2008 ITA MATEMÁTICA

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3, ...\}$	i : unidade imaginária; $i^2 = -1$
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros	$\lvert z \rvert$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais	$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos	$Re\, z$: parte real de $z \in \mathbb{C}$
$\varnothing$: conjunto vazio	$Im\, z$: parte imaginária de $z \in \mathbb{C}$
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$	I : matriz identidade
$(a,b) =]a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$	A^{-1} : inversa da matriz inversível A
$[a,b) = [a,b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$	A^t : transposta da matriz A
$(a,b] =]a,b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}$	$det\, A$: determinante da matriz A
$A - B = \{x \in A;\ x \notin B\}$	A^C : complementar de A
$P(A)$: coleção de todos os subconjuntos de A	
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B	
$\overset{\frown}{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B	
Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos ortogonais.	

Questão 01

Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{4}$

Resolução:
Sendo os eventos:
D: pessoa daltônica
H: homens
M: mulheres

Temos:
$P(H \cap D) = 0,05$
$P(M \cap D) = 0,0025$

Sendo $P(M/D)$ a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso, temos:

$$P(M/D) = \frac{P(M \cap D)}{P(D)}$$

$$P(M/D) = \frac{0,0025}{0,0025 + 0,05} = \frac{25}{525} = \frac{1}{21}$$

Alternativa A

Questão 02

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tais que $|\alpha| = |\beta| = 1$ e $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$. Então $\alpha^2 + \beta^2$ é igual a

a) -2
b) 0
c) 1
d) 2
e) $2i$

Resolução:

Como $|\alpha| = |\beta| = 1$, temos que α e β são do tipo:

$\alpha = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e $\beta = \cos y + i \operatorname{sen} y$

Como $|\alpha - \beta| = \sqrt{2}$, temos:

$|(\cos x - \cos y) + i(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)| = \sqrt{2}$

$\sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y)^2} = \sqrt{2}$

$\cos^2 x - 2\cos x \cos y + \cos^2 y + \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen}^2 y = 2$

$\cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = 0$

$\cos(x - y) = 0$

$x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$x = y + \frac{\pi}{2} + k\pi$ (I)

Calculando $\alpha^2 + \beta^2$, temos:

$\alpha^2 + \beta^2 = (\cos 2x + i \operatorname{sen} 2x) + (\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) = (\cos 2x + \cos 2y) + i(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y)$

De (I) temos:

$x = y + \frac{\pi}{2} + k\pi$

$2x = 2y + \pi + 2k\pi$

$\therefore \cos 2x = -\cos 2y$

$\operatorname{sen} 2x = -\operatorname{sen} 2y$

Voltando em $\alpha^2 + \beta^2$:

$\alpha^2 + \beta^2 = (-\cos 2y + \cos 2y) + i(-\operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 2y)$

$= 0 + i\,0$

$= 0$

Alternativa B

Questão 03

Considere o sistema $Ax = b$, em que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & k & 6 \\ -1 & 3 & k-3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $k \in \mathbb{R}$.

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de $T - S$ é:

a) -4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

Professores

Bernadelli
Marcelo Moraes
Moraes
Ney Marcondes

Revisão
Diego Bernadelli
João Neto

Digitação e Diagramação

Antônio A. Vítor
Márcia Samper
Pedro Naves
Plínio Lagares
Val Pinheiro
Vinícius Eduardo

Projeto Gráfico

Antônio Vitor
Vinícius Eduardo

Supervisão Editorial

Alício Leva
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.cursoolimpo.com.br

olimpo
PRÉ-VESTIBULAR

Questão 30

Considere a parábola de equação $y = ax^2 + bx + c$, que passa pelos pontos $(2, 5), (-1, 2)$ e tal que a, b, c formam, nesta ordem, uma progressão aritmética. Determine a distância do vértice da parábola à reta tangente á parábola no ponto $(2, 5)$.

Resolução:

Como a parábola $y = ax^2 + bx + c$, passa pelos pontos $(2;5)$ e $(-1;2)$ temos, $\begin{cases} 4a + 2b + c = 5 \\ a - b + c = 2 \end{cases}$

Como $a\,;b\,;c$ estão em $P.A.$, podemos afirmar que $a = b - r$ e $c = b + r$, onde r é a razão da $P.A.$

Assim $\begin{cases} 4(b-r) + 2b + b + r = 5 \\ b - r - b + b + r = 2 \end{cases} \Rightarrow r = 3$ e $b = 2$

Logo $f(x) = -x^2 + 2x + 5$

Derivando $f(x)$, temos $f'(x) = -2x + 2$, no ponto $(2;5)$, $f'(2) = -2$, coeficiente angular da reta tangente à parábola no ponto (2; 5), assim a equação da reta tangente à parábola é $2x + y - 9 = 0$.

A distância do ponto $(1;6)$, vértice da parábola, à reta $2x + y - 9 = 0$ é $d = \dfrac{|2 + 6 - 9|}{\sqrt{4+1}}$.

$\therefore d = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Resolução:

Se $\det A \neq 0$, o sistema $Ax = b$ será possível e determinado, logo

$k(k-3) + 18 + 12 + 3k - 18 + 4k - 12 \neq 0 \Rightarrow k \neq 0$ e $k \neq -4$.

