"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i : unidade imaginária $i^2 = -1$
$\det M$: determinante da matriz M
M^{-1} : inversa da matriz M
MN : produto das matrizes M e N
$\overline{AB}$: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B
$[a, b]$ $= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 01

Sejam X e Y dois conjuntos finitos com $X \subset Y$ e $X \neq Y$. Considere as seguintes afirmações:

I. Existe uma bijeção $f : X \to Y$.

II. Existe uma função injetora $g : Y \to X$.

III. O número de funções injetoras $f : X \to Y$ é igual ao número de funções sobrejetoras $g : Y \to X$.

É (são) verdadeira(s)

A) nenhuma delas.
B) apenas I.
C) apenas III.
D) apenas I e II.
E) todas.

Resolução:

As três afirmações são falsas.

I. Considerando que o número de elementos do conjunto X é diferente do número de elementos do conjunto Y, não é possível formar uma função bijetora sequer com domínio em X e contradomínio em Y.

II. Se $X \subset Y$ e $X \neq Y$, então o número de elementos de Y é maior que o número de elementos de X. Assim, não é possível formar uma função injetora sequer com domínio em Y e contradomínio em X.

III. Se $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, então há 24 funções injetoras de X em Y e 36 funções sobrejetoras de Y em X. Assim, não necessariamente, o número de funções injetoras de X em Y é igual ao número de funções sobrejetoras de Y em X.

Alternativa A

Questão 02

O número de soluções da equação $(1+\sec\theta)(1+\operatorname{cossec}\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

A) 0.
B) 1.
C) 2.
D) 3.
E) 4.

Resolução:

$(1+\sec\theta)(1+\cos e\sec\theta)=0$, com $\theta\in[-\pi,\pi]$

$1+\sec\theta=0\Rightarrow\sec\theta=-1\Rightarrow\theta=-\pi$ ou $\theta=\pi$

ou

$1+\cos\sec\theta\Rightarrow\cos\sec\theta=-1\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{2}$

Devido às condições de existência, nenhuma solução parcial pode ser usada, fazendo com que a equação inicial não tenha solução.

Alternativa A

Questão 03

Sejam $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Suponha que a,b,c,d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a,b/2,c/4,d-140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d-b$ é

A) $-140.$
B) $-120.$
C) $0.$
D) $120.$
E) $140.$

Resolução:

$(a,\ b,\ c,\ d)\xrightarrow{P.G.}(M,MK,MK^2,MK^3)$

$\left(a,\ \frac{b}{2},\ \frac{c}{4},\ d\text{-}140\right)\xrightarrow{P.A.}(M,\frac{MK}{2},\frac{MK^2}{4},MK^3-140)$

A razão da P.A é, por um lado: $\frac{MK}{2}-M=\frac{M(K-2)}{2}=\frac{2M(K-2)}{4}$

Por outro lado: $\frac{MK^2}{4}-\frac{MK}{2}=\frac{MK^2-2MK}{4}=\frac{MK(K-2)}{4}$

Igualando as razões encontradas:

$2M(K-2)=MK(K-2)$

1. Se $M=0\rightarrow a=b=c=d=0$, então $(a,\frac{b}{2},\frac{c}{4},d-140)$ não é P.A! ABSURDO!
2. Se M≠0

$2\cdot(K-2)=K(K-2)\rightarrow(K-2)^2=0$

$K=2$

Então a P.A. será $(M,\ M,\ M,\ 8M\ -\ 140)$

Então $8M-140=M$

$M=20$

$d-b=MK^3-MK=20\cdot8-20\cdot2=120$

Alternativa D

Questão 04

O maior valor de $tg\,x$, com $x=\frac{1}{2}\text{arc sen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, é

A) $1/4.$
B) $1/3.$
C) $1/2.$
D) $2.$
E) $3.$

Resolução:

Se $x=\frac{1}{2}\text{arc sen}\frac{3}{5}$, com $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, então $\text{sen}2x=\frac{3}{5}$, com $2x\in[0,\pi]$. Entretanto, contando que a função arc sen é definida para $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, tem-se que $2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Se $\text{sen}2x=\frac{3}{5}$, então $\cos2x=\frac{4}{5}$. Se $\cos2x=\frac{4}{5}$, então $2\cos^2x-1=\frac{4}{5}$, ou ainda, $\cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}$, pois $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Com $\cos x=\frac{3}{\sqrt{10}}$ e $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\text{sen}x=\frac{1}{\sqrt{10}}$, o que significa que $\text{tg}x=\frac{1}{3}$. Assim, o único valor possível de $\text{tg}x$ é $\frac{1}{3}$.

Alternativa B

Questão 05

Considere a reta $r: y = 2x$. Seja $A = (3,3)$ o vértice de uma quadrado $ABCD$, cuja diagonal $\overline{BD}$ está contida em r. A área deste quadrado é

A) $\frac{9}{5}$.

B) $\frac{12}{5}$.

C) $\frac{18}{5}$.

D) $\frac{21}{5}$.

E) $\frac{24}{5}$.

