2009 ITA MATEMÁTICA

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Notações

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$
$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < +\infty\}$
$A \setminus B = \{x \in A;\ x \notin B\}$
A^C : complementar do conjunto A
$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$tr\,A$: soma dos elementos da diagonal principal da matriz quadrada A

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Re} z$: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Im} z$: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
$M_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
A^t : transposta da matriz A
$\det A$: determinante da matriz A

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

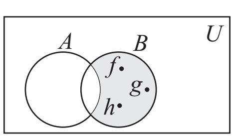
Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \setminus B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

A) 0. B) 1. C) 2. D) 4. E) 8.

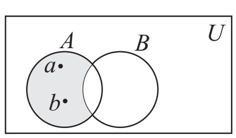
Resolução:

Pelo diagrama de Venn temos:

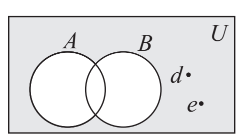
$(B^C \cup A)^C = \{f; g; h\}$



$B^C \cap A = \{a; b\}$



$A^C \setminus B = \{d; e\}$



Assim $A \cap B = \{c\} \Rightarrow n(P(A \cap B)) = 2^1 = 2$

$P(A \cap B) = \{\varnothing; \{c\}\}$

Alternativa C

Questão 02

Uma empresa possui 1000 carros, sendo uma parte com motor a gasolina e o restante com motor "flex" (que funciona com álcool e com gasolina). Numa determinada época, neste conjunto de 1000 carros, 36% dos carros com motor a gasolina e 36% dos carros com motor "flex" sofrem conversão para também funcionar com gás GNV. Sabendo-se que, após esta conversão, 556 dos 1000 carros desta empresa são bicombustíveis, pode-se afirmar que o número de carros tricombustíveis é igual a

A) $246.$ B) $252.$ C) $260.$ D) $268.$ E) $284.$

Resolução:

Seja x a quantidade de carros à gasolina e $1000-x$ a de flex:

$\frac{36x}{100}$ é a quantidade de carros à gasolina/GNV

$\frac{36(1000-x)}{100}$ é a quantidade de carros à gasolina/álcool/GNV

Do exposto:

$$\frac{36x}{100}+\frac{64(1000-x)}{100}=556 \quad \Rightarrow \quad x=300$$

Cálculo da quantidade de carros tricombustíveis:

$$\frac{36(1000-x)}{100}=\frac{36\cdot 700}{100}=252$$

Alternativa B

Questão 03

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\setminus\{0\}$ uma função satisfazendo às condições:

$f(x+y)=f(x)f(y)$, para todo x, $y\in\mathbb{R}$ e $f(x)\neq 1$, para todo $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Das afirmações:

I. f pode ser ímpar.

II. $f(0)=1$.

III. f é injetiva.

IV. f não é sobrejetiva, pois $f(x)>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

é (são) falsa(s) apenas

A) I e III. B) II e III. C) I e IV. D) IV. E) I.

Resolução:

Se f é ímpar, então $f(x)=-f(-x)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

Fazendo $y=-x$:

$$f(x+(-x))=f(x)\cdot f(-x)$$

$$f(0)=-f(x)\cdot f(x)$$

$$[f(x)]^2=-f(0) \qquad (1)$$

Cálculo de $f(0)$:

Fazendo $y=0$

$$f(x+0)=f(x)\cdot f(0)$$

$$f(x)=f(x)\cdot f(0)$$

$\therefore f(0)=1$, pois $f(x)\neq 0$. (II é verdadeira)

Voltando em (1):

$[f(x)]^2=-1$, que é um absurdo.

Do exposto, I é falsa.
Da definição:
$f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$
Como $f(y)\neq 1$ para todo $y\neq 0$ temos:
$f(x+y)\neq f(x)$, para todo x e y reais com $y\neq 0$.
Portanto, f é injetiva e a afirmação III é verdadeira.

Fazendo $x=y=\frac{t}{2}$:

$$f\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right)=f\left(\frac{t}{2}\right)\cdot f\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$f(t)=\left[f\left(\frac{t}{2}\right)\right]^2\geq 0$$

Como $f(t)\neq 0$:
$f(t)>0$, $\forall\ x\in\mathbb{R}$
IV é verdadeira

Alternativa E

Questão 04

Se $a=\cos\frac{\pi}{5}$ e $b=\text{sen}\,\frac{\pi}{5}$, então, o número complexo $\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)^{54}$ é igual a

A) $a+bi.$
B) $-a+bi.$
C) $\left(1-2a^2b^2\right)+ab\left(1+b^2\right)i.$
D) $a-bi.$
E) $1-4a^2b^2+2ab\left(1-b^2\right)i.$

Resolução:

$$z=\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\ \text{sen}\,\frac{\pi}{5}\right)^{54}=\cos\left(\frac{54\pi}{5}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{54\pi}{5}\right)$$

$$z=\cos\left(10\pi+\frac{4\pi}{5}\right)+i\ \text{sen}\left(10\pi+\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z=\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$z=-\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\ \text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

$\therefore\ z=-a+bi$

Alternativa B

Questão 05

O polinômio de grau 4
$\left(a+2b+c\right)x^4+\left(a+b+c\right)x^3-\left(a-b\right)x^2+\left(2a-b+c\right)x+2\left(a+c\right)$,
com a, b, $c\in\mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

A) $3+\sqrt{3}.$
B) $2+3\sqrt{3}.$
C) $2+\sqrt{2}.$
D) $1+2\sqrt{2}.$
E) $2+2\sqrt{2}.$