Assim para que $Ax = b$ seja possível e indeterminado ou impossível basta tomarmos $k = 0$ ou $k = -4$.

Para $k = 0$ temos

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, escalonando

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, que é um sistema possível e indeterminado.

Para $k = -4$

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -1 & 3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, escalonando

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, que é um sistema impossível.

$\therefore S = 0$ e $T = -4$

$T - S = -4$.

Alternativa A

Questão 04

Sejam A e C matrizes n x n inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a:

a) 3^n b) $2 \cdot \dfrac{3^n}{5^2}$ c) $\dfrac{1}{5}$ d) $\dfrac{3^{n-1}}{5}$ e) $5 \cdot 3^{n-1}$

Resolução:

$B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$

$\det(B) = 3^n \cdot \det(A^{-1} + C^{-1})$ ①

Calculando $\det(A^{-1} + C^{-1})$:

Sendo $I + C^{-1} \cdot A = D$

$\det(D) = \dfrac{1}{3}$

Temos $A^{-1} + C^{-1} = D \cdot A^{-1}$, daí:

$\det(A^{-1} + C^{-1}) = \det(D) \cdot \det(A^{-1})$

$\det(A^{-1} + C^{-1}) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{5}$

$\det(A^{-1} + C^{-1}) = \dfrac{1}{15}$

Voltando em ①:

$\det(B) = 3^n \cdot \dfrac{1}{15} = \dfrac{3^{n-1}}{5}$.

Alternativa D

Questão 05

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30
b) 32
c) 34
d) 36
e) 38

Resolução:

O grau de P é igual a soma dos graus de seus fatores:

$2+2\cdot q+2q^2+2q^3+2q^4=62$, em que q é a razão da P.G.

$q+q^2+q^3+q^4=30$

Lembrando que q é um inteiro positivo, $q=2$.

Portanto, o maior grau será $2\cdot q^4=2\cdot 2^4=32$.

Alternativa B

Questão 06

Um diedro mede 120°. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$
b) $3\sqrt{2}$
c) $2\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{2}$
e) 2

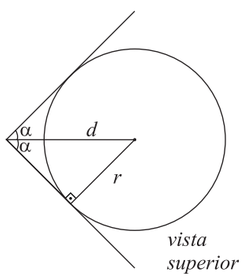
Resolução:

Dado o volume da esfera podemos obter seu raio:

$V=\frac{4\pi}{3}r^3=4\sqrt{3}\pi$

$r^3=3\sqrt{3}=\sqrt{3^3}$

$r=\sqrt{3}\ \text{cm}$



Na figura observamos que:

$2\alpha=120^o\Rightarrow\alpha=60^o$

$\text{sen}\,\alpha=\frac{r}{d}$, em que d é a distância pedida.

$\text{sen}\,60^o=\frac{\sqrt{3}}{d}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{d}$

$\therefore d=2\,\text{cm}$

Alternativa E

$\text{sen}\beta=\text{sen}\alpha\cdot\cos\gamma+\text{sen}\gamma\cdot\cos\alpha=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{4}{5}=\frac{15\sqrt{10}}{50}$

$\text{sen}\beta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

Seja S a área do ΔABC:

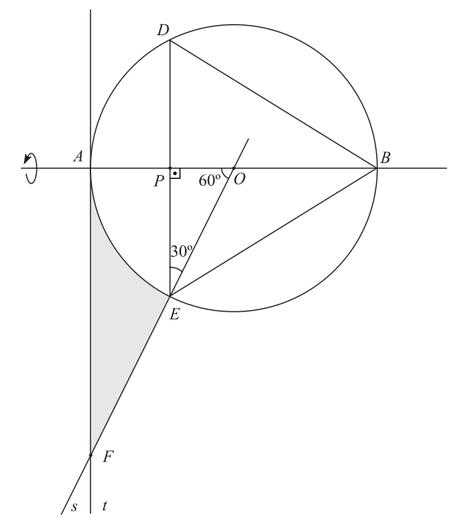
$S=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\text{sen}\beta=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$S=6$.

Questão 29

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e $\overline{AB}$ um diâmetro de C. Considere o triângulo eqüilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco $\widehat{AE}$ e pelos segmentos $\overline{AF}$ e $\overline{EF}$ em torno do diâmetro $\overline{AB}$.

Resolução:



No ΔOPE:

$OE=r$

$OP=\frac{r}{2}$

$PE=\frac{r\sqrt{3}}{2}$

Da semelhança entre os triângulos OPE e OAF:

$AF=r\sqrt{3}$

Seja V o volume do sólido pedido:

$V=V_{tronco}-V_{calota}=\left(\frac{\pi\cdot AF^2\cdot AO-\pi\cdot PE^2\cdot PO}{3}\right)-\frac{\pi\cdot AP^2}{3}(3\cdot OE-AP)$

$V=\frac{\pi\cdot\left(r\sqrt{3}\right)^2\cdot r-\pi\cdot\left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{r}{2}}{3}-\frac{\pi\cdot\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\left(3\cdot r-\frac{r}{2}\right)}{3}$

$V=\frac{2}{3}\pi r^3$

Questão 27

Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos A, B e C tais que: $P(A)=P(B)=1/2$, com A e B independentes, $P(A\cap B\cap C)=1/16$, e sabe-se que $P((A\cap B)\cup(A\cap C))=3/10$. Calcule as probabilidades condicionais $P(C\mid A\cap B)$ e $P(C\mid A\cap B^C)$.