Resolução:

$r: y = 2x. \qquad A = (3,3)$

Como a diagonal $\overline{BD}$ está contida em r, segue que a distância de A a r é a metade da diagonal desta forma:

$\frac{d}{2} = \frac{|2(3)-(3)|}{\sqrt{(2)^2+(-1)^2}} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{|3|}{\sqrt{5}} \Rightarrow d = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, em que d é o comprimento da diagonal do quadrado. Desta forma, a área A do quadrao será $A = \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{18}{5}$

Alternativa C

Questão 06

Considere o sistema de equações

$$S\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{27}{y^2} + \frac{8}{z^3} = 3 \\ \frac{4}{x} + \frac{81}{y^2} + \frac{40}{z^3} = 10 \\ \frac{2}{x} + \frac{54}{y^2} + \frac{24}{z^3} = 7 \end{cases}.$$

Se (x,y,z) é uma solução real de S, então $|x|+|y|+|z|$ é igual a

A) 0.

B) 3.

C) 6.

D) 9.

E) 12.

Resolução:

Seja $\frac{1}{x} = A, \frac{1}{y^2} = B, \frac{1}{z^3} = C$, nosso sistema se torna:

$$\begin{cases} A + 27B + 8C = 3 \xrightarrow{4\times} 4A + 108B + 32C = 12 \ (I) \\ 4A + 81B + 40C = 10 \ (II) \\ 2A + 54B + 24C = 7 \xrightarrow{2\times} 4A + 108B + 48C = 14 \ (III) \end{cases}$$

Subtraindo (I) de (III), temos

$16C = 2 \Rightarrow C = \frac{1}{8}$

Subtraindo agora, (II) de (III):

$27B + 8C = 4 \Rightarrow 27B = 3 \Rightarrow B = \frac{1}{9}$

De (I):

$A+\frac{27}{9}+\frac{8}{8}=3 \Rightarrow A=-1$

Então, voltando às variáveis originais:

$$\left.\begin{array}{l} A=-1 \rightarrow x=-1 \\ B=\frac{1}{9} \rightarrow y=\pm 3 \\ C=\frac{1}{8} \rightarrow z=2 \end{array}\right\rangle |x|+|y|+|z|=6$$

Alternativa C

Questão 07

O número de soluções inteiras da inequação $0 \le x^2-\left|3x^2+8x\right| \le 2$ é

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Resolução:

Com $3x^2+8x \ge 0,$ ou ainda, $x \le -\frac{8}{3}$ ou $x \ge 0,$ $0 \le -2x^2-8x \le 2.$ Disso, $-4 \le x \le -2-\sqrt{3}$ ou $-2+\sqrt{3} \le x \le 0.$ Neste caso, $x=-4$ e $x=0$ são os únicos valores inteiros que satisfazem a desigualdade. Com $3x^2+8x<0,$ ou ainda, $-\frac{8}{3}<x<0,$ tem-se que $0 \le 4x^2+8x \le 2.$ Disso, $-1-\frac{\sqrt{6}}{2} \le x \le -2$ ou $0 \le x \le -1+\frac{\sqrt{6}}{2}.$ Neste caso, $x=-2$ é o único valor inteiro que satisfaz a desigualdade. Assim, a inequação exibe três soluções inteiras: $x=-4,\ x=-2$ e $x=0.$

Alternativa C

Questão 08

Sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$ e $B\{-1,-2,-3,-4,-5\}.$ Se $C=\{xy : x \in A\ e\ y \in B\},$ então o número de elementos de C é

A) 10.
B) 11.
C) 12.
D) 13.
E) 14.

Resolução:

Ao fazer um quadro da multiplicação dos elementos de A com os elementos de B temos.

x	1	–2	–3	4	–5
1	–1	–2	–3	–4	–5
2	–2	–4	–6	–8	10
3	–3	–6	9	–12	–15
4	–4	–8	–12	–16	–20
5	–5	–10	–15	–20	–25

Pela simples contagem por enumeração, temos que o número de elementos do conjunto C é: 14

Alternativa E

Questão 09

Sejam $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq ||x|-1|\}$ e $S_2 = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + (y+1)^2 \leq 25\}$. A área da região $S_1 \cap S_2$ é

A) $\frac{25}{4}\pi - 2.$

B) $\frac{25}{4}\pi - 1.$

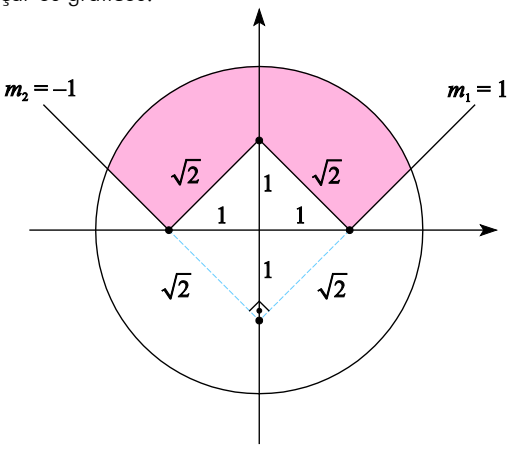
C) $\frac{25}{4}\pi.$

D) $\frac{75}{4}\pi - 1.$

E) $\frac{75}{4}\pi - 2.$

Resolução:

Para resolver essa questão é necessário esboçar os gráficos:



O círculo foi desenhado levando em consideração que o centro é (0,-1) e o raio é 5.

Como $m_1 \cdot m_2 = -1$, a área hachurada é: $S = \frac{1}{4}\pi R^2 - (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot 25 - 2 = \frac{25\pi}{4} - 2$

Alternativa A

Questão 10

Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{(\log_c b)} = b^{(\log_c a)}.$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1.$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.