Resolução:

Fazendo
$P(x)=(a+2b+c)x^4+(a+b+c)x^3-(a-b)x^2+\ (2a-b+c)x+2(a+c)$
$P(-x)=(a+2b+c)x^4-(a+b+c)x^3-(a-b)x^2\ -(2a-b+c)x+2(a+c)$
Temos que $P(x)$ é par, ou seja,
$P(x)\equiv P(-x)$

Assim $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a-b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2b \\ c=-3b \end{cases}$

Logo, $P(x)=bx^4-bx^2-2b$

Como $b \neq 0$, então

$P(x)=0 \Leftrightarrow x^4-x^2-2=0$

Ou seja , as raízes são:

$\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, i e $-i$

$\therefore \ \left|\sqrt{2}\right|+\left|-\sqrt{2}\right|+|i|+|-i|=2\sqrt{2}+2$

Alternativa E

Questão 06

Considere as funções $f(x)=x^4+2x^3-2x-1$ e $g(x)=x^2-2x+1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f o g$ é igual a

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Resolução:

$f(x)=x^4+2x^3-2x-1 \Rightarrow f(x)=x^4-1+2x(x^2-1)$

$f(x)=(x-1)(x^3+x^2+x+1)+2x(x^2-1)$

$f(x)=(x-1)\left[(x+1)x^2+(x+1)\right]+2x(x-1)(x+1)$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)+2x(x+1)(x-1)$

$f(x)=(x+1)(x-1)(x+1)^2 \Rightarrow f(x)=(x+1)^3(x-1)$

$f(g(x))=0 \Rightarrow (g(x)+1)^3(g(x)-1)=0$

$g(x)=-1$	$g(x)=1$
$x^2-2x+1=-1$	$x^2-2x+1=1$
$x^2-2x+2=0$	$x^2-2x=0$
$\Delta=4-8=-4$	$x'=0$
$x=\dfrac{2\pm 2i}{2}$	$x''=2$
$x'=1+i$	
$x''=1-i$	

Como resolvemos a equação $g(x)=-1$ três vezes, temos as raízes $1+i$ e $1-i$ com multiplicidade três.

Alternativa C

Questão 07

Suponha que os coeficientes reais a e b da equação $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ são tais que a equação admite solução não real r com $|r| \neq 1$. Das seguintes afirmações:

I. A equação admite quatro raízes distintas, sendo todas não reais.
II. As raízes podem ser duplas.
III. Das quatro raízes, duas podem ser reais.

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas II e III.
E) nenhuma.

Resolução:
$r = c + di$, com c e d reais, $d \neq 0$ e $c^2 + d^2 \neq 1$.
Como os coeficientes são reais e a equação é recíproca:
$c - di, \dfrac{1}{c+di}$ e $\dfrac{1}{c-di}$ também são raízes.
Mostremos agora que elas são todas distintas:
$c + di \neq c - di$, pois $d \neq 0$

$\dfrac{1}{c+di} = \dfrac{c-di}{c^2+d^2} \neq c - di$, pois $c^2 + d^2 \neq 1$

$\dfrac{1}{c-di} = \dfrac{c+di}{c^2+d^2} \neq c + di$, pois $c^2 + d^2 \neq 1$

Do exposto, apenas a afirmação I está correta.

Alternativa A

Questão 08

Se as soluções da equação algébrica $2x^3 - ax^2 + bx + 54 = 0$, com coeficientes $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, formam, numa determinada ordem, uma progressão geométrica, então, $\dfrac{a}{b}$ é igual a

A) -3.
B) $-\dfrac{1}{3}$.
C) $\dfrac{1}{3}$.
D) 1.
E) 3.

Resolução:
Sejam x_1, x_2 e x_3 as raízes da equação algébrica.
Como estão em PG, podemos dizer que:
$x_1 = \dfrac{k}{q}, x_2 = k$ e $x_3 = k \cdot q$
Utilizando as relações de Girard:
$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\dfrac{54}{2} \Rightarrow \dfrac{k}{q} \cdot k \cdot k \cdot q = -\dfrac{54}{2} \Rightarrow k^3 = -27 \Rightarrow k = -3$
Como $x_2 = k = -3$ é raiz da equação algébrica, temos:
$2(-3)^3 - a(-3)^2 + b(-3) + 54 = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$
$\therefore \dfrac{a}{b} = -\dfrac{1}{3}$

Alternativa B

Questão 09

Dados $A \in M_{3x2}(\mathbb{R})$ e $b \in M_{3x1}(\mathbb{R})$, dizemos que $X_0 \in M_{2x1}(\mathbb{R})$ é a melhor aproximação quadrática do sistema $AX = b$ quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t (AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

a sua melhor aproximação quadrática é

A) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
B) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Resolução:

$$A \cdot X_0 - b = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X-1 \\ Y-1 \\ X-1 \end{bmatrix}$$

$$(AX_0 - b)^t = (-X-1;\ Y-1;\ X-1)$$

$$(AX_0 - b)^t \cdot (AX_0 - b) = (X+1)^2 + (Y-1)^2 + (X-1)^2$$

O menor valor possível de $(Y+1)^2$ acontece quando $Y = -1$.

