^2 \cdot b_1 \geq 16\, b_1 \geq 16 \cdot 3 = 48$, pois $b_1 \geq 3$, já que a *PA* tem $a_1 > 2$ e razão $p > 2$. Isso nos gera uma situação impossível.

Logo, $\boxed{q = 3}$.

Então $PG\,(b_1,\ 3b_1,\ 9b_1)$

Como $a_n < 47$, temos $9b_1 < 47 \Leftrightarrow \boxed{b_1 \leq 5}$

Mas $b_1 = a_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, com $a_1 \geq 3$.

Como $p > 2$, temos $a_2 = a_1 + p \geq 6$. Com isso, $b_1 = a_1 \in \{3, 4, 5\}$, já que $a_n > a_{n-1} > ... > a_2 > a_1$.

Sabemos que $p > 2$ e $p \neq q = 3$. Para $p = 4$, temos $a_n = a_1 + (n-1)\cdot 4 < 47 \Leftrightarrow n \leq 11$, pois $3 \leq a_1 \leq 5$. Para obtermos soma máxima da *PA*, analisamos os três casos abaixo:

(i) $PA(3, 7, 11, ..., 45) \to 9 \notin PA$

$$S_i = (a_1 + a_n)\times\frac{n}{2} = 46\times\frac{11}{2} = 23\times 11$$

(ii) $PA(4, 8, 12, ..., 44) \to 12 \in PA \; e \; 36 \in PA$

$$S_{ii} = (a_1 + a_n)\times\frac{n}{2} = 48\times\frac{11}{2} = 24\times 11$$

(iii) $PA(5, 9, 13, ..., 45) \to 15 \notin PA$

$$S_{iii} = (a_1 + a_n)\times\frac{n}{2} = 50\times\frac{11}{2} = 25\times 11$$

Logo, para $p = 4$, a soma máxima é $(4+44)\times\frac{11}{2} = 24\times 11 = 264$.

Para $p \geq 5$, temos: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot p < 47 \Leftrightarrow (n-1) < \frac{47 - a_1}{p} < \frac{47-3}{5} \Rightarrow n \leq 9$

$$S = (a_1 + a_n)\times\frac{n}{2} \leq (3+46)\times\frac{9}{2} < 264.$$

Logo, a soma máxima da *PA* é, de fato, $\boxed{264}$ e a *PA* é tal que $a_1 = 4$ e $p = 4$, com 11 termos: $(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)$.

Questão 04

O polinômio $1 - y + y^2 - y^3 + \cdots - y^{19} + y^{20}$ pode ser escrito da seguinte forma $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_{19} x^{19} + a_{20} x^{20}$ em que $x = y + 1$ e a, são constantes reais. Calcule o valor numérico de a_3.

Resolução:

Sendo

$$p = y^{20} - y^{19} + \cdots - y^3 + y^2 - y + 1,$$

com $y = x - 1$, obtém-se

$$p = (x-1)^{20} - (x-1)^{19} + \cdots - (x-1)^3 + (x-1)^2 - (x-1) + 1.$$

Lembrando que

$$(x-1)^m = \sum_{k-0}^{m}\binom{m}{k}x^{m-k}\cdot(-1)^k,$$

com $k = 0, 1, \cdots, m$, tem-se que

$$\alpha_3 = -\binom{20}{17} - \binom{19}{16} - \binom{18}{15} - \cdots - \binom{4}{1} - \binom{3}{0},$$

ou ainda,

$$\alpha_3 = -\binom{20}{3} - \binom{19}{3} - \binom{18}{3} - \cdots - \binom{4}{3} - \binom{3}{3}.$$

Assim, sabendo que

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \cdots + \binom{19}{3} + \binom{20}{3} = \binom{21}{4},$$

conclui-se que

$$\alpha_3 = -\binom{21}{4},$$

ou ainda, $\alpha_3 = -5985$.

Questão 05

Determine o lugar geométrico dos pontos *h* do plano complexo $h = \frac{4 + w + 2i}{2 - wi}$, em que $w \in \mathbb{R}$ e $1^2 = -1$.