Resolução:

A probabilidade condicional $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Assim $P(C/A\cap B)=\dfrac{P(C\cap(A\cap B))}{P(A\cap B)}=\dfrac{1/16}{1/4}=\dfrac{1}{4}$

$$P(C/A\cap B^C)=\frac{P(C\cap(A\cap B^C))}{P(A\cap B^C)}$$

Temos $P((A\cap B)\cup(A\cap C))=\dfrac{3}{10}$

$$P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)=\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{4}+P(A\cap C)-\frac{1}{16}=\frac{3}{10}\Rightarrow P(A\cap C)=\frac{9}{80}$$

Assim, $P(C/A\cap B^c)=\dfrac{1/20}{1/4}=\dfrac{1}{5}$.

Observação

$$P((A\cap C)\cap B)+P((A\cap C)\cap B^C)=P(A\cap C)$$

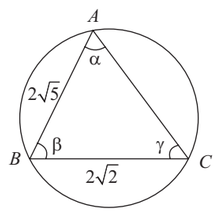
$$\frac{1}{16}+P((A\cap C)\cap B^C)=\frac{9}{80}$$

$$\Rightarrow P((A\cap C)\cap B^C)=\frac{9}{80}-\frac{1}{16}=\frac{1}{20}$$

Questão 28

Um triângulo acutângulo de vértices A, B e C está inscrito numa circunferência de raio $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$. Sabe-se que $\overline{AB}$ mede $2\sqrt{5}$ e $\overline{BC}$ mede $2\sqrt{2}$. Determine a área do triângulo ABC.

Resolução:



$$R=\frac{5\sqrt{2}}{3}$$

Lei dos senos:

$\dfrac{2\sqrt{2}}{\text{sen}\alpha}=2R\Rightarrow \text{sen}\alpha=\dfrac{3}{5}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, pois $\alpha\in\,]0,\pi/2[$

$\dfrac{2\sqrt{5}}{\text{sen}\gamma}=2R\Rightarrow \text{sen}\gamma=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\Rightarrow\cos\gamma=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, pois $\gamma\in\,]0,\pi/2[$

No ΔABC:

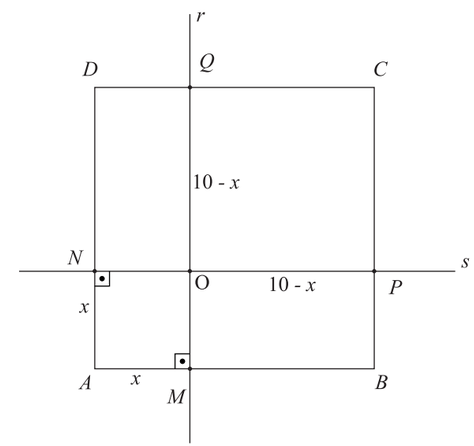
$$\alpha+\beta+\gamma=180^o\Rightarrow \text{sen}\beta=\text{sen}(\alpha+\gamma)$$

Questão 07

Considere o quadrado $ABCD$ com lados de 10 m de comprimento. Seja M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AD}$, eqüidistantes de A. Por M traça-se uma reta r paralela ao lado $\overline{AD}$ e por N uma reta s paralela ao lado $\overline{AB}$, que se interceptam no ponto O. Considere os quadrados $AMON$ e $OPCQ$, onde P é a intersecção de s com o lado $\overline{BC}$ e Q é a intersecção de r com o lado $\overline{DC}$. Sabendo-se que as áreas dos quadrados $AMON$, $OPCQ$ e $ABCD$ constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica, então a distância entre os pontos A e M é igual, em metros, a

a) $15+5\sqrt{5}$
b) $10+5\sqrt{5}$
c) $10-\sqrt{5}$
d) $15-5\sqrt{5}$
e) $10-3\sqrt{5}$

Resolução:



A seqüência $\left(x^2,(10-x)^2,10^2\right)$ é uma P.G.:

$$\left[(10-x)^2\right]^2=x^2\cdot 10^2$$

$$(10-x)^2=x\cdot 10$$

$$100-20x+x^2=10x$$

$$x^2-30x+100=0$$

$$x=\frac{30\pm\sqrt{500}}{2}$$

$$x=15\pm 5\sqrt{5}$$

Como $0<x<10$, temos $x=\left(15-5\sqrt{5}\right)\text{m}$.

Alternativa D

Questão 08

Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = 1/2$, então $p(-2)$ é igual a

a) -25
b) -27
c) -36
d) -39
e) -40

Resolução:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \left(\frac{1}{2}-3r, \frac{1}{2}-2r, \frac{1}{2}-r, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}+r\right)$, em que r é a razão da PA.

