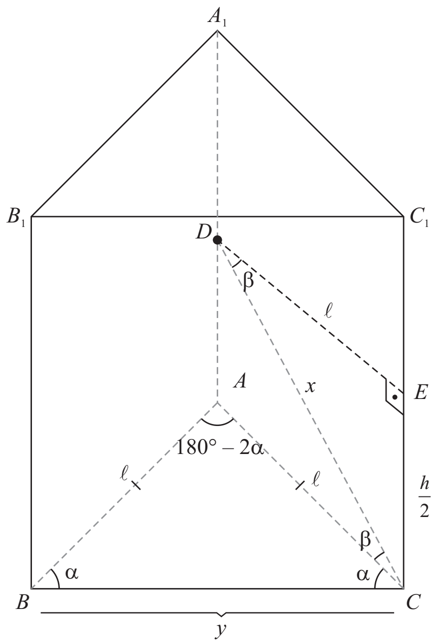
"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

A base de um prisma reto $ABCA_1B_1C_1$ é um triângulo com o lado AB igual ao lado AC. O valor do segmento CD vale x, onde D é o ponto médio da aresta lateral AA_1. Sabendo que α é o ângulo ACB e β é o ângulo DCA, determine a área lateral do prisma em função de x, α e β.

Resolução:



Do triângulo EDC:

$$\ell = x\cos\beta$$

$$h = 2x\text{sen}\beta$$

Aplicando Lei dos senos no triângulo ABC:

$$\frac{y}{\text{sen}(180° - 2\alpha)} = \frac{\ell}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{y}{\text{sen}2\alpha} = \frac{\ell}{\text{sen}\alpha}$$

$$y = \frac{\ell\text{sen}2\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$y = \frac{x\cos\beta\text{sen}2\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$y = \frac{x\cos\beta \cdot 2\text{sen}\alpha\cos\alpha}{\text{sen}\alpha}$$

$$y = 2x\cos\beta\cos\alpha$$

A área lateral (A_ℓ) é dada por:

$$A_\ell = yh + 2\ell h$$

$$A_\ell = 2x\cos\beta\cos\alpha \cdot 2x\text{sen}\beta + 2x\cos\beta \cdot 2x\text{sen}\beta$$

$$A_\ell = 4x^2\cos\beta\text{sen}\beta(1 + \cos\alpha)$$

$$A_\ell = 2x^2\text{sen}2\beta(1 + \cos\alpha)$$

Questão 02

Determine o valor da excentricidade da cônica dada pela equação $x^2 - 10\sqrt{3}xy + 11y^2 + 16 = 0$.

Resolução:

A equação quadrática pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 11 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 16 = 0 \qquad (1)$$

Encontrando os autovalores:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 11-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(11-\lambda) - 75 = 0$$

$$\lambda^2 - 12\lambda - 64 = 0$$

$\therefore\ \lambda - 4$ ou $\lambda = 16$

Portanto, a equação (1) pode ser escrita em uma base de autovetores da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + 16 = 0$$

$$-4u^2 + 16v^2 = -16$$

$\dfrac{u^2}{4} - \dfrac{v^2}{1} = 1$ (Hipérbole!)

$\therefore\ a = 2,\ \ b = 1$

$c^2 = a^2 + b^2 \to c = \sqrt{5},$

excentricidade $= \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

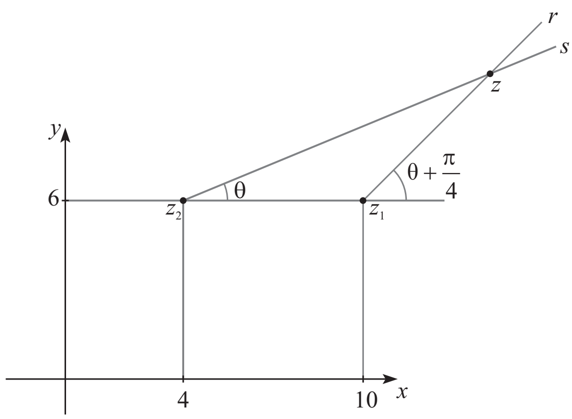
Questão 03

Sejam $z_1 = 10 + 6i$ e $z_2 = 4 + 6i$, onde i é a unidade imaginária, e z um número complexo tal que $\arg\left(\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$, determine o módulo do número complexo $(z - 7 - 9i)$.

Obs.: $\arg(w)$ é o argumento do número complexo w.

Resolução:

Representando no plano cartesiano:



Na figura, os ângulos θ e $\theta + \dfrac{\pi}{4}$ vêm da igualdade

$$\arg\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

As equações das retas r e s são $y - 6 = \text{tg}\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)(x - 10)$ e

$y - 6 = \text{tg}\,\theta\,(x - 4)$ respectivamente.