B) apenas II.

C) apenas I e II.

D) apenas II e III.

E) todas.

Resolução:

As afirmações I e II são verdadeiras e a afirmação III é falsa.

I. Sendo $\log_c b = x, c^x = b$. Disso, $(c^x)^{\log_c a} = b^{\log_c a}$, ou ainda, $(c^{\log_c a})^x = b^{\log_c a}$. Com isso, tem-se que $a^x = b^{\log_c a}$, ou melhor, $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

II. Tem-se que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}} \cdot \frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}}.$$

Da igualdade justificada no item anterior, $a^{\log_d c} = c^{\log_d a}$, $b^{\log_d c} = c^{\log_d b}$ e $b^{\log_d a} = a^{\log_d b}$. Com isso,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{c^{\log_d a}}{c^{\log_d b}} \cdot \frac{a^{\log_d b}}{c^{\log_d a}} \cdot \frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}} = 1$$

III. Sendo a=2, b=4 e c=8, $\log_a c = 3$ e $\log_{ab}(bc) = \log_8 32$. Como $\log_8 32 \neq 3$, a afirmação não é, necessariamente, verdadeira.

Alternativa C

Questão 11

Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $\det\left(A^2 + A\right)$ é

A) 144.
B) 180.
C) 240.
D) 324.
E) 360.

Resolução:

$$A^2 = A \cdot A = (P^{-1} \cdot D \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot D \cdot P) = P^{-1} \cdot D \cdot P \cdot P^{-1} \cdot D \cdot P =$$
$$= P^{-1} \cdot D \cdot D \cdot P = P^{-1} \cdot D^2 \cdot P$$

Desta forma, segue que:

$$A^2 + A = P^{-1} \cdot D^2 \cdot P + P^{-1} \cdot D \cdot P = P^{-1}(D^2 + D) \cdot P$$

$$\begin{aligned}
\det\ (A^2 + A) &= \det\ (P^{-1}(D^2 + D)P) \\
&= \det\ (P^{-1}) \cdot \det(D^2 + D) \cdot \det(P) \\
&= \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(D^2 + D) \cdot \det(P) \\
&= \det(D^2 + D) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
&= \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2 \cdot 6 \cdot 12 \\
&= 144
\end{aligned}$$

Alternativa A

Questão 12

Considere dois círculos no primeiro quadrante.

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\frac{\pi}{16}$.
- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $\frac{7}{4}$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a

A) $\frac{\sqrt{123}}{2}$.

B) $\frac{\sqrt{129}}{2}$.

C) $\frac{\sqrt{131}}{2}$.

D) $\frac{\sqrt{135}}{2}$.

E) $\frac{\sqrt{137}}{2}$.

Resolução:

$C_1 : \frac{\pi}{16} = \pi \cdot r_1^2 \rightarrow r_1 = \frac{1}{4}$

$C_2 : 144\pi = \pi r_2^2 \rightarrow r_2 = 12$

(x_1, y_1, r_1) é P.G. $\Rightarrow y_1^2 = x_1 r_1 \Rightarrow x_1 = 4y_1^2$

Nossa P.G. é $\left(4y_1^2, y_1, \frac{1}{4}\right)$, cuja soma é $\frac{7}{4}$.

$4y_1^2 + y_1 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \rightarrow 4y_1^2 + y_1 - \frac{3}{2} = 0$

$8y_1^2 + 2y_1 - 3 = 0 \rightarrow \Delta = 100$

Como está no 1° quadrante, só podemos considerar a raiz positiva:

$y_1 = \frac{-2+10}{16} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_1 = 4 \cdot y_1^2 = \frac{4}{4} = 1 \rightarrow (x_1, y_1) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$

De forma análoga:

(x_2, y_2, r_2) é P.G. $\rightarrow y_2^2 = x_2 r_2 \rightarrow x_2 = \frac{y_2^2}{12}$

$\rightarrow \left(\frac{y_2^2}{12}, y_2, 12\right) \rightarrow \text{soma} : \frac{y_2^2}{12} + y_2 + 12 = 21 \rightarrow$

$\rightarrow y_2^2 + 12y_2 - 108 = 0 \rightarrow \Delta = 576$

$y_2 = \frac{-12+24}{2} = 6,\ x_2 = 3 \rightarrow (x_2, y_2) = (3, 6)$

Distância do ponto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ para $(3, 6)$

$d = \sqrt{(3-1)^2 + \left(6 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \left(\frac{11}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{137}}{2}$

Alternativa E

Questão 13

Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos.

II. Existe um número $x \in [0, \pi/2]$ de tal modo que os números $a_1 = \operatorname{sen} x$, $a_2 = \operatorname{sen}(x + \pi/4)$, $a_3 = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ e $a_4 = \operatorname{sen}(x + 3\pi/4)$ estejam, nesta ordem, em progressão geométrica.

III. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional.

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.

B) apenas II.

C) apenas III.

D) apenas I e II.

E) todas.

Resolução:

A afirmação I é verdadeira e as afirmações II e III são falsas.

I. Para se escrever um número inteiro positivo na forma $2^{K-1}(2m-1)$, basta fazer k igual ao sucessor da quantidade de fatores 2 e m igual à metade do sucessor do produto dos fatores primos ímpares.