Resolução:

Seja $h=\dfrac{4+w+2i}{2-wi}\cdot\dfrac{(2+wi)}{(2+wi)}$

então $h=\underbrace{\dfrac{8}{w^2+4}}_{x}+\underbrace{\dfrac{w^2+4w+4}{w^2+4}}_{y}\cdot i$

Temos então

$x=\dfrac{8}{w^2+4}\Rightarrow \boxed{0<x\le 2}$

$y=1+\dfrac{4w}{w^2+4}\Rightarrow$ Como $w^2+4\ge 2\sqrt{w^2\cdot 4}\,(MA\ge MG)$,

então $w^2+4\ge 4|w|\Rightarrow \boxed{0\le y\le 2}$

Com isso, temos $(y-1)^2=\dfrac{16w^2}{w^4+8w^2+16}\quad (1)$

e $x(w^2+4)=8\Rightarrow w^2=\dfrac{8-4x}{x}\quad (2)$

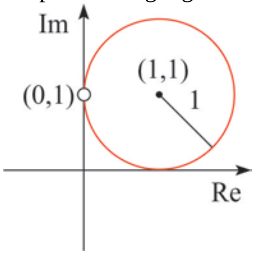
Substituindo (2) em (1), temos:

$$(y-1)^2=\frac{16\cdot\left(\frac{8-4x}{x}\right)}{\left(\frac{8-4x}{x}\right)^2+8\cdot\left(\frac{8-4x}{x}\right)+16}=-x^2+2x$$

então $x^2-2x+1+(y-1)^2=1\Rightarrow \boxed{(x-1)^2+(y-1)^2=1}$

Como $0<x\le 2$ e $0\le y\le 2$.

Resposta: O lugar geométrico, no plano complexo, é uma circunferência de centro (1,1), raio 1, com exceção do ponto (0,1).



Questão 06

Suponha que em cada pacote do cereal CROK contenha um cupom com uma das letras da palavra CROK. Um consumidor que tenha todas as letras desse cereal ganha um pacote. Considere que todas as letras tenham a mesma probabilidade de aparecer no pacote. Determine a probabilidade de que um consumidor, que tenha comprado 10 pacotes desse cereal, ganhe pelo menos um pacote.

Resolução:

Vamos calcular a probabilidade pedida por $1-P$, em que P é a probabilidade de não formar CROK nos 10 pacotes.

Então, $P=\dfrac{\text{número de casos favoráveis}}{4^{10}}$, pois o total é 4^{10}.

Para contar os casos de P, temos que contar o número de elementos de $A\cup B\cup C\cup D$, , em que:

A: não recebe letra C

B: não recebe letra R

C: não recebe letra O

D: não recebe letra K

$n(A)=n(B)=n(C)=n(D)=3^{10}$
$n(A\cap B)=n(A\cap C)=n(A\cap D)=n(B\cap C)=n(B\cap D)=n(C\cap D)=2^{10}$
$n(A\cap B\cap C)=n(A\cap B\cap D)=n(B\cap C\cap D)=n(A\cap C\cap D)=1$
$n(A\cap B\cap C\cap D)=0 \quad (\text{impossível})$
Pelo princípio da inclusão e da exclusão:
$n(A\cup B\cup C\cup D)=4\cdot 3^{10}-6\cdot 2^{10}+4$

Logo, $P=\dfrac{4\cdot 3^{10}-6\cdot 2^{10}+4}{4^{10}}$ e $1-P=\dfrac{4^{10}-4\cdot 3^{10}+6\cdot 2^{10}-4}{4^{10}}\cong \boxed{78,06\%}$

Questão 07

Seja ABC um triângulo tal que $2\operatorname{sen}(\hat{A})-\operatorname{sen}(\hat{B})-\operatorname{sen}(\hat{C})=0.$ Prove que o valor de $\cot g\dfrac{(\hat{B})}{2}\cot g\dfrac{(\hat{C})}{2}$ é um número inteiro e o determine.

Observação: $\cot g(\hat{A})$ é a cotangente do ângulo $\hat{A}$.

Resolução:

Tem-se que

$$2\operatorname{sen}\hat{A}=\operatorname{sen}\hat{B}+\operatorname{sen}\hat{C},$$

ou ainda,

$$2\operatorname{sen}\hat{A}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}.$$

Com

$$\operatorname{sen}\hat{A}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2} \text{ e } \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^{\circ},$$

obtém-se

$$4\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{A}}{2}=2\operatorname{sen}\left(90^{\circ}-\frac{\hat{A}}{2}\right)\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}.$$

Disso, sabendo que $\operatorname{sen}\left(90^{\circ}-\dfrac{\hat{A}}{2}\right)=\cos\dfrac{\hat{A}}{2}$, tem-se que

$$\cos\frac{\hat{A}}{2}.\left(2\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}-\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}\right)=0,$$

o que implica

$$\cos\frac{\hat{A}}{2}=0 \text{ ou } \cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}.$$

Considerando que $0^{\circ}<\dfrac{\hat{A}}{2}<90^{\circ}$, $\cos\dfrac{\hat{A}}{2}\neq 0.$, Isso significa que

$$\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\hat{A}}{2}.$$

Sendo

$$y=\operatorname{cotg}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\hat{C}}{2},$$

tem-se que

$$y=\frac{\cos\frac{\hat{B}}{2}\cdot\cos\frac{\hat{C}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}}.$$

Contando que

$$\operatorname{sen}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{sen}\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}-\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{2} \text{ e } \cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\cos\frac{\hat{B}-\hat{C}}{2}+\cos\frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}}{2},$$

obtém-se

$$y=\frac{\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}+\cos\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}{\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}-\cos\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}}.$$

Lembrando que

$$\cos\frac{\widehat{B}-\widehat{C}}{2}=2\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2}\ \text{ e }\ \cos\frac{\widehat{B}+\widehat{C}}{2}=\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2},$$

obtém-se

$$y=\frac{3\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\widehat{A}}{2}},$$

o que implica $y=3$. Assim, $\operatorname{cotg}\frac{\widehat{B}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\widehat{C}}{2}$ é um número inteiro tal que

$\operatorname{cotg}\frac{\widehat{B}}{2}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\widehat{C}}{2}=3$.

Questão 08

Considere as retas que contêm o ponto $C(3,3)$ e interceptam os eixos coordenados x e y nos pontos A e B, respectivamente. O ponto P pertence à reta AB, e sua distância do ponto A é a terça parte do comprimento do segmento AB. Identifique o lugar geométrico do ponto P e escreva a sua equação.

Resolução:

Como as retas interceptam os eixos x e y e passam por (3,3), necessariamente são inclinadas do tipo $y = ax + b$, com a $\neq 0$.

$y=ax+b\xrightarrow{(3,3)}3=3a+b\rightarrow\boxed{b=3-3a}$

Então a equação da reta é $y = ax + (3 - 3a)$

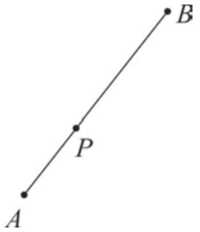
Ponto $A\Rightarrow y=0\rightarrow x=\frac{3a-3}{a}\ (pois\ a\neq 0)$,

então $A=\left(3-\frac{3}{a},0\right)$.

Ponto $B\Rightarrow x=0\rightarrow y=3-3a$.

Então $B=(0,\ 3-3a)$.

Seja o segmento AB, caso o ponto P seja interno:



Como $\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$, então

$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{1}{2}$.

ou seja, P divide o segmento $\overline{AB}$ na razão de secção interna $k=\frac{1}{2}$.

Então:

$\vec{P}=\frac{\vec{A}+k\cdot\vec{B}}{1+k}$

$$\vec{P}=\frac{\left(3-\frac{3}{a},0\right)+\frac{1}{2}\cdot(0,3-3a)}{1+\frac{1}{2}}$$

$$\vec{P}=\left(\underbrace{2-\frac{2}{a}}_{x},\ \underbrace{1-a}_{y}\right)$$

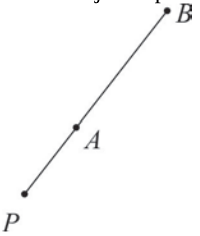
Para encontrar o lugar geométrico:

$x=2-\frac{2}{a}$

$y=1-a\rightarrow\boxed{a=1-y}$, então:

$x=2-\frac{2}{1-y}\rightarrow\boxed{(x-2)(y-1)=2}$

Caso P seja um ponto externo, temos:



$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{1}{4}$$

Então:

$$\vec{P}=\frac{\vec{A}-k\cdot\vec{B}}{1-k}=\frac{\left(3-\frac{3}{a},0\right)-\frac{1}{4}(0,3-3a)}{1-\frac{1}{4}}$$

$$\vec{P}=\left(\underbrace{4-\frac{4}{a}}_{x},\ \underbrace{a-1}_{y}\right)$$

$$\begin{cases}x=4-\frac{4}{a}\\ y=a-1\end{cases}\rightarrow x=4-\frac{4}{y+1}\rightarrow(x-4)(y+1)=-4$$

Resposta: O lugar geométrico é a união de duas hipérboles equiláteras de equações $(x-2)\ (y-1)=2$ e $(x-4)\ (y+1)=-4$

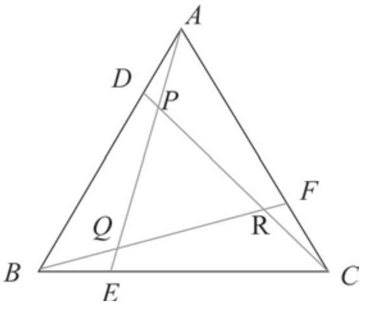
Questão 09

Sejam os pontos *D*, *E* e *F* pertencentes, respectivamente, aos lados *AB*, *BC* e *AC* do triângulo *ABC*, tais que *BD* = 3*AD*, *AF* = 3*CF* e *CE* = 3*BE*. Sendo $P=AE\cap CD,\ Q=AE\cup BF$ e $R=BF\cap CD,$ calcule $\frac{[PQR]}{[ABC]}$.