A interseção de r e s nos dá o lugar geométrico dos afixos de z:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y-6}{x-4} \text{ e } y-6 = \left(\frac{\operatorname{tg}\theta+1}{1-\operatorname{tg}\theta}\right)(x-10)$$

$$(y-6)\left(1-\left(\frac{y-6}{x-4}\right)\right) = \left(1+\left(\frac{y-6}{x-4}\right)\right)(x-10)$$

$$(y-6)(x-y+2) = (x+y-10)(x-10)$$

$$xy-6x-y^2+6y+2y-12 = x^2-10x+xy-10y-10x+100$$

$$x^2+y^2-14x-18y+112=0$$

$$x^2-14x+49-49+y^2-18y+81-81+112=0$$

$(x-7)^2+(y-9)^2=18$, que é a equação de uma circunferência de centro $(7,9)$ e raio $3\sqrt{2}$, portanto

$$|z-7-9i| = 3\sqrt{2}$$

Questão 04

Os números m, 22.680 e n fazem parte, nessa ordem, de uma progressão geométrica crescente com razão dada por q. Sabe-se que:

- existem, pelo menos, dois elementos entre m e 22.680;
- n é o sexto termo dessa progressão geométrica;
- $n \le 180.000$.

Determine os possíveis valores de m e n, sabendo que m, n e q são números naturais positivos.

Resolução:
Das condições do problema, temos três situações possíveis:

i) $(m, a_2, a_3, a_4, 22680, n)$
Como $22680 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^1$, notamos que a única possibilidade para a P.G. seria uma razão igual a 3.
A sequência seria então $(280, 840, 2520, 7560, 22680, 68040)$
$\therefore\ m = 280$ e $n = 68040$

ii) $(m, a_2, a_3, 22680, a_5, n)$
Agora a razão poderia ser $2,\ 3$ ou 6, porém 6 ou 3 como razão gerariam um $n > 180000$, logo:
$(2835, 5670, 11340, 22680, 45360, 90720)$
$\therefore\ m = 2835$ e $n = 90720$

iii) $(a_1, m, a_3, a_4, 22680, n)$
Neste caso, as razões que determinam m e n naturais positivos seriam $2,\ 3$ ou 6, daí:

$$\left(\frac{2835}{2}, 2835, 5670, 11340, 22680, 45360\right)$$

$m = 2835$ e $n = 45360$

$$(280,\ 840,\ 2520,\ 7560,\ 22680,\ 68040)$$

$m = 840$ e $n = 68040$

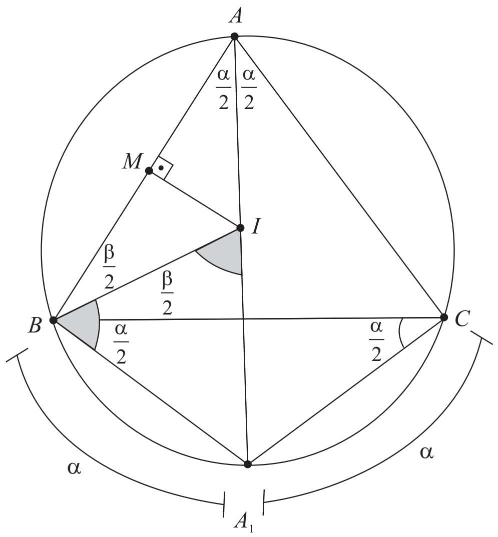
$$\left(\frac{105}{6}, 105, 630, 3780, 22680, 136080\right)$$

$m = 105$ e $n = 136080$

Questão 05

Seja ABC um triângulo onde α, β e γ são os ângulos internos dos vértices A, B e C, respectivamente. Esse triângulo está inscrito em um círculo de raio unitário. As bissetrizes internas desses ângulos interceptam esse círculo nos pontos A_1, B_1 e C_1, respectivamente. Determine o valor da expressão $\dfrac{\overline{AA_1}\cos\frac{\alpha}{2}+\overline{BB_1}\cos\frac{\beta}{2}+\overline{CC_1}\cos\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}\gamma}$.