II. Considerando que a_1, a_2, a_3, a_4, nesta ordem, formem uma progressão geométrica, $a_3^2 = a_2 \cdot a_4$, o que implica $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2} sen^2 x$. Com isso, $tg^2 x = -1$. Levando-se em conta que não há x real que satisfaz esta igualdade, não existe um número $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que torna a sequência (a_1, a_2, a_3, a_4) uma progressão geométrica.

III. Sejam a e b inteiros positivos e primos entre si tais que $\sqrt{p} = \frac{a}{b}$. Disso, $p = \frac{a^2}{b^2}$, ou melhor, $a^2 = b^2 \cdot p$. Independentemente de a e b, o número a^2 tem uma quantidade par de fatores primos e o produto $b^2 \cdot p$, uma quantidade ímpar, o que faz com que esta igualdade não seja verdadeira. Assim, não existe número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ seja um número racional.

Alternativa A

Questão 14

Com os elementos $1, 2, \ldots, 10$ são formadas todas as sequências $(a_1, a_2, \ldots, a_7)$. Escolhendo-se aleatoriamente uma dessas sequências, a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

A) $\frac{7!}{10^7 \cdot 3!}$.

B) $\frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$.

C) $\frac{3!}{10^7 \cdot 7!}$.

D) $\frac{10!}{10^3 \cdot 7!}$.

E) $\frac{10!}{10^7}$.

Resolução:

O número total de sequência é 10^7, pois para cada posição existem 10 possibilidades.

O número destas sequências, que não contem elementos repetidos, é $A_{10}^7 = \frac{10!}{3!}$.

Portanto, a possibilidade P de se montar uma sequência sem elementos repetidos é $P = \frac{\left(\frac{10!}{3!}\right)}{10^7} = \frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$.

Alternativa B

Questão 15

Considere a equação $(a - bi)^{501} = \frac{2(a+bi)}{(a^2+b^2)^{250}+1}$.

O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

A) 500.
B) 501.
C) 502.
D) 503.
E) 504.

Resolução:

Seja $a + bi = |z| \cdot cis\,\theta$, onde θ é o argumento e $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Então:

$a-bi=|z|\cdot cis(-\theta)\rightarrow(a-bi)^{501}=|z|^{501}cis(-501\theta)$

$(a^2+b^2)^{250}=|z|^{500}$

Substituindo na equação, teremos:

$|z|^{501}\cdot cis(-501\theta)=\dfrac{2\cdot|z|\cdot cis\theta}{|z|^{500}+1}$

$\rightarrow|z|^{1001}+|z|^{501}=2\cdot|z|\cdot cis(502\theta)$

Caso 1: $|z|=0\rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=0\rightarrow a=b=0$.

Caso 2: $|z|\neq 0$

$|z|^{1000}+|z|^{500}=2\cdot cis(502\theta)(*1)$

Igualando as partes imaginárias:

$\operatorname{sen}502\theta=0$, então $\cos(502\theta)=1$ ou -1.

$|z|^{1000}+|z|^{500}=2\cdot\cos(502\theta)$, a única solução possível é $\cos(502\theta)=1$.

$|z|^{1000}+|z|^{500}=2$, como $|z|>0$, então $|z|=1$.

Usando $*1$:

$|z|^{1000}+|z|^{500}=2\cdot cis(502\theta)$

$1+1=2\cdot cis(502\theta)$

$\boxed{cis(502\theta)=1}$

$(cis\theta)^{502}=1\rightarrow cis\theta=\sqrt[502]{1}\leftarrow 502$ raízes

Como $a=|z|\cos\theta$ e $b=|z|\operatorname{sen}\theta$, há 502 pares ordenados nesse caso.

Então, o total será:

$$1+502=503 \text{ pares } (a,b)$$

Alternativa D

Questão 16

Seja ABC um triângulo cujos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ medem $6\,cm$, $8\,cm$ e $10\,cm$, respectivamente. Considere os pontos M e N sobre o lado $\overline{BC}$ tais que $\overline{AM}$ é a altura relativa a $\overline{BC}$ e N é o ponto médio de $\overline{BC}$. A área do triângulo AMN, em cm^2, é

A) $3,36.$

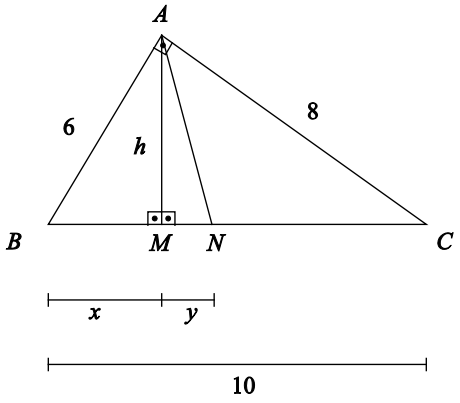
B) $3,60.$

C) $4,20.$

D) $4,48.$

E) $6,72.$

Resolução:
Observe o desenho:

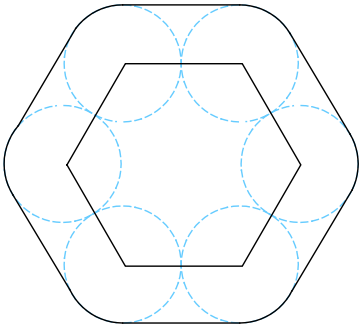


No triângulo ABC, $6^2 = x \cdot 10$, o que implica $x = 3{,}6$. Com isso, $y = 1{,}4$. Ainda no triângulo ABC, $10 \cdot h = 6 \cdot 8$, o que implica $h = 4{,}8$. Assim, a área do triângulo AMN, em cm^2, é $\frac{1{,}4 \cdot 4{,}8}{2} = 3{,}36$.

