2012 IME

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão r, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão q, com q e $r \in \mathbb{N}^*$ (natural diferente de zero). Determine:

A) o menor valor possível para a razão r;
B) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

Resolução:

A) $PG(a_2,\, a_2+5r,\, a_2+25r)$

Simplificando a notação: $a_2 = a$

$PG(a,\, a+5r,\, a+25r)$

$a+5r = \sqrt{a\cdot(a+25r)}$

$(a+5r)^2 = a^2+25ar$

$a^2+10ar+25r^2 = a^2+25ar$

$25r^2 = 15ar \Rightarrow r = \dfrac{3a}{5}$

Para $a=5$, $r=3$ é o menor valor de r.

B) $a_2 = 5,\, r=3$

$a_{18} = a_2 + 16r$

$a_{18} = 5+16\cdot 3 = 53$

Questão 02

Os números reais positivos x_1, x_2 e x_3 são raízes da equação $x^3 - ax^2 = a^b - \dfrac{b}{2}x$, sendo $b \in \mathbb{N}$ (natural), $a \in \mathbb{R}$ (real) e $a \neq 1$. Determine, em função de a e b, o valor de $\log_a\left[x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right]^b$.

Resolução:

$$x^3 - ax^2 + \frac{b}{2}x - a^b = 0$$

$$x_1+x_2+x_3 = \frac{-(-a)}{1} = a \qquad (1)$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = \frac{\frac{b}{2}}{1} = \frac{b}{2}$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{-(-a^b)}{1} = a^b$$

De (1) vem:

$$(x_1+x_2+x_3)^2 = a^2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\underbrace{(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}_{\frac{b}{2}} = a^2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2 = a^2-b$$

Logo:

$$\log_a\left[x_1x_2x_3\left(x_1+x_2+x_3\right)^{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\right]^b=$$

$$=\log_a\left[a^b\cdot a^{a^2-b}\right]^b=$$

$$=\log_a\left(a^{a^2}\right)^b=\log_a a^{a^2\cdot b}=a^2b$$

Questão 03

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são $105^\circ, \alpha$ e β. Sabendo que $m \in \mathrm{IR}$ (real), determine:

A) as raízes da equação $3\sec x+m\left(\sqrt{3}\cos x-3\,\mathrm{sen}\,x\right)=3\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$, em função de m;

B) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

Resolução:

A) $3\sec x+m\left(\sqrt{3}\cos x-3\,\mathrm{sen}\,x\right)=3\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x$

Dividido por $\cos x$:

$3\sec^2 x+m\left(\sqrt{3}-3\,\mathrm{tg}\,x\right)=3+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x$

Lembrando que $\sec^2 x=1+\mathrm{tg}^2 x$:

$3+3\,\mathrm{tg}^2x+m\sqrt{3}\ -3m\,\mathrm{tg}\,x-3-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x=0$

$3\,\mathrm{tg}^2 x-\left(3m+\sqrt{3}\right)\mathrm{tg}\,x+m\sqrt{3}=0$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{3m+\sqrt{3}\pm\sqrt{9m^2+6\sqrt{3}m+3-12\sqrt{3}m}}{6}$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{3m+\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(3m-\sqrt{3}\right)^2}}{6}$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{3m+\sqrt{3}\pm\left(3m-\sqrt{3}\right)}{6}$$

$\mathrm{tg}\,x=m$ ou $\mathrm{tg}\,x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$S=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x=\mathrm{arc\ tg}\ m+K\pi \text{ ou } x=\dfrac{\pi}{6}+K\pi, \forall K\in\mathbb{Z}\right\}$

B) $\alpha=30^\circ$ e $\alpha+\beta+105^\circ=180^\circ \Rightarrow \beta=45^\circ$

$\therefore \mathrm{tg}\,45^\circ=m \Rightarrow m=1.$

Questão 04

Seja o número complexo $Z=a+bi$, com a e $b\in\mathrm{IR}$ (real) e $i=\sqrt{-1}$. Determine o módulo de Z sabendo que
$\begin{cases} a^3=3\left(1+ab^2\right) \\ b^3=3\left(a^2b-1\right)\end{cases}$.

Resolução:

$Z=a+bi$

$Z^3=\left(a+bi\right)^3=a^3+3a^2bi+3ab^2i^2+b^3i^3$

$Z^3=a^3-3ab^2+i\left(3a^2b-b^3\right)$

Lembrando que $a^3=3+3ab^2$ e $-b^3=-3a^2b+3$ vem:

$Z^3=3+3ab^2-3ab^2+i(3a^2b-3a^2b+3)$

$Z^3=3+3i$

$\left|Z^3\right|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

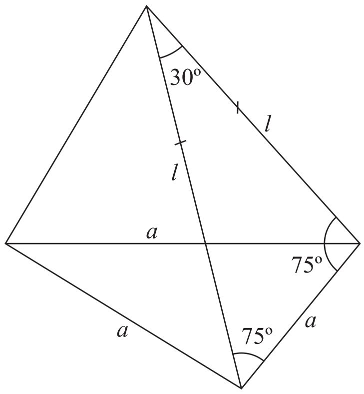
Como $|Z|=\sqrt[3]{\left|Z^3\right|}$ vem: $|Z|=\sqrt[3]{\sqrt{18}}=\sqrt[6]{18}$.

Questão 05

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

Resolução:

A área da face lateral é $S = \dfrac{l \cdot l \cdot a}{4R}$ onde R é o raio da circunferência circunscrita.

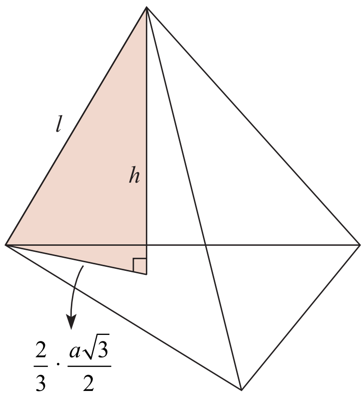


Mas, $\dfrac{\ell \cdot \ell \cdot a}{4R} = \dfrac{\ell \cdot \ell \cdot \text{sen}\,30^\circ}{2} \Rightarrow R = a$.

Basta obter a em função do volume V.

$$\frac{\ell}{\text{sen}\,75^\circ} = \frac{a}{\text{sen}\,30^\circ}$$

$$\frac{\ell}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{a}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ell = a \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$$



$$\ell^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\frac{8+4\sqrt{3}}{4}a^2 = h^2 + \frac{a^2}{3}$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)a^2 = h^2 + \frac{a^2}{3}$$

$$h^2 = a^2\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$h^2 = a^2\left(\frac{18+9\sqrt{3}-3}{9}\right)$$

$$h = a\frac{\sqrt{15+9\sqrt{3}}}{3}$$

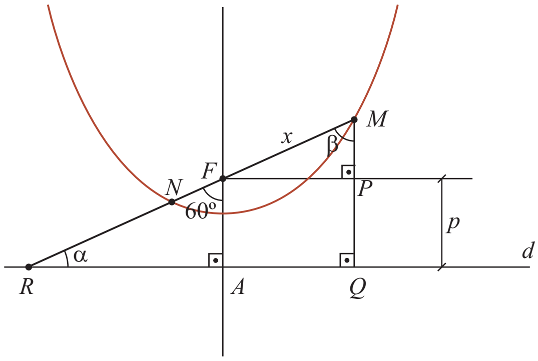
$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{15+9\sqrt{3}}}{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{45+27\sqrt{3}}}{36} \quad \therefore \quad R = a = \sqrt[3]{\frac{36\,V}{\sqrt{45+27\sqrt{3}}}} = \sqrt[3]{\frac{12\,V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}$$

Questão 06

É dada uma parábola de parâmetro p. Traça-se a corda focal MN, que possui uma inclinação de 60° em relação ao eixo de simetria da parábola. A projeção do ponto M sobre a diretriz é o ponto Q, e o prolongamento de corda MN intercepta a diretriz no ponto R. Determine o perímetro do triângulo MQR em função do p, sabendo que N encontra-se no interior do segmento MR.

Resolução:



$FA = p$

$\alpha + 60^\circ + 90 = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{FA}{FR} \Rightarrow \operatorname{sen}30^\circ = \dfrac{p}{FR} \Rightarrow FR = 2p$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{FA}{AR} \Rightarrow \operatorname{tg}30^\circ = \dfrac{p}{AR} \Rightarrow AR = p\cdot\sqrt{3}$

Como M está sobre a parábola, $MQ = MF = x$.

Por F tracemos uma paralela à diretriz d:

$\beta + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$ e $\alpha = 30^\circ$, logo $\beta = 60^\circ$.

$MP = MQ - PQ = x - p$

$\cos\beta = \dfrac{MP}{MF} \Rightarrow \cos 60^\circ = \dfrac{x-p}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{x-p}{x} \Rightarrow x = 2p$

$\operatorname{sen}\beta = \dfrac{FP}{MF} \Rightarrow \operatorname{sen}60^\circ = \dfrac{FP}{2p} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{FP}{2p} \Rightarrow FP = p\sqrt{3}$

Como $FPQA$ é retângulo, $AQ = FP = p\sqrt{3}$

Seja y o perímetro do triângulo MQR:

$y = MQ + AQ + AR + FR + MF$

$y = 2p + p\sqrt{3} + p\sqrt{3} + 2p + 2p$

$y = 6p + 2p\sqrt{3} = 2p\left(3+\sqrt{3}\right)$

Questão 07

Sejam r e $s \in \mathbb{Z}$ (inteiro). Prove que $(2r+3s)$ é múltiplo de 17 se e somente se $(9r+5s)$ é múltiplo de 17.

Resolução:

Prova da ida:

Se $(2r+3s)$ é múltiplo de 17, somar ou subtrair múltiplos de 17 gera outros múltiplos.

$2r + 3s \equiv 0 \bmod 17$

$2r + 34r + 3s + 17s \equiv 0 \bmod 17$

$36r + 20s \equiv 0 \bmod 17 \qquad (\div 4)$

$9r + 5s \equiv 0 \bmod 17$

Prova da volta:

$9r + 5s \equiv 0 \bmod 17 \qquad (\times 4)$

$36r + 20s \equiv 0 \bmod 17$

$36r - 34r + 20s - 17s \equiv 0 \bmod 17$

$2r + 3s \equiv 0 \bmod 17$

c.q.d

Questão 08

Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

Resolução:

Seja $A = \begin{bmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{bmatrix}$ e $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Notemos que $\det M \neq 0$.

$\therefore \det A = 0 \Leftrightarrow \det(AM) = 0$

Calculando $A \cdot M$:

$$A \cdot M = \begin{bmatrix} x+a+b+c & x+a-b-c & x-a+b-c & x-a-b+c \\ x+a+b+c & x+a-b-c & -x+a-b+c & -x+a+b-c \\ x+a+b+c & -x-a+b+c & x-a+b-c & -x+a+b-c \\ x+a+b+c & -x-a+b+c & -x+a-b+c & x-a-b+c \end{bmatrix}$$

Logo a função polinomial do quarto grau $f(x) = \det A$ tem como raízes $-a-b-c$, $b+c-a$, $a+c-b$ e $a+b-c$, valores de x que anulam as colunas 1, 2, 3 e 4 respectivamente.

Questão 09

Considere uma reta r que passa pelo ponto $P(2,\ 3)$. A reta r intercepta a curva $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ nos pontos A e B. Determine:

a) o lugar geométrico definido pela curva;

b) a(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$.

Resolução:

a) $x^2 - 2xy - y^2 = 0$

$y^2 + 2xy - x^2 = 0$

$y = \dfrac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4x^2}}{2}$

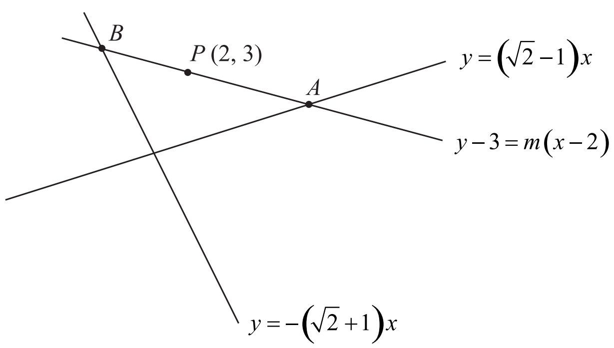
$y = \dfrac{-2x \pm 2x \cdot \sqrt{2}}{2}$

$y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$ ou $y = -\left(\sqrt{2} + 1\right)x$

Equações de duas retas perpendiculares, pois

$\left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot \left[-\left(\sqrt{2} + 1\right)\right] = -1.$

b)



Coordenadas de A:

$\begin{cases} y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x \\ y = mx - 2m + 3 \end{cases}$

$x = \dfrac{3-2m}{\sqrt{2}-1-m}$ e $y = \dfrac{3\sqrt{2}-3-2m\sqrt{2}+2m}{\sqrt{2}-1-m}$

Coordenadas de B:

$$\begin{cases} y = -\left(\sqrt{2}+1\right)x \\ y = mx-2m+3 \end{cases}$$

$x = \dfrac{2m-3}{\sqrt{2}+1+m}$ e $y = \dfrac{3\sqrt{2}+3-2m\sqrt{2}-2m}{\sqrt{2}+1+m}$

$PA \cdot PB = 17$

$$\sqrt{\left(\frac{3-2m}{\sqrt{2}-1-m}-2\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}-3-2m\sqrt{2}+2m}{\sqrt{2}-1-m}-3\right)^2}\ \sqrt{\left(\frac{2m-3}{\sqrt{2}+1+m}-2\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}+3-2m\sqrt{2}-2m}{\sqrt{2}+1+m}-3\right)^2}=17$$

$$\sqrt{\frac{\left(5-2\sqrt{2}\right)^2+\left(5m-2m\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-1-m\right)^2}}\cdot\sqrt{\frac{\left(+5+2\sqrt{2}\right)^2+\left(+5m+2m\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1+m\right)^2}}=17$$

$$\sqrt{\frac{\left(5-2\sqrt{2}\right)^2\left(1+m^2\right)}{\left(\sqrt{2}-1-m\right)^2}\cdot\frac{\left(5+2\sqrt{2}\right)^2\left(1+m^2\right)}{\left(\sqrt{2}+1+m\right)^2}}=17$$

$$\frac{\left(5-2\sqrt{2}\right)\left(5+2\sqrt{2}\right)\left(1+m^2\right)}{\left|\sqrt{2}-1-m\right|\left|\sqrt{2}+1+m\right|}=17$$

$$1+m^2=\left|\sqrt{2}-1-m\right|\left|\sqrt{2}+1+m\right|$$

$$1+m^2=\left|\left[\sqrt{2}-(1+m)\right]\cdot\left[\sqrt{2}+(1+m)\right]\right|$$

$$1+m^2=\left|2-(1+m)^2\right|$$

$$1+m^2=\left|2-1-2m-m^2\right|$$

$$1+m^2=\left|1-2m-m^2\right|$$

$1+m^2=1-2m-m^2$ ou $1+m^2=-1+2m+m^2$

$m^2+m=0$ ou $m=1$

$m=0$ ou $m=-1$ ou $m=1$

$\therefore$ As possíveis retas seriam:

$y-3=0(x-2)\Rightarrow y=3$

$y-3=-1(x-2)\Rightarrow y=-x+5$

$y-3=1(x-2)\Rightarrow y=x+1$

Questão 10

Os nove elementos de uma matriz M quadrada de ordem 3 são preenchidos aleatoriamente com os números 1 ou -1, com a mesma probabilidade de ocorrência. Determine:

a) o maior valor possível para o determinante de M;

b) a probabilidade de que o determinante de M tenha este valor máximo.

Resolução:

a) O determinante genérico é:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei+bfg+cdh-gec-hfa-idb$$

Com cada termo: $aei, bfg, cdh, \ldots, idb$ valendo ± 1.

É possível o determinante ter valor 4, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

É impossível valer 6, porque seria possível que:

$$\left.\begin{matrix} aei=1 \\ bfg=1 \\ cdh=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{multiplicando: } abcdefghi=1$$

$$\left.\begin{array}{l} gec=-1 \\ hfa=-1 \\ idb=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{multiplicando: } abcdefghi=-1 \quad \text{Absurdo.}$$

Também é impossível o resultado valer 5, porque sendo qualquer dos termos:
$aei, bfg, cdh, -gec, -hfa, -idb$
igual a -1, o máximo da soma já será 4.

b) Considere os quatro vetores-linha v_1, v_2, v_3, v_4:
$(1, 1, 1), (1, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 1).$
Qualquer matriz M pode ser representada escolhendo algum vetor para cada linha (com repetição), e escolhendo o sinal da linha (v_i ou $-v_i$, para $1 \leq i \leq 4$).
São possíveis, assim,

$$\underset{linha\ 1}{4} \times \underset{linha\ 2}{4} \times \underset{linha\ 3}{4} \times \underset{\substack{sinal \\ linha\ 1}}{2} \times \underset{\substack{sinal \\ linha\ 2}}{2} \times \underset{\substack{sinal \\ linha\ 3}}{2} = 512$$

matrizes diferentes.
Para que $\det M$ seja diferente de zero, devem-se escolher 3 vetores quaisquer, sem repetição, porque quaisquer 3 são linearmente independentes. Assim, as matrizes com $\det M \neq 0$ são:

$$\eta = C_{4,\,3} \times 3! \times \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{sinais} = 4 \times 3! \times 2^3$$

A probabilidade de $\det M$ não ser nula é:

$$P = \frac{4 \cdot 3! \cdot 2^3}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2^3} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Note-se agora que o determinante não pode valer 2.
Caso isso ocorresse, seria possível:

$$\left.\begin{array}{l} aei=1 \\ bfg=1 \\ cdh=1 \end{array}\right\} \Rightarrow abcdefghi=1$$

$$\left.\begin{array}{l} gec=1 \\ hfa=1 \\ idb=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow abcdefghi=-1 \quad \text{Absurdo.}$$

E também, a soma de 6 parcelas (1) ou (–1) não pode resultar ímpar.

Os resultados possíveis e não nulos são apenas 4 e –4, equiprováveis por simetria. Assim, $P' = \frac{P}{2} = \frac{3}{16}$.

Professores
Douglas
Lafayette
Marcelo Moraes

Colaboradores
Aline Alkmin
José Diogo
Mateus Grangeiro
Rubem Jade
Thays de Freitas

Digitação e Diagramação
Cristiane Santos
Daniel Alves
Érika Rezende
João Paulo de Faria
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Luciano Lisboa
Rodrigo Ramos
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos competências e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus EDITORA

olimpo