O menor valor possível de $(X+1)^2 + (X-1)^2 = F(X) = 2x^2 + 2$ acontecerá quando $X = 0$ pois, $F'(x) = 4x$, $x = 0$ é ponto crítico $F''(x) = 4$, $F''(0) = 4 > 0$

Assim $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.`

Alternativa E

Questão 10

O sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

com $(c_1, c_2) \neq (0,0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é

A) determinado.
B) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.
C) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.
D) impossível.
E) indeterminado.

Resolução:

Como $(c_1,\ c_2) \neq (0,\ 0)$, podemos ter:

Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$:

$a_1 \cdot c_1 = b_1 \cdot c_1 = 0 \ \Rightarrow \ a_1 = b_1 = 0$,

substituindo na primeira equação do sistema:

$0 \cdot x + 0 \cdot y = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$,

o que contradiz a hipótese.

Se $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$:

$a_2c_2 = b_2c_2 = 0 \Rightarrow a_2 = b_2 = 0$,

substituindo na segunda equação do sistema:

$0x + 0y = c_2 \ \Rightarrow \ c_2 = 0$

o que contradiz a hipótese.

Se $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1c_1x + b_1c_1y = c_1^2 \\ a_2c_2x + b_2c_2y = c_2^2 \end{cases},$$

somando as duas equações:

$$(a_1c_1 + a_2c_2)x + (b_1c_1 + b_2c_2)y = c_1^2 + c_2^2$$

$$\therefore c_1^2 + c_2^2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$$

o que contradiz a hipótese.

Portanto, o sistema é impossível.

Alternativa D

Questão 11

Seja $A \in M_{2x2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $trA = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2x1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a

A) $\frac{101}{25}$ B) $\frac{121}{25}$ C) 5 D) $\frac{49}{9}$ E) $\frac{25}{4}$

Resolução:

Como a_{11}, a_{12}, a_{22} estão em progressão geométrica, temos: $a_{12}^2 = a_{11} \cdot a_{22}\,(i)$

Como $trA = 5a_{11}$, temos:

$a_{11} + a_{22} = 5a_{11}$

$\therefore a_{22} = 4a_{11}\,(ii)$

Substituindo (ii) em (i):

$a_{12}^2 = a_{11} \cdot 4a_{11} \Rightarrow a_{12}^2 = 4a_{11}^2$

$\therefore a_{12} = \pm 2a_{11}\,(iii)$

Como o sistema $AX = X$ admite solução não nula, o sistema $(A - I) \cdot X = \mathbf{0}$ é possível e indeterminado, ou seja:

$$\det(A - I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a_{11} - 1)(a_{22} - 1) - a_{12}^2 = 0$$

$$(a_{11} - 1)(4a_{11} - 1) - 4a_{11}{}^2 = 0 \Rightarrow 4a_{11}^2 - a_{11} - 4a_{11} + 1 - 4a_{11}^2 = 0 \Rightarrow -5a_{11} + 1 = 0$$

$\therefore a_{11} = \frac{1}{5}$

$a_{22} = a_{11} \cdot q^2 \Rightarrow 4a_{11} = a_{11} \cdot q^2$

$\therefore q^2 = 4$

Portanto:

$$a_{11}^2 + q^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4 = \frac{1}{25} + 4 = \frac{101}{25}$$

Alternativa A

Questão 12

Uma amostra de estrangeiros, em que 18% são proficientes em inglês, realizou um exame para classificar a sua proficiência nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% foram classificados como proficientes. Entre os não proficientes em inglês, 7% foram classificados como proficientes. Um estrangeiro desta amostra, escolhido ao acaso, foi classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente

A) 73% B) 70% C) 68% D) 65% E) 64%

Resolução:

Considerando os eventos:

A: Elemento escolhido é proficiente em inglês.

B: Elementos escolhido foi classificado.

Sendo $\tilde{X}$ a negação do evento X, temos:

$$P(A) = \frac{18}{100}, P(\tilde{A}) = \frac{82}{100}, P(B/A) = \frac{75}{100}, P(B/\tilde{A}) = \frac{7}{100}$$

Como $P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$, temos:

$$P(B \cap A) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{75}{100} \cdot \frac{18}{100} = \frac{1350}{10000}$$

Como $P(B) = P(A) \cdot P(B/A) + P(\tilde{A}) \cdot P(B/\tilde{A})$, temos:

$$P(B) = \frac{18}{100} \cdot \frac{75}{100} + \frac{82}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{1350 + 574}{10000} = \frac{1924}{10000}$$

Como $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$, temos:

$$P(A/B)=\frac{\frac{1350}{10000}}{\frac{1924}{10000}}=\frac{1350}{1924}$$

$\therefore P(A/B)\cong 70\%$

Alternativa B

Questão 13

Considere o triângulo ABC de lados $a=\overline{BC}$, $b=\overline{AC}$ e $c=\overline{AB}$ e ângulos internos $\alpha=C\hat{A}B$, $\beta=A\hat{B}C$ e $\gamma=B\hat{C}A$. Sabendo-se que a equação $x^2-2bx\cos\alpha+b^2-a^2=0$ admite c como raiz dupla, pode-se afirmar que

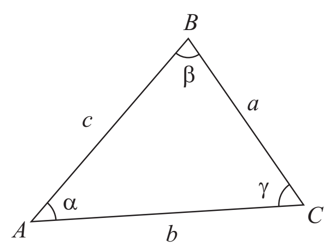
A) $\alpha=90^\circ$
B) $\beta=60^\circ$
C) $\gamma=90^\circ$
D) O triângulo é retângulo apenas se $\alpha=45^\circ$
E) O triângulo é retângulo e b é hipotenusa.