Alternativa A

Questão 17

Seis circunfêrencias de raio $5\,\text{cm}$ são tangentes entre si duas a duas e seus centros são vértices de um hexágono regular, conforme a figura abaixo. O comprimento de uma correia tensionada que envolve exsternamente as seis circunferências mede, em cm,



A) $18 + 3\pi$.
B) $30 + 10\pi$.
C) $18 + 6\pi$.
D) $60 + 10\pi$.
E) $36 + 6\pi$.

Resolução:
A correia e formada por seis segmentos de reta (partes da correia que não tem contato com a circunferência) e seis arcos de circunferência (a partes da correia que tem contato com a circunferência). Cada segmento de reta tem comprimento igual a 10 cm e se posicionarmos os arcos de circunferência lado a lado teremos uma circunferência completa. Desta forma o comprimento da correia será:

$$6 \cdot 10 + 2 \cdot \pi \cdot 5$$
$$60 + 10\pi$$

Alternativa D

Questão 18

O lugar geométrico dos pontos $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tais que a equação, em $z \in \mathbb{C}$,

$$z^2 + z + 2 - (a + ib) = 0$$

possua uma raiz puramente imaginária é
A) uma circunferência.
B) uma parábola.

C) uma hipérbole.
D) uma reta.
E) duas retas paralelas.

Resolução:

Se a equação possui uma raiz puramente imaginária, ela será do tipo $Z = m \cdot i$.
Substituindo e igualando a zero:

$$-m^2 + m \cdot i + 2 - a - bi = 0$$
$$\left(2 - a - m^2\right) + \left(m - b\right)i = 0$$

Então:

$$m = b$$
$$2 - a - m^2 = 0$$
$$2 - a - b^2 = 0$$
$$b^2 + a - 2 = 0$$

Calculando o $\Delta_{\text{cônica}} = 0^2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$.
Então se trata de uma parábola.

Alternativa B

Questão 19

Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a $30\,\text{m}$ de distância; o segundo, a $40\,\text{m}$; o terceiro alvo, a $60\,\text{m}$. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de $2/3$, então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é

A) $\frac{120}{160}$.

B) $\frac{119}{154}$.

C) $\frac{110}{144}$.

D) $\frac{105}{135}$.

E) $\frac{119}{144}$.

Resolução:
Considerando que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância,

$$p(1) \cdot 30^2 = p(2) \cdot 40^2 = p(3) \cdot 60^2,$$

sendo $p(1)$, $p(2)$ e $p(3)$ as probabilidades de se acertarem o 1°, o 2° e o 3° alvos, respectivamente. Com $p(1) = \frac{2}{3}$,

$$\frac{2}{3} \cdot 900 = p(2) \cdot 1600 = p(3) \cdot 3600,$$

o que implica $p(2) = \frac{3}{8}$ e $p(3) = \frac{1}{6}$. Levando-se em conta que a probabilidade de o atirador errar todos os alvos é

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{25}{144},$$

a probabilidade de ele acertar ao menos um alvo é

$$1 - \frac{25}{144} = \frac{119}{144}.$$

Alternativa E

Questão 20

Considere o triângulo ABC, em que os segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, $10\,\text{cm}$, $15\,\text{cm}$ e $20\,\text{cm}$. Seja D um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e seja E um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de D, tal que $D\hat{B}E = D\hat{C}B$. A medida, em cm, de $\overline{\text{CE}}$ é

A) $\dfrac{11\sqrt{6}}{3}$.

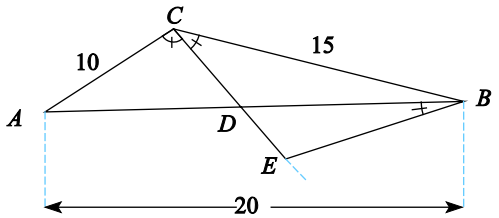
B) $\dfrac{13\sqrt{6}}{3}$.

C) $\dfrac{17\sqrt{6}}{3}$.

D) $\dfrac{20\sqrt{6}}{3}$.

E) $\dfrac{25\sqrt{6}}{3}$.