O polinômio dado pode ser escrito da forma

$$p(x) = \left(\frac{1}{2}+r\right)x^5 + \left(\frac{1}{2}\right)x^4 + \left(\frac{1}{2}-r\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}-2r\right)x^2 - \left(\frac{1}{2}-3r\right)$$

E sendo $x = -1$ raiz, temos:

$$p(-1) = -\left(\frac{1}{2}+r\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}-r\right) + \left(\frac{1}{2}-2r\right) - \left(\frac{1}{2}-3r\right) = 0$$

$$r = \frac{1}{2}$$

Assim:

$$p(x) = x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + 1$$

$$\therefore p(-2) = (-2)^5 + \frac{(-2)^4}{2} - \frac{(-2)^2}{2} + 1 = -25$$

Alternativa A

Questão 09

Sobre a equação polinomial $2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$, sabemos que os coeficientes a, b, c são reais, duas de suas raízes são inteiras e distintas e $1/2 - i/2$ também é sua raiz. Então, o máximo de a, b, c é igual a

a) -1
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

Resolução:

$2x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$

$\alpha, \beta, \frac{1}{2}-\frac{i}{2}$ e $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$ são as raízes da equação

$$\alpha + \beta + \frac{1}{2}-\frac{i}{2} + \frac{1}{2}+\frac{i}{2} = -\frac{a}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-a-2}{2} \quad ①$$

$$\alpha \cdot \beta \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\alpha\beta \cdot \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$$

$\alpha \cdot \beta = -1 \Rightarrow \alpha = 1$ e $\beta = -1$, pois α e β são inteiros distintos.

Voltando em ①:

$$1 + (-1) = \frac{-a-2}{2} \Rightarrow a = -2.$$

Reescrevendo a equação

$2x^4 - 2x^3 + bx^2 + cx - 1 = 0$

1) Se $a = b$:

$bc + bc = 0 \Rightarrow b = 0$ ou $c = 0$

1.1) $a = b = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

1.2) $c = 0 \Rightarrow a = b = \pm 1$

$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

2) Se $a = -b$:

$c^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm\sqrt{1-c^2}$, em que $c \in [-1, 1]$.

$\therefore A = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-c^2} & c \\ c & \sqrt{1-c^2} \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} \sqrt{1-c^2} & c \\ c & -\sqrt{1-c^2} \end{bmatrix}$ em que $c \in [-1, 1]$.

Notemos que para $c = -1$ ou $c = 1$ voltamos ao caso 1.1.

Questão 26

Determine todos os valores $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ admita apenas raízes reais simples.

Resolução:

$x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$

$$x^2 = \frac{2\sqrt[4]{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 4\operatorname{tg}\alpha}}{2}$$

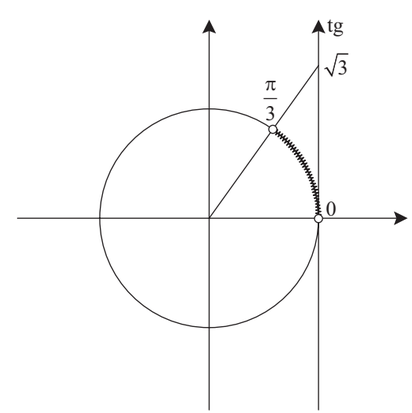
$$x^2 = \sqrt{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}$$

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}} \pm \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha}}$$

Para que as raízes sejam reais e distintas devemos ter:

$\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha > 0$ e $\sqrt{\sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\alpha} > 0$

$\operatorname{tg}\alpha < \sqrt{3}$ e $\operatorname{tg}\alpha > 0$



$\therefore S =]0, \pi/3[$

$$g(x)=\frac{ln\left(x^2+x+1\right)+ln\left(x^2-x+1\right)}{2}=\frac{ln\left[\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)\right]}{2}=ln\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}$$

$$h(x)=\frac{ln\left(x^2+x+1\right)-ln\left(x^2-x+1\right)}{2}=\frac{ln\left[\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right]}{2}=ln\left[\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}\right].$$

Questão 24

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5-9x^4+(\alpha-\beta-2\gamma)x^3+(\alpha+2\beta+2\gamma-2)x^2+(\alpha-\beta-\gamma+1)x+(2\alpha+\beta+\gamma-1)$$

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x=0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Resolução:

Para que $x=0$ seja raiz.
é preciso que $2\alpha+\beta+\gamma-1=0$.
Derivando $p(x)$, temos:

$p'(x)=5x^4-36x^3+3(\alpha-\beta-2\gamma)x^2+2(\alpha+2\beta+2\gamma-2)x+\alpha-\beta-\gamma+1$

Assim, $\alpha-\beta-\gamma+1=0$
Derivando $p'(x)$, temos:

$p''(x)=20x^3-108x^2+6(\alpha-\beta-2\gamma)x+2(\alpha+2\beta+2\gamma-2)$

Assim, $\alpha+2\beta+2\gamma-2=0$

Resolvendo o sistema $\begin{cases}2\alpha+\beta+\gamma=1\\ \alpha-\beta-\gamma=-1\\ \alpha+2\beta+2\gamma=2\end{cases}$ encontramos $\alpha=0,\ \beta\in\mathbb{R}$ e $\gamma=1-\beta$.