Resolução:

Se c é raiz dupla, então pelo produto das raízes temos:

$$\frac{b^2-a^2}{1}=c^2\Rightarrow b^2=a^2+c^2$$

Então, o triângulo é retângulo e b é hipotenusa.



Alternativa E

Questão 14

No plano, considere S o lugar geométrico dos pontos cuja soma dos quadrados de suas distâncias à reta $t:x=1$ e ao ponto $A=(3,2)$ é igual a 4. Então, S é

A) uma circunferência de raio $\sqrt{2}$ e centro $(2,1)$.
B) uma circunferência de raio 1 e centro $(1,2)$.
C) uma hipérbole.
D) uma elipse de eixos de comprimento $2\sqrt{2}$ e 2.
E) uma elipse de eixos de comprimento 2 e 1.

Resolução:

Sendo $P=(x,y)$, temos:

Distância do ponto P à reta r igual a $|x-1|$;

Distância do ponto P ao ponto A igual a $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}$

$$(|x-1|)^2+\left(\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}\right)^2=4\Rightarrow x^2-2x+1+\left[x^2-6x+9+(y-2)^2\right]=4$$

$$2x^2-8x+8+2+(y-2)^2=4\Rightarrow 2(x-2)^2+(y-2)^2=2$$

$$\frac{(x-2)^2}{1^2}+\frac{(y-2)^2}{(\sqrt{2})^2}=1$$

Portanto, trata-se de uma elipse cujo comprimento do eixo maior é igual a $2\sqrt{2}$ e o do eixo menor é igual a 2.

Alternativa D

Questão 15

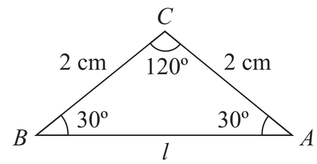
Do triângulo de vértices A, B e C, inscrito em uma circunferência de raio $R = 2\text{cm}$, sabe-se que o lado $\overline{BC}$ mede 2cm e o ângulo interno $A\hat{B}C$ mede 30°. Então, o raio da circunferência inscrita neste triângulo tem o comprimento, em cm, igual a

A) $2-\sqrt{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D) $2\sqrt{3}-3$ E) $\frac{1}{2}$

Resolução:
Pela lei dos senos:

$$\frac{BC}{\text{sen}\hat{A}} = 2R \Rightarrow \frac{2}{\text{sen}\hat{A}} = 2\cdot 2 \Rightarrow \text{sen}\hat{A} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \hat{A} = 30^\circ$ ou $\hat{A} = 150^\circ$



Como $\hat{B} = 30^\circ$, temos $\hat{A} = 30^\circ$ ($\hat{A} = 150^\circ$ não formaria o ΔABC)

$$l^2 = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cos 120^\circ$$
$$l^2 = 12$$
$$l = 2\sqrt{3}$$

Seja r o raio da circunferência inscrita no ΔABC e S sua área:

$$S = \frac{2\cdot 2\cdot \text{sen } 120^\circ}{2} = \sqrt{3}$$

$$S = p\cdot r = \left(\frac{2+2+2\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r = \left(2+\sqrt{3}\right)r$$

$$\therefore \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot r = \sqrt{3} \Rightarrow r = \left(2\sqrt{3}-3\right)\text{cm}$$

Alternativa D

Questão 16

A distância entre o vértice e o foco da parábola de equação $2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0$ é igual a

A) 2. B) $\frac{3}{2}$. C) 1. D) $\frac{3}{4}$. E) $\frac{1}{2}$.

Resolução:

$$2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{4},$$

que é uma equação de parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo $0y$.
Tal equação pode ser escrita na forma

$$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2,$$

em que p é a distância do foco ao vértice.
Fatorando:

$$2x^2 - 4x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 - 2y + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2y - \frac{1}{2}$$

$$(x-1)^2 = 2\left(y - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow y - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}(x-1)^2 \Rightarrow \frac{1}{4p} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore p = \frac{1}{2}$$

Alternativa E

Questão 17

A expressão

$$\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right]\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

é equivalente a

A) $[\cos x-\operatorname{sen}^2 x]\operatorname{cotg} x$.
B) $[\operatorname{sen} x+\cos x]\operatorname{tg} x$.
C) $[\cos^2 x-\operatorname{sen} x]\operatorname{cotg}^2 x$.
D) $[1-\operatorname{cotg}^2 x]\operatorname{sen} x$.
E) $[1+\operatorname{cotg}^2 x][\operatorname{sen} x+\cos x]$.

Resolução:

$i)\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)=\operatorname{sen} x\cdot\cos\frac{11}{2}\pi+\operatorname{sen}\frac{11}{2}\pi\cdot\cos x=-\cos x$

$ii)1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=1+\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

Seja $E=\frac{2\left[\operatorname{sen}\left(x+\frac{11}{2}\pi\right)+\operatorname{cotg}^2 x\right]\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$:

$$E=\frac{2\left[-\cos x+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\left[\frac{-\cos x\cdot\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right]\cdot 2\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$$

$$E=\left(\cos x-sen^2 x\right)\cdot\operatorname{cotg} x=\frac{\left(\cos^2 x-\cos x\operatorname{sen}^2 x\right)\cdot\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$\therefore\ E=\left(\cos x-sen^2 x\right)\cdot\cot gx$

Alternativa A

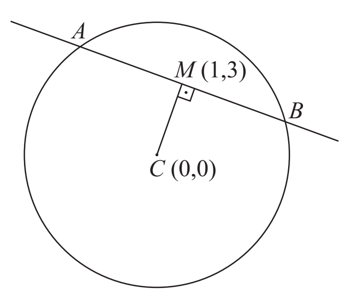
Questão 18

Sejam C uma circunferência de raio $R>4$ e centro $(0,0)$ e $\overline{AB}$ uma corda de C. Sabendo que $(1,3)$ é ponto médio de $\overline{AB}$, então uma equação da reta que contém $\overline{AB}$ é

A) $y+3x-6=0$.
B) $3y+x-10=0$.
C) $2y+x-7=0$.
D) $y+x-4=0$.
E) $2y+3x-9=0$.

Resolução:

Cálculo do coeficiente angular da reta $\overleftrightarrow{CM}$:



$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-0}{1-0}=3$

Como a reta que contém $\overline{AB}$ é perpendicular à $\overleftrightarrow{CM}$, temos:

$m\cdot m_{\overleftrightarrow{AB}}=-1$

$m_{\overleftrightarrow{AB}}=-\frac{1}{3}$

Usando a equação do feixe de retas $y-y_0=m(x-x_0)$ para a reta $\overleftrightarrow{AB}$, temos:

$y-3=-\frac{1}{3}(x-1)$

$3y - 9 = -x + 1$
$3y + x - 10 = 0$

Alternativa B

Questão 19

Uma esfera é colocada no interior de um cone circular reto de 8 cm de altura e de $60°$ de ângulo de vértice. Os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência e distam $2\sqrt{3}$ cm do vértice do cone. O volume do cone não ocupado pela esfera, em cm^3, é igual a

A) $\frac{416}{9}\pi$. B) $\frac{480}{9}\pi$. C) $\frac{500}{9}\pi$. D) $\frac{512}{9}\pi$. E) $\frac{542}{9}\pi$.

Resolução:

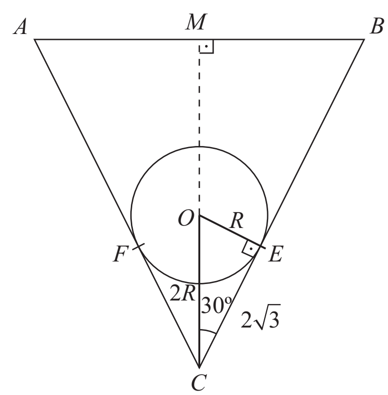
O triângulo ABC é equilátero, pois o ângulo do vértice do cone ABC é igual a $60º$ e os pontos de contato da esfera com a superfície lateral do cone definem uma circunferência.

Assim, como a altura do cone é igual a 8 cm, $AB = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Os triângulos MCB e CEO são semelhantes, logo

$$\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{2R} = \frac{8}{2\sqrt{3}} \Rightarrow R = 2\,\text{cm}.$$

$$V_{cone} - V_{esf} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot 8}{3} - \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 = \frac{416\pi}{9}\text{cm}^3.$$



Alternativa A

Questão 20

Os pontos $A = (3,4)$ e $B = (4,3)$ são vértices de um cubo, em que $\overline{AB}$ é umas das arestas. A área lateral do octaedro cujos vértices são os pontos médios da face do cubo é igual a

A) $\sqrt{8}$. B) 3. C) $\sqrt{12}$. D) 4. E) $\sqrt{18}$.

Resolução:

Obtendo a aresta (b) do octaedro em função da aresta (a) do cubo.

$$b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow b^2 = 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Como a aresta do cubo é a distância entre os pontos A e B, temos:

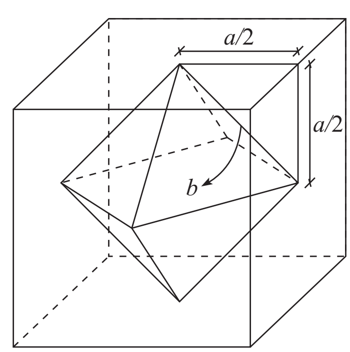
$$a = \sqrt{(3-4)^2 + (4-3)^2} \Rightarrow a = \sqrt{2}.$$

$$\therefore\ b = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 1.$$

A área lateral do octaedro é:

$$S = 8 \cdot \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow S = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ S = \sqrt{12}$$



Alternativa C

Questão 21

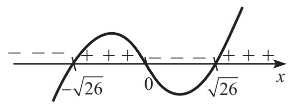
Seja S o conjunto solução da inequação.

$$(x-9)\left|\log_{x+4}\left(x^3-26x\right)\right| \le 0.$$

Determine o conjunto S^C.

Resolução:

i) Condição de existência



$x^3-26x>0$ e $1 \ne x+4>0$

$$\begin{cases} -\sqrt{26}<x<0 \text{ ou } x>\sqrt{26} \\ -3 \ne x > -4 \end{cases}$$

$\therefore$ $-4<x<-3$ ou $-3<x<0$ ou $x>\sqrt{26}$

ii) Resolvendo a desigualdade

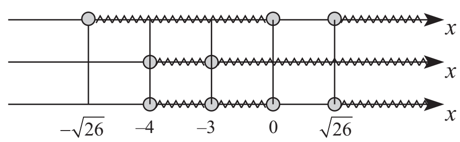
$(x-9)\left|\log_{x+4}\left(x^3-26\right)\right| \le 0$

$\left|\log_{x+4}\left(x^3-26\right)\right| \ne 0 \Rightarrow x-9 \le 0 \Rightarrow x \le 9$

$\left|\log_{x+4}\left(x^3-26\right)\right| = 0 \Rightarrow x^3-26x=1 \Rightarrow x^3-26x-1=0$

Que admite somente raiz real menor que 9.

($9^3-26\cdot 9-1>0$ $P'(x)=3x^2-26>0$, para $x \ge 9$)



Do exposto:

$x \le 9$

De *i* e *ii*:

$S = \left]-4,-3\right[\cup \left]-3,0\right[\cup \left]\sqrt{26},9\right]$

$\therefore$ $S^C = \left]-\infty,-4\right] \cup \{-3\} \cup \left[0,\sqrt{26}\right] \cup \left]9,+\infty\right[$

Questão 22

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = x^2(1+3i)+y^2(4-i)-x(2+6i)+y(-16+4i) \in \mathbb{C}$. Identifique e esboce o conjunto

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \operatorname{Re} w \le -13 \ e \ \operatorname{Im} w \le 4\right\}.$$

Resolução:

$w = x^2(1+3i)+y^2(4-i)-x(2+6i)+y(-16+4i)$

$\operatorname{Re}(w) = x^2+4y^2-2x-16y \le -13$

$x^2-2x+1-1+4\left(y^2-4y+4-4\right) \le -13$

$(x-1)^2+4(y-2)^2 \le 4$

$\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{1} \le 1,$ que é uma elipse juntamente com seus pontos internos.

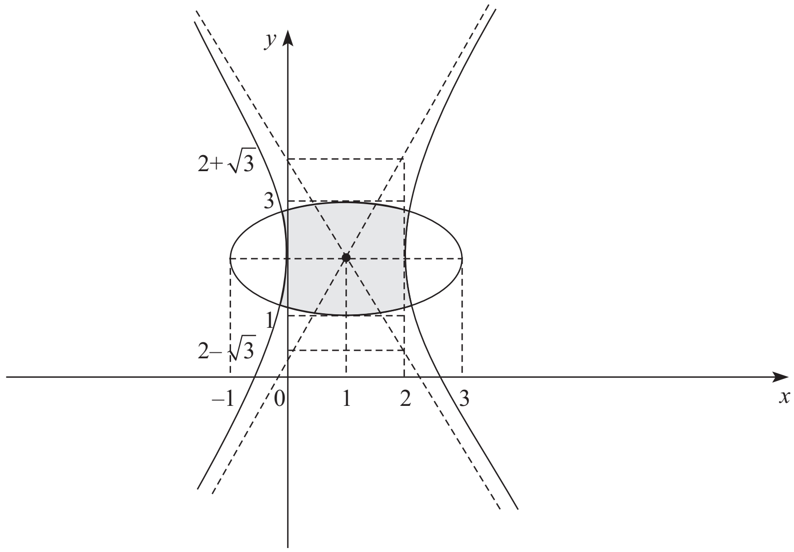
$\operatorname{Im}(w) = 3x^2-y^2-6x+4y \le 4$

$3\left(x^2-2x+1-1\right)-\left(y^2-4y+4-4\right) \le 4$

$3(x-1)^2-(y-2)^2 \le 3$

$\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y-2)^2}{3} \le 1,$ que é a inequação de uma hipérbole juntamente com a região não convexa por ela delimitada.

Do exposto, o esboço será:



Questão 23

Seja $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$.

A) Mostre que f é injetora.

B) Determine $D=\{f(x);\, x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}\}$ e $f^{-1}:\ D\to\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Resolução:

a) Sejam x_1 e x_2 elementos de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Se $f(x_1)=f(x_2)$, então:

$$\frac{2x_1+3}{x_1+1}=\frac{2x_2+3}{x_2+1}$$

$$(2x_1+3)(x_2+1)=(2x_2+3)(x_1+1)$$

$$2x_1\cdot x_2+2x_1+3x_2+3=2x_1x_2+2x_2+3x_1+3$$

$$x_2=x_1.$$

Portanto, f é injetora.

b) Se $y\in D$, então existe $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, tal que $f(x)=y$, ou seja:

$$\frac{2x+3}{x+1}=y$$

$$2x+3=y(x+1)$$

$$2x-yx=y-3$$

$$x=\frac{y-3}{2-y},$$

Portanto, x existirá sempre que $y\neq 2$, ou seja $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Como $f\circ f^{-1}(x)=x$, temos:

$$\frac{2f^{-1}(x)+3}{f^{-1}(x)+1}=x$$

$$2f^{-1}(x)+3=f^{-1}(x)\cdot x+x$$

$$(2-x)f^{-1}(x)=x-3$$

$$f^{-1}(x)=\frac{x-3}{2-x}.$$

Questão 24

Suponha que a equação algébrica

$$x^{11}+\sum_{n=1}^{10}a_nx^n+a_0=0$$

tenha coeficientes reais $a_0, a_1, ..., a_{10}$ tais que as suas onze raízes sejam todas simples e da forma $\beta + i\gamma_n$, em que β, $\gamma_n \in \mathbb{R}$ e os γ_n, $n = 1,2,...,11$, formam uma progressão aritmética de razão real $\gamma \neq 0$. Considere as três afirmações abaixo e responda se cada uma delas é, respectivamente, verdadeira ou falsa, justificando sua resposta:

I. Se $\beta = 0$, então $a_0 = 0$.
II. Se $a_{10} = 0$, então $\beta = 0$.
III. Se $\beta = 0$, então $a_1 = 0$.

Resolução:
Como a equação algébrica

$$x^{11}+\sum_{n=1}^{10}a_nx^n+a_0=0$$

Tem grau 11, devemos ter obrigatoriamente uma raiz real, ou seja, existe um $k \in \{1,2,...,11\}$ tal que $\gamma_k = 0$. Como γ_n, $n = 1,2,...,n$, formam nesta ordem uma progressão aritmética de razão $\gamma \neq 0$, temos que $\beta - 5\gamma$, $\beta - 4\gamma$, $\beta - 3\gamma$, $\beta - 2\gamma$, $\beta - \gamma$, β, $\beta + \gamma$, $\beta + 2\gamma$, $\beta + 3\gamma$, $\beta + 4\gamma$, $\beta + 5\gamma$, são as raízes.
Julgando as afirmativas:

I. Como $\beta = 0$ e β é uma raiz, temos:

$$0^{11}+\sum_{n=1}^{10}a_n\cdot 0^n+a_0=0$$

$a_0 = 0.$

$\therefore$ afirmação verdadeira.

II. Se $a_{10} = 0$, então

$$(\beta-5\gamma)+(\beta-4\gamma)+(\beta-3\gamma)+(\beta-2\gamma)+(\beta-\gamma)+\beta+(\beta+\gamma)+(\beta+2\gamma)+(\beta+3\gamma)+(\beta+4\gamma)+(\beta+5\gamma)=0$$

$11\beta = 0$

$\beta = 0$

$\therefore$ afirmação verdadeira.

III. Se $\beta = 0$, então a soma dos produtos das raízes agrupadas de dez em dez será:

$(5!)^2 \cdot \gamma^{10} = a_1$.

Como $\gamma \neq 0$, segue que $a_1 \neq 0$.

$\therefore$ afirmação falsa.

Questão 25

Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Resolução:

No mínimo 4 significa:

i) Exatamente 4, ou seja, $\left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{6!}{4!2!} = \frac{240}{5^6}$

ii) Exatamente 5, ou seja, $\left(\frac{1}{5}\right)^5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \frac{6!}{5!} = \frac{24}{5^6}$

ii) 6 pessoas, $\left(\frac{1}{5}\right)^6 = \frac{1}{5^6}$

Assim $\frac{240}{5^6} + \frac{24}{5^6} + \frac{1}{5^6} = \frac{265}{5^6} = \frac{265}{15625} \cong 1{,}69\%$

Questão 26

Sejam $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é a matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então $\det A = \det B = 0$.

Resolução:

a) Como $AX = 0,\ 0 \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$,

temos:

$$X = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\a_{31}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0.$$

$$X = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow a_{12} = a_{22} = a_{32} = 0.$$

$$X = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 0 & a_{13}\\ 0 & 0 & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow a_{13} = a_{23} = a_{33} = 0.$$

Portanto, matriz A deve ser a matriz nula.

b) Como $A \cdot B = 0,\ 0 \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, temos

$\det(A \cdot B) = 0 \Rightarrow \det(A) \cdot \det(B) = 0$

$\therefore \det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$.

Se $\det(A) = 0$ e $\det(B) \neq 0$, então B admite inversa e:

$A \cdot B = 0,\ 0 \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$A \cdot B \cdot B^{-1} = 0 \cdot B^{-1} \Rightarrow A = 0$

o que contradiz a hipótese.

Se $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) = 0$, então A admite inversa e:

$A \cdot B = 0,\ 0 \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

$A^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \cdot 0 \Rightarrow B = 0$

o que contradiz a hipótese.

Portanto, $\det(A) = \det(B) = 0$

Questão 27

Sabendo que $tg^2\left(x+\dfrac{1}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$, para algum $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\pi\right]$, determine $\text{sen}\ x$.

Resolução:

$$tg^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{sen^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$2\ \text{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1-\text{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$3\ \text{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Rightarrow\text{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ \ \text{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, pois $\dfrac{\pi}{6}\le x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{2\pi}{3}$

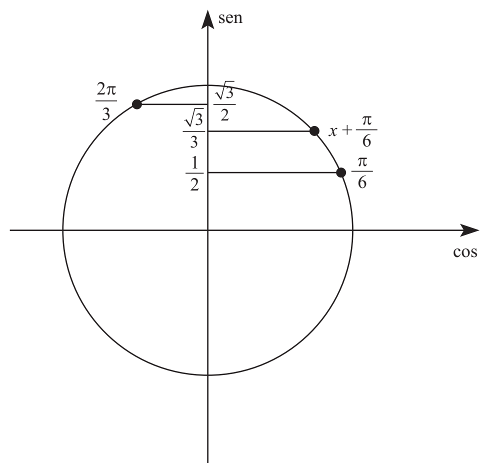
Do círculo trigonométrico $x+\dfrac{\pi}{6}\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$x+\frac{\pi}{6}=\text{arc sen}\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow x=\text{arc sen}\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$$

$$\text{sen}x=\text{sen}\left(\text{arc sen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\text{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos\left(\text{arc sen}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{sen}\,x=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\Rightarrow\text{sen}\,x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{6}{9}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore\ \ \text{sen}\,x=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$$



Questão 28

Dadas a circunferência $C:(x-3)^2+(y-1)^2=20$ e a reta $r:3x-y+5=0$, considere a reta t que tangencia C, forma um ângulo de 45º com r e cuja distância à origem é $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$. Determine uma equação da reta t.

Resolução:

Cálculo dos possíveis valores de m_t:

$$r:3x-y+5=0\Rightarrow m_r=3$$

$$\left|\frac{m_t-m_r}{1+m_t\cdot m_r}\right|=tg\ 45^\circ=1\Rightarrow|m_t-3|=|1+3\cdot m_t|$$

$m_t=-2$ ou $x=\dfrac{1}{2}$

A equação de t será $2x+y+c=0$ ou $x-2y+d=0$.

Como t é tangente a C podemos escrever:

$$\frac{|2\cdot3+1+c|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{20}\ \text{ e }\ \frac{|3-2\cdot1+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{20}$$

$|7+c|=10$ e $|1+d|=10$

$c=-7\pm10$ e $d=-1\pm10$

Temos agora quatro possíveis equações para t:

$t_1: 2x + y - 17 = 0$

$t_2: 2x + y + 3 = 0$

$t_3: x - 2y - 11 = 0$

$t_4: x - 2y + 9 = 0$

Calculemos a distância de t até a origem:

$$d_1 = \frac{|2\cdot 0 + 0 - 17|}{\sqrt{2^2+1^2}} \neq \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d_2 = \frac{|2\cdot 0 + 0 + 3|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d_3 = \frac{|0 - 2\cdot 0 - 11|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \neq \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$d_4 = \frac{|0 - 2\cdot 0 + 9|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \neq \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Do exposto, uma equação de t é $2x + y + 3 = 0$.

Questão 29

Considere as n retas.

$$r_i : y = m_i x + 10, \; i = 1, 2, ..., n; \; n \geq 5,$$

em que os coeficientes m_i, em ordem crescente de i, formam uma progressão aritmética de razão $q > 0$. Se $m_1 = 0$ e a reta r_5 tangencia a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 25$, determine o valor de q.

Resolução:

$m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = q, \; m_3 = 2q, \; m_4 = 3q$ e $m_5 = 4q$.

A equação de r_5 é $y = 4q \cdot x + 10$.

$r_5 : 4q \cdot x - y + 10 = 0$

Como r_5 é tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 25$.

$$\frac{|4q\cdot 0 - 0 + 10|}{\sqrt{(4q)^2 + (-1)^2}} = 5 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{16q^2+1}} = 5 \Rightarrow \sqrt{16q^2+1} = 2$$

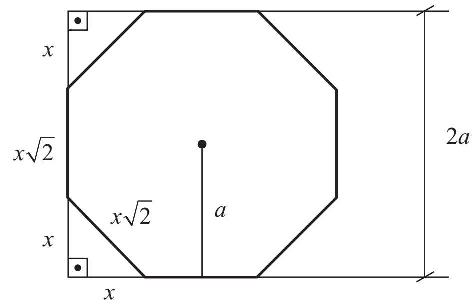
$$16q^2 + 1 = 4 \Rightarrow q^2 = \frac{3}{16}$$

$$\therefore \; q = \frac{\sqrt{3}}{4}, \text{ pois } q > 0.$$

Questão 30

A razão entre a área lateral e a área da base octogonal de uma pirâmide regular é igual a $\sqrt{5}$. Exprima o volume desta pirâmide em termos da medida a do apótema da base.

Resolução:



$x + x\sqrt{2} + x = 2a$

$x = \dfrac{2a}{2+\sqrt{2}} = a\left(2-\sqrt{2}\right)$

$A_B = (2a)^2 - 4\cdot\dfrac{x\cdot x}{2} = 4a^2 - 2x^2 = 4a^2 - 2\cdot a^2\left(2-\sqrt{2}\right)^2$

$A_B = 8a^2\left(\sqrt{2}-1\right)$, em que A_B é a área da base da pirâmide.

Seja b a medida do apótema da pirâmide:

$A_L = 8\cdot\dfrac{x\sqrt{2}\cdot b}{2} = 4b\sqrt{2}\cdot a\left(2-\sqrt{2}\right)$, em que A_L é a área lateral.

$\dfrac{A_L}{A_B} = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{4b\sqrt{2}\cdot a\left(2-\sqrt{2}\right)}{8a^2\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{5} \Rightarrow \dfrac{ab\cdot 8\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{a^2\cdot 8\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt{5} \Rightarrow b = a\sqrt{5}$

Seja H a medida da altura da pirâmide:

$b^2 = a^2 + H^2 \Rightarrow 5a^2 = a^2 + H^2 \Rightarrow H = 2a$

$V = \dfrac{1}{3}\cdot A_B\cdot H$, em que V é o volume pedido

$V = \dfrac{1}{3}\cdot 8a^2\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot 2a$

$\therefore\ V = \dfrac{16a^3\left(\sqrt{2}-1\right)}{3}$

Professores:

Matemática
Bruno Werneck
João Neto
Manim
Marcelo Moraes
Moraes
Ney Marcondes

Colaboradores
Aline Alkmin
Henrique
José Diogo

Digitação e Diagramação
Leandro Bessa
Márcia Santana
Nathália Meyer
Nayara Isabella
Val Pinheiro
Vinícius Ribeiro

Desenhistas
Leandro Bessa
Vinícius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Alicio Roberto

Supervisão Editorial
Alicio Roberto
Bruno Werneck

A ***Resolução Comentada*** *das provas do ITA poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO *Pré-Vestibular, ou pelo telefone* ***(62) 3251-9009***

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicos. Esteja preparado.

opirus EDITORA

olimpo