Observação: $[XYZ]$ é a área do triângulo *XYZ*.

Resolução:

Considere a figura



No ΔAEC, com o teorema de Menelaus, obtém-se

$AQ \cdot BE \cdot CF = AF \cdot BC \cdot QE$ **.**

Sendo $AF = 3CF$ e $BC = 4BE$, conclui-se que $AQ = 12QE$. Com isso, sendo $[BQE] = x$, $[ABE] = 13x$. Com $[ABE] = 13x$ e $BC = 4BE$, $[ABC] = 52x$.

No ΔBFA, com o teorema de Menelaus, obtém-se

$BR \cdot CF \cdot AD = BD \cdot AC \cdot RF$ **.**

Sendo $BD = 3AD$ e $AC = 4CF$, conclui-se que $BR = 12RF$. Com isso e considerando que $[BFC] = 13x$, pois $AC = 4CF$, é certo que $[RFC] = x$.

No ΔCBD, com o teorema de Menelaus, obtém-se

$CP \cdot AD \cdot BE = CE \cdot AB \cdot DP$ **.**

Sendo $CE = 3BE$ e $AB = 4AD$, conclui-se que $CP = 12DP$. Com isso e considerando que $[CDA] = 13x$, pois $AB = 4AD$, é certo dizer que $[DPA] = x$.

Agora, levando-se em consideração que

$[PQR] = [ABC] - [ABE] - [BFC] - [CDA] + [BQE] + [RFC] + [DPA]$ **,**

obtém-se $[PQR] = 16x$.

Assim,

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{16x}{52x},$$

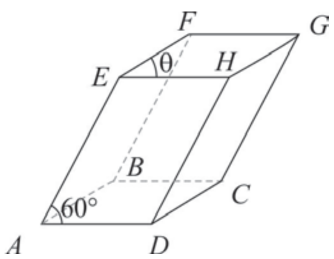
ou ainda,

$$\frac{[PQR]}{[ABC]} = \frac{4}{13}.$$

Questão 10

Um paralelepípedo oblíquo ABCD - EFGH possui todas as arestas com comprimento a. O plano que contém ABFE forma um ângulo de 60° com o plano que contém ABCD. O ângulo do vértice E da face ABFE é 120°. Se θ for o ângulo do vértice E do paralelogramo, contido na base superior EFGH do paralelepípedo, determine o volume do paralelepípedo em função da aresta a e do ângulo θ.

Resolução:

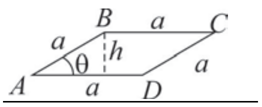


$A\hat{E}F = 120°$, $E\hat{A}D = 60° = F\hat{B}C$ ¨

$F\hat{E}H = \theta$

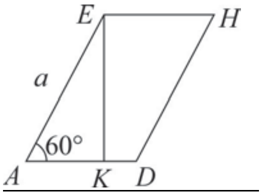
Todas as arestas medem a

<u>Área da base:</u>



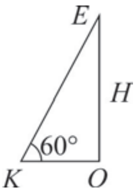
$A_b = a \cdot h = \boxed{a^2 sen\theta}$

Altura: é a distância entre as faces *ABCD* e *EFGH*. Começamos com a altura partindo de *E* na face *ADHE*:



$\overline{EK} = a\,sen\,60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Agora, $\overline{EK}$ será a hipotenusa para encontrarmos a altura do sólido.



O ângulo $E\widehat{K}O$ vale 60° pois é o mesmo de *EÂB* = 180° - *AÊF* = 60°.

Logo, $H = \overline{EK}\ sen\,60° = \frac{3a}{4}$

Portanto, o volume é

$$V = A_b \cdot 4 = (a^2 sen\theta)\left(\frac{3a}{4}\right) = \frac{3a^3 sen\theta}{4}$$

Matemática
Kellem Correa
Mateus Bezerra
Marcello Salviano

Colaboradores
Caíque Abraão
Murillo Margarida

Digitação e Diagramação
Igor Soares
Isabella Maciel
Márcia Samper
Pollyanna Chagas

Revisor
Gleydson Vieira

Desenhista
Rodrigo Ramos

Supervisão Editorial
Fernando Oliveira

A Resolução Comentada das provas do IME
*poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida,
dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.
Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br