Resolução:



- Da Lei dos senos temos que:
- $\dfrac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R = 2$, logo $\overline{BC} = 2\operatorname{sen}\alpha$
- Do ΔBA_1C temos $\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\overline{BA_1}}$, $\overline{BA_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$
- O ΔBIA_1 é isósceles de base $\overline{BI}$
- $\overline{AM} = \overline{AI}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = p - \overline{BC} = p - 2\operatorname{sen}\alpha$
- $\overline{AA_1} = \overline{IA_1} + \overline{AI}$

Mas $\overline{IA_1} = \overline{BA_1} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}$, logo teremos

$$\overline{AA_1}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \overline{IA_1}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \overline{AI}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\overline{AA_1}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{sen}\alpha + p - 2\operatorname{sen}\alpha$$

$\overline{AA_1}\cdot\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = p - \operatorname{sen}\alpha \ (1)$ e por analogia teremos

$\overline{BB_1}\cdot\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right) = p - \operatorname{sen}\beta \ (2)$ e

$\overline{CC_1}\cdot\cos\left(\dfrac{\gamma}{2}\right) = p - \operatorname{sen}\gamma \ (3)$ e de (1) , (2) e (3) somando-se teremos

$$\overline{AA_1}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \overline{BB_1}\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \overline{CC_1}\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = 3p - \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\gamma$$

E voltando na razão a ser calculada $\dfrac{3p}{\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma} - 1$ e tirando da lei dos senos $\dfrac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{\overline{AC}}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R = 2$

$\overline{BC} = 2\operatorname{sen}\alpha$, $\overline{AC} = 2\operatorname{sen}\beta$, $\overline{AB} = 2\operatorname{sen}\gamma$, logo $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{2}$, $\operatorname{sen}\beta = \dfrac{\overline{AC}}{2}$ e $\operatorname{sen}\gamma = \dfrac{\overline{AB}}{2}$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\gamma = p$$

$$\frac{3p}{p} - 1 = 3 - 1 = 2$$

Questão 06

Resolva a equação $z^2 + \frac{9z^2}{(z+3)^2} = -5$, onde z pertence ao conjunto dos números complexos.

Resolução:

$z^2 + \left(\frac{3z}{z+3}\right)^2 = -5$, subtraindo $2z\frac{3z}{z+3}$

Dos dois lados teremos:

$$z^2 + \left(\frac{3z}{z+3}\right)^2 - \frac{6z^2}{z+3} = -5 \quad - \frac{6z^2}{z+3}$$

$$\left(z - \frac{3z}{z+3}\right)^2 = -5 - \frac{6z^2}{z+3}$$

$\left(\frac{z^2}{z+3}\right)^2 = -5 - \frac{6z^2}{z+3}$, fazendo $A = \frac{z^2}{z+3}$

teremos

$A^2 = -5 - 6A$, $A^2 + 6A + 5 = 0$

Logo $A = -1$ ou $A = -5$. Voltando na substituição feita,

$$\frac{z^2}{z+3} = -1 \qquad\qquad \frac{z^2}{z+3} = -5$$

$$z^2 + z + 3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad z^2 + 5z + 15 = 0$$

$$\Delta = 1 - 12 = -11 \qquad\qquad \Delta = 25 - 60 = -35$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2} \qquad\qquad z = \frac{-5 \pm \sqrt{35}i}{2}$$

Sendo S o conjunto solução, temos

$$S = \left\{\frac{-1+\sqrt{11}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{11}i}{2}, \frac{-5+\sqrt{35}i}{2}, \frac{-5-\sqrt{35}i}{2}\right\}$$

Questão 07

Seja x um número inteiro positivo menor ou igual a 20.000. Sabe-se que $2^x - x^2$ é divisível por 7. Determine o número de possíveis valores de x.

Resolução:

$x = 1, 2, 3, 4, \ldots, 20000$

$2^x = 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2^{20000}$

$x^2 = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots, 20000^2$

$R_1 = (2,4,1,\ 2,4,1,\ 2,4,1,\ 2,4,1,\ 2,4,1,\ 2,4,1,\ 2,4,1,\ldots)$

$R_2 = (1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,1,4,2,2,4,1,0,\ldots)$

R_1 é a sequência dos restos de 2^x por 7, que repete a cada 3 termos, e R_2 a sequência dos restos de x^2 por 7, repete a cada 7 termos.

Como 3 e 7 são primos entre si, devemos analisar os 21 primeiros restos para verificarmos a divisibilidade de $2^x - x^2$ por 7. Dos 21 em apenas 6 casos (2°, 4°, 5°, 6°, 10° e 15° termos) temos $2^x - x^2$ divisível por 7, pois 2^x e x^2 deixam o mesmo resto.

Dividindo os 20000 termos da sequência em grupos de 21 termos temos:

$$\begin{array}{r|l} 20000 & 21 \\ \hline 8 & 952 \end{array}$$

Logo, $6 \cdot 952 = 5712$ soluções nos 952 primeiros grupos e mais 4 soluções nos 8 termos restantes.

Do exposto, concluímos que a quantidade de valores possíveis para x é dada por $5712 + 4 = 5716$.

Questão 08

Uma pessoa lança um dado n vezes. Determine, em função de n, a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

Resolução:

Como toda sequência de n elementos descrita pelo texto se inicia por 4, devemos contar quantas são as sequências de $(n-1)$ elementos que podemos montar com os números 4, 5 e 6, (que podem aparecer em quantidades diferentes, mas sempre de modo não decrescente).

Sendo x, y e z as quantidades de $4's$, $5's$ e $6's$, respectivamente, que temos em cada sequência, então o problema de contar quantas são as sequências é equivalente ao problema de contar quantas são as soluções inteiras e não negativas para a equação $x+y+z=(n-1)$.

O número de soluções inteiras e não negativas para a equação $x+y+z=(n-1)$ é:

$$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$$

Como a probabilidade de cada sequência de n termos é $\left(\frac{1}{6}\right)^n$, temos que a probabilidade desejada será:

$$P=\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\frac{n(n+1)}{2\cdot 6^n}$$

Questão 09

Sejam o polinômio $p(x)=2x^3-3x^2+2$ e os conjuntos $A=\{p(k)/k\in\mathbb{N}\ \text{e}\ k\leq 1999\}$, $B=\{r^2+1/r\in\mathbb{N}\}$ e $C=\{q^2+2/q\in\mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y=n(A\cap B)-n(A\cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.

Obs.: $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

Resolução:

Obtendo todos os elementos de $A\cap B$

$2k^3-3k^2+2=r^2+1$, $2k^3-3k^2+1=r^2$

$(k-1)^2(2k+1)=r^2$ só se $2k+1$ for quadrado perfeito, logo os valores de $2k+1$ podem ser $\{1^2,3^2,5^2,\ldots,63^2\}$.

Portanto, $n(A\cap B)=32+1$, acrescentamos 1 pela solução $(k,r)=(1,0)$.

Achando os elementos de $A\cap C$

$2k^3-3k^2+2=q^2+2$, $k^2(2k-3)=q^2$ só se $2k-3$ for quadrado perfeito, logo, os valores de $2k-3$ podem ser $\{1^2,3^2,5^2,\ldots,63^2\}$.

Portanto $n(A\cap C)=32+1$, acrescentamos 1 pela solução $(k,q)=(0,0)$, concluindo $y=n(A\cap B)-n(A\cap C)=33-33=0$.

Questão 10

Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2+b^2+c^2=4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Resolução:

Somando as duas últimas colunas à primeira, teremos:

$$D = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(a+b+c) & a+b & b+c \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & c+a \\ 1 & a+b & b+c \\ 1 & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante a partir do teorema de Jacobi, temos:

$$D = 2(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & c+a \\ 0 & a-c & b-a \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

$$\therefore D = (a+b+c)(8-2ab-2bc-2ac)$$

Consideremos agora a seguinte identidade:

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$ (1)

De (1) e da hipótese do problema, temos:

$$2ab+2bc+2ac = (a+b+c)^2 - 4$$

Assim:

$$D = (a+b+c)[12-(a+b+c)^2]$$

Fazendo $a+b+c = s$, obtemos

$$D = s(12-s^2)$$

Assim, a condição $D \leq 16$ equivale a

$s(12-s^2) \leq 16 \Leftrightarrow s^3-12s+16 \geq 0 \Leftrightarrow s^3+64-12s-48 \geq 0 \Leftrightarrow (s+4)(s-2)^2 \geq 0$ (2)

Nessa última desigualdade, dado que $(s-2)^2 \geq 0$, resta provar que $s+4 \geq 0$

Consideremos agora a identidade:

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 = 2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ac)$$

Como o primeiro membro é sempre positivo, temos:

$2a^2+2b^2+2c^2-2(ab+bc+ac) \geq 0 \Leftrightarrow 2(ab+bc+ac) \leq 2a^2+2b^2+2c^2$ (3)

Substituindo (3) em (1), vem:

$$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow s^2 \leq 12 \Leftrightarrow s \geq -2\sqrt{3} \text{ ou } s \leq 2\sqrt{3}$$

Portanto: $s \geq -2\sqrt{3} \Rightarrow s \geq -4$ o que completa a demonstração de (2).

Professores

Matemática
Douglas
Luís Antônio
Marcelo Moraes
Manim
Ney Marcondes

Colaboradores
Aline Alkmin
Anderson (IME)
Henrique
José Diogo
Orlando (IME)
Paula Esperidião
Pedro Gonçalves

Digitação e Diagramação
Érika Rezende
Márcia Santana
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Deise Lara
Leandro Bessa
Rodrigo Ramos
Taís Dourado
Vinícius Ribeiro

Projeto Gráfico
Mariana Fiusa
Vinícius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

***OLIMPO** Pré-Vestibular.*

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo