2010 IME

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

Resolução:

$(P_2 \cap S_1) \subset P_1 \quad (1)$
$(P_1 \cap S_2) \subset P_2 \quad (2)$
$(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2) \quad (3)$

Se $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, então segue que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.
Se $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$, então existe $x \in S_1 \cap S_2$ e neste caso, por (3), segue que $x \in P_1 \cup P_2$, ou seja, $x \in P_1$ ou $x \in P_2$.
Se $x \in P_1$, então $x \in P_1 \cap S_2$, por (2) segue que $x \in P_2$, logo $x \in P_1 \cap P_2$.
Se $x \in P_2$, então $x \in P_2 \cap S_1$, por (1) segue que $x \in P_1$, logo $x \in P_1 \cap P_2$.

Destes resultados conclui-se que $\forall\ x \in S_1 \cap S_2$, implica que $x \in P_1 \cap P_2$, ou seja, $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

Questão 02

Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

Resolução:

Sendo Ω o espaço amostral e $A \subset \Omega$ o evento "a soma dos resultados de dois dados quaisquer ser igual ao resultado do terceiro dado".
Desta forma, temos $n(\Omega) = 6^3 = 216$.
Contando os elementos do evento, temos:

- Para os resultados $1, 1$ e 2 temos $\frac{3!}{2!} = 3$ casos
- Para os resultados $1, 2$ e 3 temos $3! = 6$ casos
- Para os resultados $1, 3$ e 4 temos $3! = 6$ casos
- Para os resultados $1, 4$ e 5 temos $3! = 6$ casos
- Para os resultados $1, 5$ e 6 temos $3! = 6$ casos
- Para os resultados $2, 2$ e 4 temos $\frac{3!}{2!} = 3$ casos
- Para os resultados $2, 3$ e 5 temos $3! = 6$ casos
- Para os resultados $2, 4$ e 6 temos $3! = 6$ casos
- Para os resultados $3, 3$ e 6 temos $\frac{3!}{2!} = 3$ casos

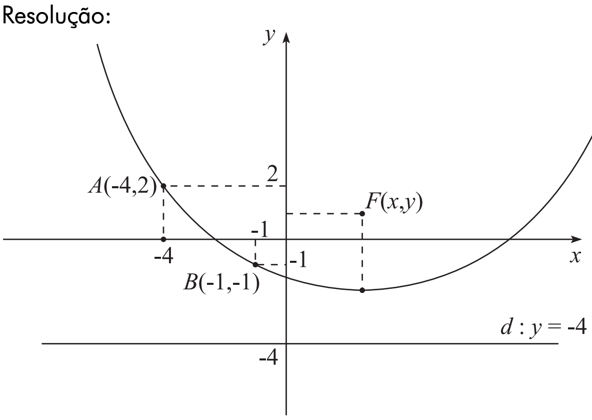
Portanto $n(A) = 3+6+6+6+6+3+6+6+3 = 45$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{45}{216} = \frac{5}{24}.$$

Questão 03

Considere as hipérboles que passam pelos pontos (–4,2) e (–1,–1) e apresentam diretriz na reta $y = -4$. Determine a equação do lugar geométrico formado pelos focos dessas hipérboles, associados a esta diretriz, e represente o mesmo no plano cartesiano.

Resolução:



Seja e a excentricidade da hipérbole dada:

$$d_{AF} = e \cdot d_{Ad} \Rightarrow \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = e \cdot 6$$

$$d_{BF} = e \cdot d_{Bd} \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} = e \cdot 3$$

$$\therefore \sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} = 2 \cdot \sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2}$$

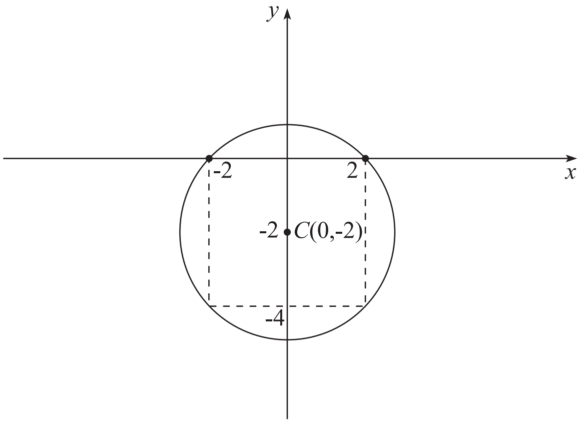
$$(x+4)^2 + (y-2)^2 = 4 \cdot \left((x+1)^2 + (y+1)^2\right)$$

$$3x^2 + 3y^2 + 12y - 12 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4y + 4 - 4 - 4 = 0$$

$x^2 + (y+2)^2 = 8$, que é a equação de uma circunferência de centro $C(0,-2)$ e raio $R = 2\sqrt{2}$, cuja representação está abaixo:



Lembrando que $e > 1$:

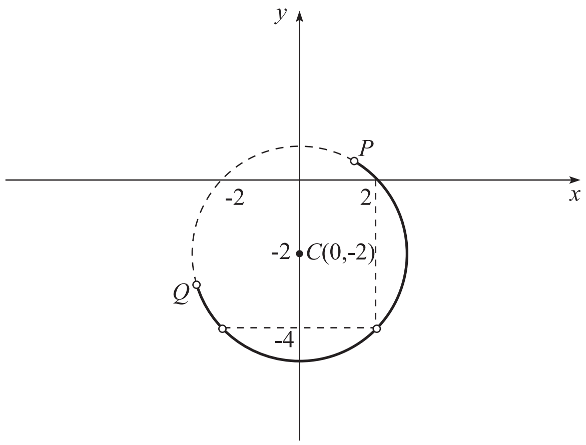
$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-2)^2} > 6 \Rightarrow (x+4)^2 + (y-2)^2 > 6^2$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y+1)^2} > 3 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 > 3^2$$

Como as circunferências $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 6^2$, $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 3^2$ e $x^2 + (y+2)^2 = 8$ se interceptam nos pontos

$P\left(\dfrac{-1+3\sqrt{7}}{4}, \dfrac{-7+3\sqrt{7}}{4}\right)$ e $Q\left(\dfrac{-1-3\sqrt{7}}{4}, \dfrac{-7-3\sqrt{7}}{4}\right)$ o lugar geométrico procurado se reduziria-se a um arco da circunferência de equação $x^2 + (y+2)^2 = 8$.

Por fim, como um foco não deve pertencer à diretriz:

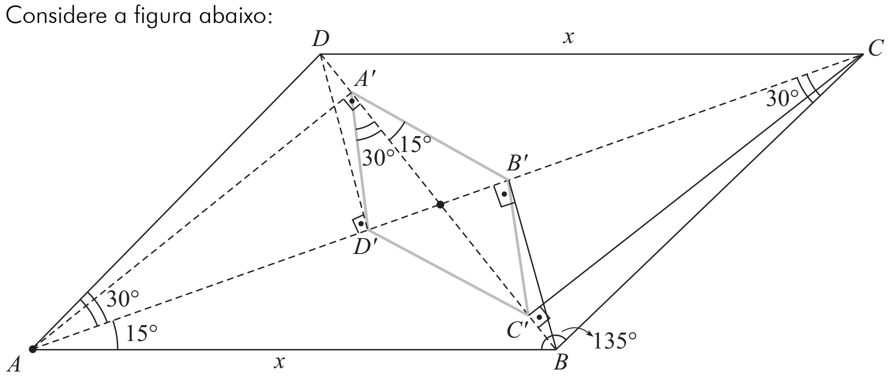


Questão 04

Seja x o valor do maior lado de um paralelogramo $ABCD$. A diagonal AC divide A em dois ângulos, iguais a 30° e 15°. A projeção de cada um dos quatro vértices sobre a reta suporte da diagonal que não o contém forma o quadrilátero $A'B'C'D'$. Calcule o perímetro de $A'B'C'D'$.

Resolução:

Considere a figura abaixo:



Como $\angle AD'D = \angle AA'D = 90^o$, o quadrilátero $AD'A'D$ é cíclico, então $\angle DA'D' = 150^o$.

Daí $\angle D'A'C' = 30^o$.

Analogamente, o quadrilátero $DD'C'C$ é cíclico e então $\angle B'A'C' = 15^o$

Não é difícil perceber que $A'B'C'D'$ será um paralelogramo, semelhante ao inicial.

Da lei dos senos no triângulo ABC vem:

$$\frac{AC}{\text{sen}135^o} = \frac{x}{\text{sen}30^o} \Rightarrow AC = x\sqrt{2}$$

$$\frac{BC}{\text{sen}15^o} = \frac{x}{\text{sen}30^o} \Rightarrow BC = 2x \cdot \text{sen}15^o$$

Do triângulo retângulo $AD'D$ obtemos:

$$AD' = AD \cdot \cos 30^o = 2x \cdot \text{sen}15^o \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = x\sqrt{3} \cdot \text{sen}15^o = B'C.$$

Assim:

$$B'D' = AC - 2 \cdot AD' = x\sqrt{2} - 2x\sqrt{3} \cdot \text{sen}15^o =$$

$$= x\sqrt{2} - 2x\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = x\left(\frac{4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}{4}\right) = x \cdot \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}x\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Pela lei dos cossenos no triângulo ABD:

$$DB^2 = \left(2x\text{sen}15^o\right)^2 + x^2 - 2 \cdot \left(2x\,\text{sen}15^o\right) \cdot x \cdot \cos 45^o =$$

$$= 4x^2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 + x^2 - 4x^2\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4x^2\left(\frac{6-4\sqrt{3}+2}{4}\right)^2 + 1 - \left(\frac{2\sqrt{3}-2}{2}\right)$$

$$= x^2\left[2-\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1\right] = x^2\left(4-2\sqrt{3}\right) = x^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2$$

Assim:

$$BD = x\left(\sqrt{3}-1\right).$$

De onde a razão de semelhança entre os paralelogramos é:

$$\frac{B'D'}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

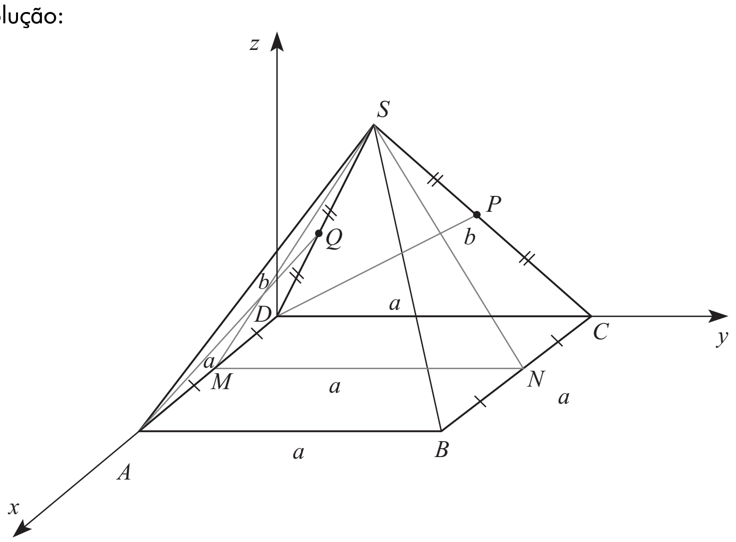
Portanto, o perímetro de $A'B'C'D'$ será:

$$2p = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(2x + 4x\,\text{sen}15^\circ\right) = x\left[\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\right] = x\left[\sqrt{3}+\sqrt{2}-1\right]$$

Questão 05

A área da superfície lateral de uma pirâmide quadrangular regular $SABCD$ é duas vezes maior do que a área de sua base $ABCD$. Nas faces SAD e SDC traçam-se as medianas AQ e DP. Calcule o ângulo entre estas medianas.

Resolução:



$$4\frac{a\cdot b}{2} = 2\cdot a^2 \Rightarrow b = a$$

O ΔMNS é equilátero

Adotando o sistema de coordenadas da figura:

$A(a,0,0)$

$B(a,a,0)$

$C(0,a,0)$

$D(0,0,0)$

$S\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Q é o ponto médio de DS e P de CS:

$Q\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4},\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

$P\left(\frac{a}{4},\frac{3a}{4},\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

As direções das medianas são dadas pelos vetores $\overrightarrow{AQ}$ e $\overrightarrow{DP}$:

$$\overrightarrow{AQ} = \left(\frac{a}{4}-a, \frac{a}{4}-0, \frac{a\sqrt{3}}{4}-0\right) = \left(-\frac{3a}{4}, \frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{DP} = \left(\frac{a}{4}-0, \frac{3a}{4}-0, \frac{a\sqrt{3}}{4}-0\right) = \left(\frac{a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$$

Seja α o ângulo entre as medianas, que são retas reversas:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AQ}\cdot\overrightarrow{DP}}{\left|\overrightarrow{AQ}\right|\left|\overrightarrow{DP}\right|} = \frac{-\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{4}+\frac{a}{4}\cdot\frac{3a}{4}+\frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{\left(-\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{13} \quad \therefore \alpha = \arccos\left(\frac{3}{13}\right)$$

Questão 06

Demonstre que a matriz $\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$, onde $x, y, z \in \mathrm{IN}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.
Obs: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

Resolução:

Sendo $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ a matriz procurada com as características do texto, temos $a_{11}+a_{22}+a_{33}=0$, como $a_{ii} \in \mathrm{IN}$, $i=1,2,3$, segue que $a_{ii}=0$, $i=1,2,3$.

Como $A^2 = \begin{bmatrix} y^2+z^2 & x\,y & x\,z \\ x\,y & x^2+z^2 & y\,z \\ x\,z & y\,z & x^2+y^2 \end{bmatrix}$, segue que:

$a_{12}\cdot a_{21}+a_{13}\cdot a_{31}=y^2+z^2 \to (a_{12})^2+(a_{13})^2=y^2+z^2$ (1)

$a_{21}\cdot a_{12}+a_{23}\cdot a_{32}=x^2+z^2 \to (a_{12})^2+(a_{23})^2=x^2+z^2$ (2)

$a_{31}\cdot a_{13}+a_{32}\cdot a_{23}=x^2+y^2 \to (a_{13})^2+(a_{23})^2=x^2+y^2$ (3)

De (1), (2) e (3), temos: $(a_{12})^2+(a_{13})^2+(a_{23})^2=x^2+y^2+z^2$ (4)

De (4) e (1), segue que $a_{23}=x$

De (4) e (2), segue que $a_{13}=y$

De (4) e (3), segue que $a_{12}=z$

Portanto: $A = \begin{bmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{bmatrix}$

Questão 07

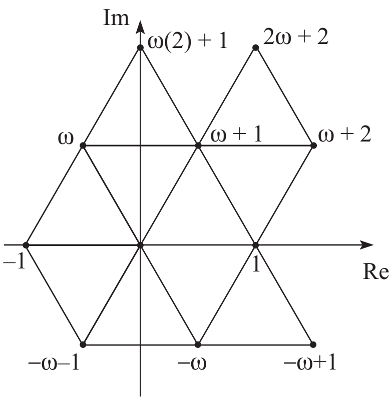
Considere o conjunto de números complexos $E=\{a+b\omega\}$, onde a e b são inteiros e $\omega = cis(2\pi/3)$. Seja o subconjunto $U=\{\alpha \in E \,/\, \exists \beta \in E \text{ no qual } \alpha\beta=1\}$. Determine:

A) Os elementos do conjunto U.

B) Dois elementos pertencente ao conjunto $Y=E-U$ tais que o produto seja um número primo.

Resolução:

a) Marcando alguns elementos do conjunto E, temos:



Note que todo elemento não nulo de E tem módulo maior que ou igual a 1.

Para que $\alpha \in U$, devemos ter um $\beta \in E$, tal que $\alpha\cdot\beta=1$. Logo $|\alpha|\cdot|\beta|=1$, ou seja, $|\alpha|=|\beta|=1$.

Como temos apenas 6 elementos de E com módulo 1, podemos testar as 6 possibilidades e verificar que as seis pertencem a U e são elas: $\omega, -1, -\omega-1, -\omega, 1$ e $\omega+1$.

$\therefore\ U=\{\omega, -1, -\omega-1, -\omega, 1, \omega+1\}$.

b) Os dois elementos podem ser $\omega+2$ e $-\omega+1$, pois

$(\omega+2)\cdot(-\omega+1) = -\omega^2-\omega+2 = +\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i+2=3$

Questão 08

Seja a equação $p^n + 144 = q^2$, onde n e q são números inteiros positivos e p é um número primo. Determine os possíveis valores de n, p e q.

Resolução:

$p^n = q^2 - 12^2 \Rightarrow p^n = (q+12)(q-12)$ e $q + 12 = p^a(q-12)$ com $a \in \mathbb{N}^*$ e $a < n$

$p^a = \dfrac{q+12}{q-12} \Rightarrow p^a = 1 + \dfrac{24}{q-12}$. Como $p^a \in \mathbb{N}^*$ então

$q - 12 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Sendo $S = (p, q, n)$ e lembrando que p é primo verifica-se que:

$i)$ $q - 12 = 1 \Rightarrow q = 13$. Logo $p^n = 25 \cdot 1 = 5^2 \Rightarrow S_1 = (13, 5, 2)$ ou $S_2 = (13, -5, 2)$

$ii)$ $q - 12 = 3 \Rightarrow q = 15$. Logo $p^n = 27 \cdot 3 = 3^4 \Rightarrow S_3 = (15, 3, 4)$ ou $S_4 = (15, -3, 4)$

$iii)$ $q - 12 = 8 \Rightarrow q = 20$. Logo $p^n = 32 \cdot 8 = 2^8 \Rightarrow S_5 = (20, 2, 8)$ ou $S_6 = (20, -2, 8)$

Questão 09

Seja o sistema $\begin{cases} \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y-z) = a \\ \operatorname{tg}(y)\operatorname{tg}(z-x) = b \\ \operatorname{tg}(z)\operatorname{tg}(x-y) = c \end{cases}$, onde a, b, c, x, y, $z \in \Re$. Determine as condições que a, b e c devem satisfazer para que o sistema admita pelo menos uma solução.

Resolução:

Desenvolvendo:

$$\operatorname{tg} x \cdot \left[\frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} z}{1 + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z}\right] = a$$

$\therefore \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = a + a \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$

Analogamente:

$\operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} x = b + b \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z$

$\operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} y = c + c \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$

Chega-se ao sistema:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z - a \cdot \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = a \\ -\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - b \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z + \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = b \\ -c \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = c \end{cases}$$

De incógnitas $\alpha = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$, $\beta = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z$ e $\gamma = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$

Nota-se que $\alpha = \beta = \gamma = -1$ é sempre solução, mas esta solução não convém se $abc \neq 0$, pois

$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = -1 \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} z = -1 \\ \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = -1 \end{cases}$, se nenhum pode ser nulo, implica $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} z$.

De forma que o lado esquerdo de todas as equações se reduz a zero, já que $\operatorname{tg}(y-z) = \operatorname{tg}(z-x) = \operatorname{tg}(x-y) = 0$.

Assim, o determinante do sistema deve ser nulo para que ele possa ser indeterminado.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & -b & 1 \\ -c & 1 & -1 \end{vmatrix} = b + c + a + abc - 1 + 1$$

$$D = 0 \Rightarrow \underbrace{a + b + c = -abc}_{condição}$$

Analisemos o caso em que $D = 0$, ou seja, $abc = -a - b - c$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a & a \\ -1 & -b & 1 & b \\ -c & 1 & -1 & c \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(c) \\ \\ \\ \end{matrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a & a \\ 0 & -1-b & 1-a & a+b \\ 0 & 1-c & -1-ac & ac+c \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \times(1-c) \\ \times(1+b) \end{matrix} \oplus$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a & a \\ 0 & -1-b & 1-a & a+b \\ 0 & 0 & -a-b-c-abc & a+b+c+abc \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -a & a \\ 0 & -1-b & 1-a & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$, que é um sistema possível e indeterminado, admite solução.

Do exposto, concluímos que $a+b+c=-abc$.

Questão 10

Considere a sequência: $a_1=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$, $a_2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}$, $a_3=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}}}}$, $\cdots\cdots$. Determine o produto dos 20 primeiros termos desta sequência.

Resolução:

Notemos que:

$$a_1=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos 30°\ ,\ a_2=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}=\cos 15°$$

Isto sugere uma sequência com $a_3=\cos 7{,}5°$ etc.

Notando que $\cos 2x=\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x$,

$\cos 2x=1-2\cos^2 x$, para $\cos x>0$,

$$\cos x=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{2}}$$

Como a recorrência dada no exercício é:

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot a_n}$$

Podemos notar que se $a_n=\cos x$, então

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos x}=\cos\frac{x}{2}$$

Desta forma tem-se:

$$a_1=\cos 30°\ ,\ a_2=\cos\frac{30°}{2}\ ,\ a_n=\cos\frac{30°}{2^{n-1}}$$

Assim, o produto buscado é $P=\overbrace{\cos 30°\cdot\cos\frac{30°}{2}\cdot\cos\frac{30°}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{30°}{2^{19}}}^{20\ termos}$

Notando que $2\cos\frac{30°}{2^{19}}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}=\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{18}}$,

$2\cos\frac{30°}{2^{18}}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{18}}=\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{17}}$ etc. Teremos:

$$P\cdot 2^{20}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}=2^{20}\cdot\cos 30°\cdot\cos\frac{30°}{2}\cdot\cos\frac{30°}{4}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\cos\frac{30°}{2^{19}}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}}$$

$$P\cdot 2^{20}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}=2^{19}\cdot\cos 30°\cdot\cos\frac{30°}{2}\cdot\cos\frac{30°}{4}\cdot\cdots\cdot\underbrace{\cos\frac{30°}{2^{18}}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{18}}}$$

$$P\cdot 2^{20}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}=2^{18}\cdot\cos 30°\cdot\cos\frac{30°}{2}\cdot\cos\frac{30°}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{30°}{2^{17}}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{17}}$$

$\vdots$

$$P\cdot 2^{20}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}=2\cdot\cos 30°\cdot\operatorname{sen}30°$$

$$P\cdot 2^{20}\cdot\operatorname{sen}\frac{30°}{2^{19}}=\operatorname{sen}60°$$

$$\therefore P=\frac{\sqrt{3}}{2^{21}}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}\left(\frac{30°}{2^{19}}\right)}$$

Professores
Bruno Fraga
Lafayette
Luís Antônio
Manim
Marcelo Moraes
Ney Marcondes

Colaboradores
Aline Alkmin
Henrique
José Diogo
Paula Esperidião

Digitação e Diagramação
Érika Resende
Leandro Bessa
Márcia Santana
Valdivina Pinheiro
Vinícius Ribeiro

Desenhistas
Arthur Vitorino
Mariana Fiusa
Rodrigo Ramos

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Supervisão Editorial
João Neto
Marcelo Moraes

A ***Resolução Comentada*** *das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO *Pré-Vestibular, ou pelo telefone* ***(62) 3637-4185***

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br