Resolução:



Pelo teorema de bissetriz interna, temos:

$$\frac{CA}{DA} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow \frac{10}{DA} = \frac{15}{(20 - DA)} \Rightarrow 2(20 - DA) = 3 \cdot DA \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 40 - 2DA = 3 \cdot DA \Rightarrow 5 \cdot DA = 40 \Rightarrow DA = 8\,.$$

Desta forma $DB = 12$.
Pela relação de Stewart, temos:

$$CD^2 \cdot 20 + 8 \cdot 12 \cdot 20 = 10^2 + 12 + 15^2 \cdot 8$$
$$20 \cdot CD^2 = 1080 \Rightarrow CD^2 = 54 \Rightarrow CD = 3\sqrt{6}$$

Pela semelhança entre os triângulos BED e CAD, temos:

$$\frac{DE}{8} = \frac{12}{3\sqrt{6}} \Rightarrow DE = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$
$$\therefore CE = 3\sqrt{6} + \frac{16\sqrt{6}}{3} = \frac{25\sqrt{6}}{3}$$

Alternativa E

Questão 21

Considere as retas de equações
$r: y = \sqrt{2x} + a$ e $s: y = bx + c$,
em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por $(0,1)$ e s, por $\left(\sqrt{2}, 4\right)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

Resolução:

$r: y = \sqrt{2x} + a$

$m_r = \sqrt{2} \quad n_r = a$

$s: \quad y = bx + c$

$m_s = b \quad n_s = c$

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$

$\sqrt{2} \cdot b = -1$

$b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$(0;1) \in r$

$1 = \sqrt{2} \cdot 0 + a \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n_r = 1$

$(\sqrt{2};4) \in s$

$4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} + c \Rightarrow c = 5 \Rightarrow n_s = 5$

$r: y = \sqrt{2}x + 1$

$s: y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 5$

$r \cap s: y - 1 = -2y + 10$

$3y = 11 \Rightarrow y = \frac{11}{3}$ $(altura\ do\ triângulo)$

$ox \cap r:\ 0 = \sqrt{2}x + 1$

$\sqrt{2}x = -1$

$x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$ox \cap s:\ 0 = \frac{-\sqrt{2}}{2}x + 5$

$\frac{\sqrt{2}x}{2} = 5$

$\sqrt{2}x = 10$

$x = \frac{10}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{10\sqrt{2}}{2}$

$\Delta x = \frac{10\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{11\sqrt{2}}{2}$ $(base\ do\ triângulo)$

$A_{TRI} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{11}{3}$

$A_{TRI} = \frac{121\sqrt{2}}{12}\ u.a.$

Questão 22

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

Resolução:

Tem-se que

$$4^{3x-1} > 3^{4x} \Rightarrow \frac{4^{3x}}{4} > 3^{4x} \Rightarrow \frac{64^x}{4} > 81^x \Rightarrow \frac{64^x}{81^x} > 4 \Rightarrow \left(\frac{64}{81}\right)^x > 4 \Rightarrow \log_{\frac{64}{81}}\left(\frac{64}{81}\right)^x < \log_{\frac{64}{81}} 4$$

$$\therefore x < \log_{\frac{64}{81}} 4$$

Assim, a inequação é satisfeita para todo número real x tal que $x < \log_{\frac{64}{81}} 4$.

Questão 23

Considere o polinômio

$p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$

A) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

B) Determine as raízes de $p(x)$.

Resolução:

A)

$$p(x)=x^4-\left(1+2\sqrt{3}\right)x^3+\left(3+2\sqrt{3}\right)x^2-\left(1+4\sqrt{3}\right)x+2$$

$$p(x)=\left(x^2+ax+1\right)\cdot\left(x^2+bx+2\right)$$

$$p(x)=x^4+(a+b)x^3+(2+ab+1)x^2+(2a+b)x+2$$

$$\begin{cases} a+b=-1-2\sqrt{3} \\ ab+3=3+2\sqrt{3} \\ 2a+b=-1-4\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-2\sqrt{3} \\ b=-1 \end{matrix}$$

B)

$$p(x)=\left(x^2-2\sqrt{3}x+1\right)\cdot\left(x^2-x+2\right)$$

$x^2-2\sqrt{3}x+1=0$ ou $x^2-x+2=0$

$x_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ $\quad$ $x_3=1+i\sqrt{7}$

$x_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ $\quad$ $x_4=1-i\sqrt{7}$

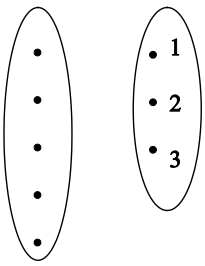
$s=[\sqrt{3}+\sqrt{2};\sqrt{3}-\sqrt{2};1+i\sqrt{7};1-i\sqrt{7}]$

Questão 24

Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funcoes sobrejetivas $f:B\to A$ existem?

Resolução:

Pensemos da seguinte forma:



Seja x o número de flechas que chegam em 1, y em 2 e z em 3.

Sabemos que:

$$x+y+z=5$$

Usando o método bola-traço, para que a função seja sobrejetora, x, y, $z\geq 1$.

O número de soluções inteiras será $\binom{4}{2}=6$.

Essas soluções são: (1, 1, 3); (1, 3, 1); (1, 2, 2)
(2, 1, 2); (2, 2, 1); (3, 1,1)

Então, o número de maneiras que podemos escolher é:

$$\binom{5}{x}\cdot\binom{5-x}{y}\cdot\binom{5-x-y}{z}=\frac{5!}{x!(5-x)!}\cdot\frac{(5-x)!}{y!(5-x-y)!}=\frac{120}{x!y!z!}$$

Substituindo as ternas ordenadas:

$$\text{total}=120\left(\frac{1}{1!1!3!}+\frac{1}{1!3!1!}+\frac{1}{1!2!2!}+\frac{1}{2!1!2!}+\frac{1}{2!2!1!}+\frac{1}{3!1!1!}\right)$$

$$=120\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)=120\left(\frac{3}{6}+\frac{3}{4}\right)$$

$=120\left(\frac{6+9}{12}\right)=150$ possíveis funções sobrejetoras.