Para termos 0 como uma raiz de multiplicidade 3 devemos garantir que $\alpha-\beta-2\gamma\neq 0$ (caso contrário terá multiplicidade 4). Desta relação temos: $0-\beta-2+2\beta\neq 0\Rightarrow\beta\neq 2$.

$S=\{(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3/(\alpha,\beta,\gamma)=(0,\beta,1-\beta),\beta\in\mathbb{R}-\{2\}\}$

Questão 25

Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1}=A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Resolução:

$A=\begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix}$, pois A é simétrica.

$A^t=\begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix}=A^{-1}$, pois A é ortogonal.

$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & c\\ c & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$a^2+c^2=1\quad(1)$

$ac+bc=0\ (2)$

$c^2+b^2=1\quad(3)$

De (1) e (3) vem:

$a^2=b^2\Rightarrow a=\pm b$

$\begin{cases}2-2+b+c-1=0,\ pois\ 1\ é\ raiz.\\ 2+2+b-c-1=0,\ pois\ -1\ é\ raiz.\end{cases}$

Resolvendo o sistema:
$b=-1$ e $c=2$

Logo, o máximo de a, b, c é igual a 2.

Alternativa C

Questão 10

É dada a equação polinomial $(a+c+2)x^3+(b+3c+1)x^2+(c-a)x+(a+b+4)=0$, com a, b, c reais. Sabendo-se que esta equação é recíproca de primeira espécie e que 1 é uma raiz, então o produto abc é igual a

a) -2
b) 4
c) 6
d) 9
e) 12

Resolução:

Como é uma equação recíproca de primeira espécie, temos:

$a+c+2=a+b+4\Rightarrow b=c-2\ (\mathrm{I})$

$b+3c+1=c-a\Rightarrow a=-3c+1\ (\mathrm{II})$.

Como 1 é raiz, temos:

$a+c+2+b+3c+1+c-a+a+b+4=0\Rightarrow a+2b+5c=7\ (\mathrm{III})$.

Substituindo (I) e (II) em (III):

$-3c+1+2c-4+5c=-7$
$4c=-4$
$c=-1$.

Voltando em (I) e (II) temos:

$b=-3$ e $a=4$
$\therefore abc=4(-3)(-1)=12$

Alternativa E

Questão 11

Sendo $[-\pi/2, \pi/2]$ o contradomínio da função arcoseno e $[0, \pi]$ o contradomínio da função arcocosseno, assinale o valor de

$$\cos\left(\operatorname{arc\,sen}\frac{3}{5}+\arccos\frac{4}{5}\right).$$

a) $\frac{1}{\sqrt{12}}$

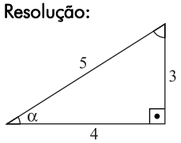
b) $\frac{7}{25}$

c) $\frac{4}{15}$

d) $\frac{1}{\sqrt{15}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

Resolução:



No triângulo acima temos:

$\alpha = \text{arc sen}\,\frac{3}{5} = \text{arc cos}\,\frac{4}{5}$

$\text{sen}\,\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\therefore \cos\left(\text{arc sen}\,\frac{3}{5} + \text{arc cos}\,\frac{4}{5}\right) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

$\cos\left(\text{arc sen}\,\frac{3}{5} + \text{arc cos}\,\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

Alternativa B

Questão 12

Dada a cônica $\lambda : x^2 - y^2 = 1$, qual das retas abaixo é perpendicular à λ no ponto $P = (2, \sqrt{3}\,)$?

a) $y = \sqrt{3}(x-1)$

b) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+1)$

d) $y = \frac{-\sqrt{3}}{5}(x-7)$

e) $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}(x-4)$

Resolução:

A reta perpendicular à λ é perpendicular a reta tangente à λ no mesmo ponto.

Como o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2-1}$, para $x \geq 1$, coincide com λ no primeiro quadrante, temos que o coeficiente angular da reta tangente a λ em $(2, \sqrt{3})$ será $m = f'(2)$, onde f' denota a derivada da função *f*.

Portanto:

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x)$

$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}},\ x > 1$

$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{4-1}}$

$f'(2) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$

Sendo m' o coeficiente angular da reta perpendicular, temos:

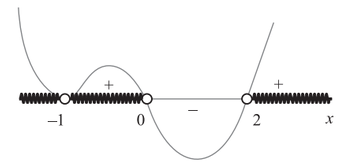
$m \cdot m' = -1$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot m' = -1$

$m' = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Estudo do sinal da função

$y = x^4 - 3x^2 - 2x$



$S_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$

De *i* e *ii* temos:

$A = S_1 \cap S_2 = (-\infty, -1) \cup (-1, -2/3] \cup (2, +\infty)$

Questão 22

Determine as raízes em $\mathbb{C}$ de $4z^6 + 256 = 0$, na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, que pertençam a

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ 1 < |z+2| < 3\}.$$

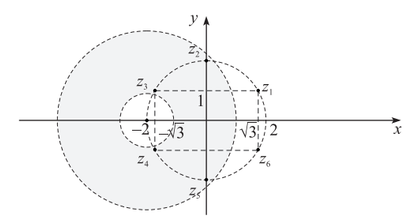
Resolução:

$4z^6 + 256 = 0$

$z^6 = -64 \Rightarrow z_{k+1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

$S = \{z \in \mathbb{C}; 1 < |z-(-2)| < 3\}$ tem como representação no plano complexo uma coroa circular de centro -2 e raio variando entre 1 e 3.

Marcando no plano complexo as raízes e o conjunto *S*:



Notamos então que apenas as raízes $z_2 = 2i$, $z_3 = -\sqrt{3} + i$, $z_4 = -\sqrt{3} - i$ e $z_5 = -2i$ pertencem a *S*.

Questão 23

Seja $f(x) = ln(x^2 + x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$. Determine as funções $h, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, sendo h uma função par e g uma função ímpar.

Resolução:

Para toda função definida em um domínio simétrico vale

$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2}$, em que a primeira parcela da soma é par e a segunda é ímpar.

$\therefore g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ e $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$

Nos triângulos *PAR, RCQ* e *PBQ:*

$\ell^2 = x^2 + 15^2 \Rightarrow x^2 = \ell^2 - 225$ ①

$\ell^2 = y^2 + 10^2 \Rightarrow y^2 = \ell^2 - 100$ ②

$\ell^2 = (x+y)^2 + 5^2 \Rightarrow \ell^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 25$ ③

Substituindo ① e ② em ③:

$$\ell^2 = \ell^2 - 225 + 2\cdot\sqrt{\ell^2-225}\cdot\sqrt{\ell^2-100} + \ell^2 - 100 + 25$$
$$2\sqrt{\ell^2-225}\cdot\sqrt{\ell^2-100} = 300 - \ell^2$$
$$4\cdot\left(\ell^2-225\right)\cdot\left(\ell^2-100\right) = \left(300-\ell^2\right)^2$$
$$4\ell^4 - 1300\ell^2 + 90000 = 90000 - 600\ell^2 + \ell^4$$
$$3\ell^4 - 700\ell^2 = 0$$
$$\therefore \ell^2 = \frac{700}{3} \Rightarrow \ell = \frac{10\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{21}}{3}, \text{ pois } \ell > 15.$$

Seja S e $2p$ a área e o perímetro do ΔPQR, respectivamente:

$$S = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{175}{3}\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$
$$2p = 3\ell = 10\sqrt{21}\ \text{cm}$$

Alternativa B

Questão 21

Dado o conjunto $A = \left\{x \in \mathbb{R};\ \sqrt{3x^2+2x} < x^2\right\}$, expresse-o como união de intervalos da reta real.

Resolução:

i) $3x^2 + 2x \geq 0$

$S_1 = \left(-\infty, -2/3\right] \cup \left[0, +\infty\right)$

ii) $x^2 > \sqrt{3x^2+2x}$

$x^4 > 3x^2 + 2x$

$x^4 - 3x^2 - 2x > 0$

Raízes de $x^4 - 3x^2 - 2x = 0$:

$x_1 = 0$

$x_2 = -1$

−1	1	0	−3	−2
	1	−1	−2	0

$x^2 - x - 2 = 0$

$x_3 = -1$

$x_4 = 2$

Daí segue que a equação da reta perpendicular a λ será:

$$y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2)$$
$$y - \sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2\sqrt{3}$$
$$y = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x-4)$$

Alternativa E

Questão 13

O conjunto imagem e o período de $f(x) = 2\ \text{sen}^2(3x) + \text{sen}(6x) - 1$ são, respectivamente,

a) $[-3, 3]$ e 2π

b) $[-2, 2]$ e $\frac{2\pi}{3}$

c) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $\frac{\pi}{3}$

d) $[-1, 3]$ e $\frac{\pi}{3}$

e) $[-1, 3]$ e $\frac{2\pi}{3}$

Resolução:

$\cos(6x) = \cos(2\cdot 3x) = 1 - 2\ \text{sen}^2(3x)$

$2\ \text{sen}^2(3x) = 1 - \cos(6x)$ ①

Substituindo ① em $f(x)$ temos:

$f(x) = 1 - \cos(6x) + \text{sen}(6x) - 1$

$$f(x) = \text{sen}(6x) - \cos(6x) = \sqrt{2}\left(\text{sen}(6x)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\cos(6x)\right)$$
$$f(x) = \sqrt{2}\left(\text{sen}(6x)\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \text{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos(6x)\right)$$
$$f(x) = \sqrt{2}\ \text{sen}\left(6x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Os valores assumidos por $f(x)$ variam de $-\sqrt{2}$ a $\sqrt{2}$ e seu período é dado por $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3} rad$.

Alternativa C

Questão 14

Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é

a) $\left\{0,\ 2 \pm \sqrt{5},\ 2 \pm \sqrt{3}\right\}$

b) $\left\{0,\ 1,\ \log_5\left(2+\sqrt{5}\right)\right\}$

c) $\left\{0,\ \frac{1}{2}\log_5 2,\ \frac{1}{2}\log_5 3,\ \log_5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

d) $\left\{0,\ \log_5\left(2+\sqrt{5}\right),\ \log_5\left(2+\sqrt{3}\right),\ \log_5\left(2-\sqrt{3}\right)\right\}$

e) A única solução é $x = 0$

Resolução:

$$\left|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x\right| = \left|5^x - 1\right|$$

$$5^{3x} - 5 \cdot 5^{2x} + 4 \cdot 5^x = 5^x - 1 \quad (\mathrm{I})$$

ou

$$5^{3x} - 5 \cdot 5^{2x} + 4 \cdot 5^x = -5^x + 1 \quad (\mathrm{II})$$

Resolvendo (I):

$$5^{3x} - 5 \cdot 5^{2x} + 3 \cdot 5^x + 1 = 0$$

Sendo $5^x = z$, temos:

$$z^3 - 5z^2 + 3z + 1 = 0$$

1	1	−5	3	1
	1	−4	−1	0

$$z^2 - 4z - 1 = 0$$
$$\Delta = 16 + 4 = 20$$
$$z = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2}$$
$$z = 2 \pm \sqrt{5}$$
$$\therefore z = 1 \text{ ou } z = 2 + \sqrt{5} \text{ ou } z = 2 - \sqrt{5}$$

Se $z = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

Se $z = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \log_5\left(2+\sqrt{5}\right)$

Se $z = 2 - \sqrt{5} \Rightarrow 5^x = 2 - \sqrt{5}$, o que é impossível.

Resolvendo (II):

$$5^{3x} - 5 \cdot 5^{2x} + 5 \cdot 5^x - 1 = 0$$

Sendo $5^x = z$, temos:

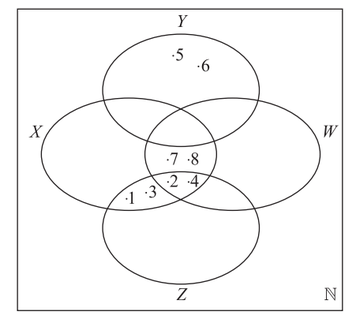
$$z^3 - 5z^2 + 5z - 1 = 0$$

1	1	−5	5	−1
	1	−4	1	0

$$z^2 - 4z + 1 = 0$$
$$\Delta = 16 - 4 = 12$$
$$z = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$
$$z = 2 \pm \sqrt{3}$$

Resolução:

Utilizando diagrama de Venn, temos:



De onde concluímos:

$$\left[x \cap (z \cup w)\right] = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$
$$\left[w \cap (y \cup z)\right] = \{2, 4\}$$
$$\left[x \cap (z \cup w)\right] - \left[w \cap (y \cup z)\right] = \{1, 3, 7, 8\}$$

Obs.: Note que os elementos 5 e 6 podem estar em $(x \cap y) - w$ ou em $(w \cap y) - x$ que a resposta não se altera.

Alternativa C

Questão 20

Sejam r e s duas retas paralelas distando $10\ \mathrm{cm}$ entre si. Seja P um ponto no plano definido por r e s e exterior à região limitada por estas retas, distando $5\ \mathrm{cm}$ de r. As respectivas medidas da área e do perímetro, em cm^2 e cm, do triângulo eqüilátero PQR cujos vértices Q e R estão, respectivamente, sobre as retas r e s, são iguais a

a) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $5\sqrt{21}$

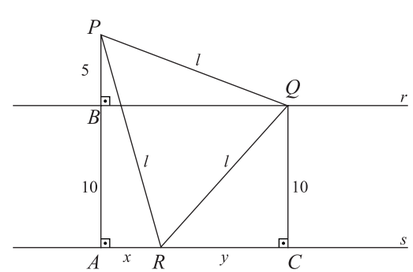
b) $175\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $10\sqrt{21}$

c) $175\sqrt{3}$ e $10\sqrt{21}$

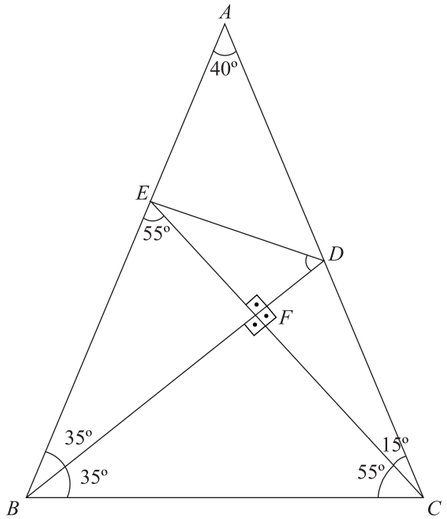
d) $175\sqrt{3}$ e $5\sqrt{21}$

e) 700 e $10\sqrt{21}$

Resolução:



Resolução:



Como $B\hat{E}C = 55º$ o triângulo BEC é isósceles com $BE = BC$.
Sendo F a intersecção de $\overline{BD}$ e $\overline{CE}$, temos:
$B\hat{F}C = 90º$.
Os triângulos DEF e DCF são congruentes, pois são retângulos com $EF = CF$ e DF é lado comum aos dois. Daí, como $C\hat{D}F = 75º$, temos $E\hat{D}F = 75º$.

Alternativa D

Questão 19

Sejam X, Y, Z e W, subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \varnothing$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$. Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$
c) $\{1, 3, 7, 8\}$
d) $\{1, 3\}$
e) $\{7, 8\}$

$\therefore z = 1$ ou $z = 2 + \sqrt{3}$ ou $z = 2 - \sqrt{3}$

Se $z = 1 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$
Se $z = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow 5^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_5\left(2 + \sqrt{3}\right)$
Se $z = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow 5^x = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_5\left(2 - \sqrt{3}\right)$

Portanto o conjunto solução será:
$\left\{0, \log_5\left(2 + \sqrt{5}\right), \log_5\left(2 + \sqrt{3}\right), \log_5\left(2 - \sqrt{3}\right)\right\}$

Alternativa D

Questão 15

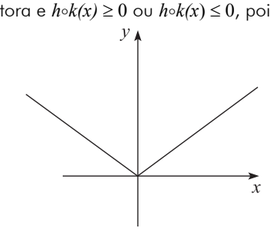
Um subconjunto D de $\mathbb{R}$ tal que a função $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \left|ln\left(x^2 - x + 1\right)\right|$ é injetora, é dado por

a) $\mathbb{R}$
b) $(-\infty, 1]$
c) $[0, 1/2]$
d) $(0, 1)$
e) $[1/2, \infty)$

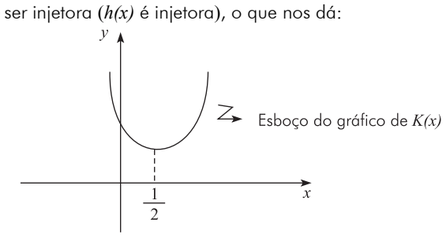
Resolução:

Considerando as funções $g(x) = |x|$, $h(x) = ln(x)$ e $k(x) = x^2 - x + 1$, temos: $f(x) = g \circ h \circ k(x)$.

Para que $f(x)$ seja injetora devemos ter $h \circ k(x)$ injetora e $h \circ k(x) \geq 0$ ou $h \circ k(x) \leq 0$, pois o gráfico de $g(x)$ é:

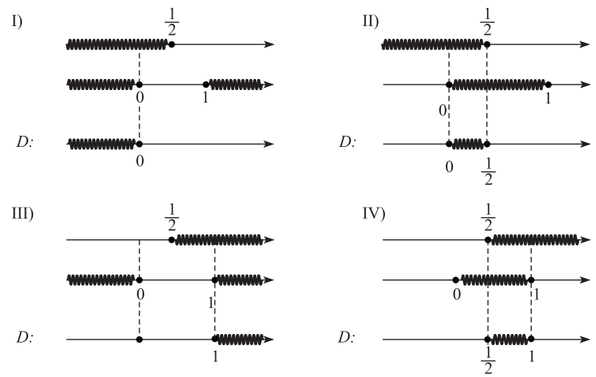


Para que $h \circ k(x)$ seja injetora $k(x)$ deve ser injetora ($h(x)$ é injetora), o que nos dá:



$x \geq \frac{1}{2}$ ou $x \leq \frac{1}{2}$

Resolvendo $h \circ k(x) \geq 0$ ou $h \circ k(x) \leq 0$, temos:
$ln(x^2 - x + 1) \geq 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 1 \Rightarrow x\,(x - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$ ou $x \geq 1$
ou
$ln(x^2 - x + 1) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 \leq 1 \Rightarrow x\,(x - 1) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$
Intervalos que satisfazem às duas condições são:



Dentre as alternativas um conjunto possível é $D = [0\ ,1/2]$

Alternativa C

Questão 16

A soma de todas as soluções distintas da equação $\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0$, que estão no intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$, é igual a

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

Resolução:

$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0$

$2\cos 6x + [\cos 9x + \cos 3x] = 0$

$2 \cdot \cos 6x + 2 \cdot \cos 6x \cdot \cos 3x = 0$

$2\cos 6x[1 + \cos 3x] = 0$

$\cos 6x = 0 \quad (\mathrm{I})$

$\cos 3x = -1 \quad (\mathrm{II})$

Resolvendo (I):

$$\cos 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 6x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \\ 6x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \\ 6x = \frac{5\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

Resolvendo (II):

$\cos 3x = -1 \Rightarrow\ 3x = \pi \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{3}$

A soma S das soluções será:

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi + 3\pi + 5\pi + 4\pi}{12} = \frac{3\pi}{12}$$

Alternativa E

Questão 17

Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N}; 1 \le n \le 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a

a) $\frac{1}{730}$

b) $\frac{46}{33215}$

c) $\frac{1}{365}$

d) $\frac{92}{33215}$

e) $\frac{91}{730}$

Resolução:

Seja n o número de elementos de H:

$$n = C_{365,2} = \frac{365 \cdot 364}{2} = 365 \cdot 182$$

Seja m o número de elementos de H cuja soma dos próprios elementos é igual a 183:

$$m = \frac{182}{2} = 91$$

Seja P a probabilidade pedida:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{91}{365 \cdot 182} = \frac{1}{730}.$$

Alternativa A

Questão 18

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede 40º. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15^o$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35^o$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

a) 35°

b) 45°

c) 55°

d) 75°

e) 85°