Questão 25

Sejam $A=\{1,2,...,29,30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q>1$.

A) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q=\frac{3}{2}$.

B) Escreva $q=\frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{N}$ e $\text{mdc}(m,n)=1$. Determine o maior valor possível para n.

Resolução:

A) Com $q=\frac{3}{2}$, $a_3=a_1\cdot\frac{9}{4}$. Considerando que a_1 e a_3 pertencem ao conjunto A, $a_1=4$ ou $a_1=8$ ou $a_1=12$. Assim, as progressões de razão $q=\frac{3}{2}$ são $(4,6,9)$, $(8,12,18)$ e $(12,18,27)$.

B) Com $q=\frac{m}{n}$, sendo m, $n\in\mathbb{Z}$ e mdc $(m,n)=1$, $a_3=a_1\cdot\frac{m^2}{n^2}$, o que significa que a_1 deve ser múltiplo de n^2. Considerando que a_1 e a_3 devem pertencer ao conjunto A e que $m>n$, pois $q>1$, o maior valor possível para n é 4.

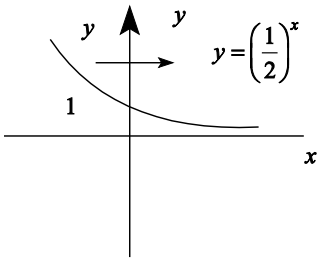
Questão 26

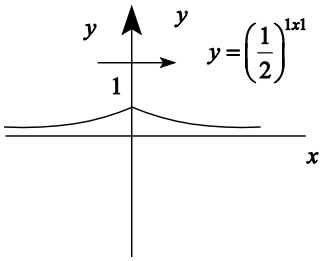
Esboce o gráfico da função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por

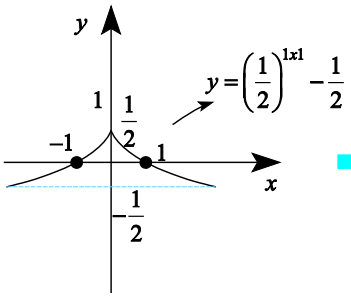
$$f(x)=\left|2^{-|x|}-\frac{1}{2}\right|.$$

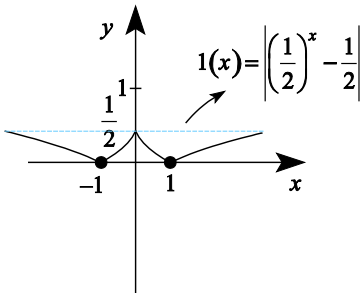
Resolução:

$$f(x)=\left|2^{-|x|}-\frac{1}{2}\right|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}-\frac{1}{2}\right|$$









Questão 27

Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x+az=5 \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{cases} x+ay+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x+az=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Por meio do método de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2a+9a+0)-(-6+0-a^2)$$

$$a^2+7a+6=0$$

$$a=-1 \text{ ou } a=-6$$

com $a=-1$:

$$\begin{cases} x-y+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x-z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y+z=2 \\ -3y+4z=1 \\ -6y+8z=2 \end{cases} \Rightarrow S.P.I.$$

com $a=-6$

$$\begin{cases} x-6y+z=2 \\ -x-2y+3z=-1 \\ 3x-6z=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-6y+z=2 \\ -8y+4z=1 \\ -6y+3z=2 \end{cases} \Rightarrow S.I.$$

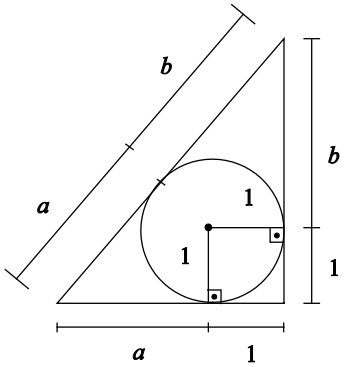
Logo, para que o sistema seja impossível, é preciso que $a=-6$.

Questão 28

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c=2\left(1+\sqrt{6}\right)$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em torno do seu maior cateto.

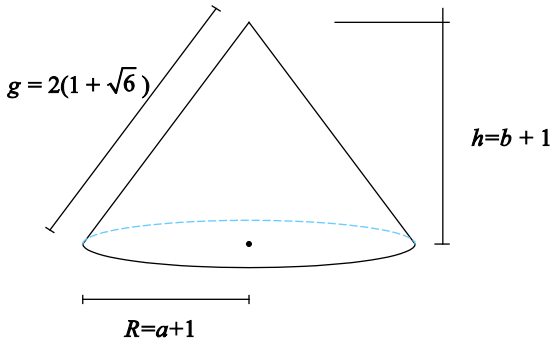
Resolução:

Observe a figura:



Considere $a<b$. Tem-se $a+b=2\left(1+\sqrt{6}\right)$. Com isso, o perímetro do triângulo é $6+4\sqrt{6}$ e a área é $3+2\sqrt{6}$, pois a mesma pode ser obtida multiplicando-se o semiperímetro pelo raio da circunferência inscrita. Com a área, $\frac{(a+1)\cdot(b+1)}{2}=3+2\sqrt{6}$, ou ainda, $(a+1)(b+1)=6+4\sqrt{6}$. Como $b=2+2\sqrt{6}-a$, $(a+1)\left(3+2\sqrt{6}-a\right)=6+4\sqrt{6}$, ou melhor, $a^2-\left(2+2\sqrt{6}\right)a+3+2\sqrt{6}=0$. Resolvendo-se esta equação $a=3+\sqrt{6}$ ou $a=-1+\sqrt{6}$. Se $a=3+\sqrt{6}$, $b=-1+\sqrt{6}$. Se $a=-1+\sqrt{6}$, $b=3+\sqrt{6}$. Levando-se em conta que $a<b$, $a=-1+\sqrt{6}$ e $b=3+\sqrt{6}$.

Observe a figura:



O cone formado pelo giro do triângulo em torno do maior cateto, tem raio $R=\sqrt{6}$ e geratriz $g=2\left(1+\sqrt{6}\right)$. Assim, a área total de sua superfície é $\pi\sqrt{6}\left(\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}\right)$, ou melhor, $\left(18+2\sqrt{6}\right)\pi$.

Questão 29

Determine o conjunto das soluções reais da equação $3\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{tg}^2 x=1$.

Resolução:

Usando a identidade $\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1\cdot\cos(x)}{2}$ na equação temos:

$$3\operatorname{cossec}^2\left(\frac{x}{2}\right)-\operatorname{tg}^2(x)=1$$

$$3\cdot\frac{2}{1-\cos(x)}-\operatorname{tg}^2(x)=1$$

$$3\cdot\frac{2}{1-\cos(x)}-\operatorname{tg}^2(x)=1$$

$$\frac{6}{1-\cos(x)}=1+\operatorname{tg}^2(x)\Rightarrow\frac{6}{1+\cos(x)}=\sec^2(x)$$

$$\Rightarrow\frac{6}{1+\cos(x)}=\frac{1}{\cos^2(x)}\Rightarrow 6\cos^2(x)=1+\cos(x)$$

$$\Rightarrow 6\cdot\cos^2(x)-\cos(x)-1=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(6)(-1)=25$$

$$\cos(x)=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2(6)}\Rightarrow\begin{cases}\cos(x)=\frac{1}{2}\\ \text{ou}\\ \cos(x)=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

De $\cos(x)=\frac{1}{2}$ segue $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$.

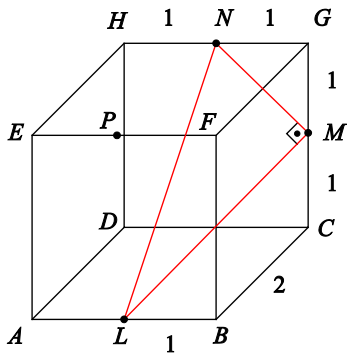
De $\cos(x)=-\frac{1}{3}$ segue $x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi$.

$$S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Questão 30

Considere o cubo $ABCDEFGH$ de aresta 2 tal que: $ABCD$ é o quadrado da base inferior; $EFGH$, o quadrado da base superior e $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

Resolução nº 1:



Δ_{MNG} é triângulo retângulo

$(MN)^2=(GM)^2+(GN)^2$

$MN=\sqrt{2}\,u.c$

P é ponto médio da aresta $\overline{EF}$.

Δ_{LPN} é triângulo retângulo

$(LN)^2=(LP)^2+(PN)^2$

$LN=2\sqrt{2}\ u.c$

Δ_{LBM} é triângulo retângulo

$(LM)^2 = (LB)^2 + (BM)^2$

$LM = \sqrt{6}\ u.c.$

Δ_{BCM} é triângulo retângulo

$(BM)^2 = (BC)^2 + (CN)^2$

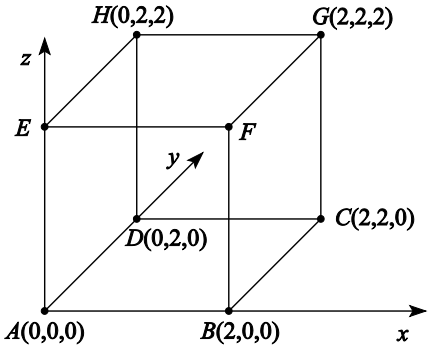
$BM = \sqrt{5}\ u.c.$

Δ_{LMN} é triângulo retângulo.

$LM = \sqrt{6}\ u.c.\ \ MN = \sqrt{2}\ u.c.\ \ \ LN = 2\sqrt{2}\ u.c.$

$$A_{\Delta_{LMN}} = \frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{2} = \sqrt{3}\ u.a.$$

Resolução n° 2:



Vetores:

$$\vec{L} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} = (1,0,0)$$

$$\vec{M} = \frac{\vec{C}+\vec{G}}{2} = (2,2,1)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{G}+\vec{H}}{2} = (1,2,2)$$

$$\overrightarrow{LM} = \vec{M} - \vec{L} = (1,2,1)$$

$$\overrightarrow{LN} = (0,2,2)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{LM}\times\overrightarrow{LN}| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-2\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2+2^2} = \frac{\sqrt{12}}{2} = \sqrt{3}$$

Matemática
Diego Bernadelli
Mateus Costa
Ney Marcondes
Salviano

Colaboradores
Aline Alkmin
Cristiane Ribeiro
João Paulo
Márcia Santana
Nathally Cortez
Rodrigo Ramos
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Rodrigo Ramos

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo