2011 ITA

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$: conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\overline{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$
$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \ \ e \ \ x \notin B\}$
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \le x \le b\}$
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$
$\det M$: determinante da matriz M
$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A
$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B ¨

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k, \ \ k \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

Dado $z = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{3}i\right)$, então $\sum_{n=1}^{89} z^n$ é igual a

A) $-\frac{89}{2}\sqrt{3}i.$
B) $-1.$
C) $0.$
D) $1.$
E) $\frac{89}{6}\sqrt{3}i.$

Resolução:

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$$

$$z^2 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z^3 = \cos 360° + i \operatorname{sen} 360° = 1$

Observamos que a sequência $\left(z^1, z^2, z^3, ..., z^{89}\right)$ é cíclica e seu ciclo é de 3 em 3.

Como $89 = 29 \cdot 3 + 2$, temos que:

$$\sum_{n=1}^{89} z^n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right) \cdot 29 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\sum_{n=1}^{89} z^n = 0 \cdot 29 - 1 = -1$$

Alternativa B

Questão 02

Das afirmações abaixo sobre números complexos z_1 e z_2:

I – $|z_1 - z_2| \leq \left||z_1| - |z_2|\right|$.

II – $|\overline{z}_1 \cdot z_2| = \left||\overline{z}_2| \cdot |\overline{z}_2|\right|$.

III – *Se* $z_1 = |z_1|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \neq 0$, *então* $z_1^{-1} = |z_1|^{-1}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$.

é(são) sempre verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas II e III.
E) todas.

Resolução:

I. (Falso)
Desigualdade triangular:
$\left||z_1| - |z_2|\right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

II. (Falso)
Contra exemplo:
$z_1 = 0$ e $z_2 \neq 0$

III. (Verdadeiro)
$z_1 = |z_1|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) \neq 0$

$$z_1^{-1} = \frac{1}{|z_1|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)} = |z_1|^{-1} \cdot \left[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)\right]$$

$$z_1^{-1} = |z_1|^{-1} \cdot (\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$$

Alternativa C

Questão 03

A soma de todas as soluções da equação em $\mathbb{C}: z^2 + |z|^2 + iz - 1 = 0$ é igual a

A) 2.
B) $\frac{i}{2}$.
C) 0.
D) $-\frac{1}{2}$
E) $-2i$.

Resolução:

Seja $z = a + bi$, com a e b reais, substituindo na equação temos:

$$(a + bi)^2 + a^2 + b^2 + i(a + bi) - 1 = 0$$

$$a^2 + 2abi + b^2 i^2 + a^2 + b^2 + ai + bi^2 - 1 = 0$$

$$(2a^2 - b - 1) + (2ab + a)i = 0$$

$$\begin{cases} 2a^2 - b - 1 = 0 \\ 2ab + a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a^2 - 1 \\ a(2b + 1) = 0 \end{cases}$$

$a\left(4a^2-1\right)=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $4a^2-1=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=\pm\frac{1}{2}$

$a=0 \quad \Rightarrow \quad b=2\cdot 0^2-1=-1$

$\therefore \; z_1=0-1i=-i$

$a=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b=2\cdot\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$

$\therefore \; z_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

$a=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad b=2\cdot\frac{1}{4}-1=-\frac{1}{2}$

$\therefore \; z_3=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Seja S a soma das raízes

$S=-i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=-2i$

Alternativa E

Questão 04

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

A) $\frac{7}{8}$. B) $\frac{5}{7}$. C) $\frac{5}{8}$. D) $\frac{3}{5}$. E) $\frac{3}{7}$.

Resolução:

Nas 5 moedas de duas caras, temos um total de 10 caras.
Nas 10 moedas normais, temos um total de 10 caras e 10 coroas.
Nas 25 moedas restantes, temos um total de 50 coroas.
Assim, a probabilidade condicional pedida é:

$P(moeda\ ter\ 2\ coroas \setminus face\ observada\ é\ coroa)$

$$=\frac{P(moeda\ ter\ 2\ coroas)}{P(face\ observada\ é\ coroa)}=\frac{\frac{25}{40}}{\frac{60}{80}}=\frac{5}{6}$$

Obs.: O exercício parece buscar o gabarito (incorreto)

$P=\frac{25}{35}=\frac{5}{7}$

(Sem resposta)

Questão 05

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A\subset B$ e $n(\{C{:}C\subset B\setminus A\}) = 128$.
Então, das afirmações abaixo:

I $n(B)-n(A)$ é único;

II $n(B)+n(A)\le 128$;

III a dupla ordenada $(n(A),\ n(B))$ é única;

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas I e II.
E) nenhuma.

Resolução:

O conjunto $\{C:C\subset B\setminus A\}$ é o conjunto das partes de $B\setminus A$, ou seja, $n(\{C:C\subset B\setminus A\})=2^{n(B\setminus A)}=128$, logo $n(B\setminus A)=7$.

Como $A\subset B$, então $n(B\setminus A)=n(B)-n(A)$, logo $n(B)-n(A)=7$.

Portanto:

I - $n(B)-n(A)$ é único e igual a 7.

II - O conjunto A pode ter qualquer quantidade de elementos, com a condição do conjunto B ter 7 elementos a mais, portanto $n(A)+n(B)$ não tem valor máximo.

III - Como o conjunto A pode ter qualquer quantidade de elementos e $n(B)=n(A)+7$, segue que o par ordenado $(n(A),\ n(B))$ não é único.

Alternativa A

Questão 06

O sistema $\begin{cases} x+2y+3z=a \\ y+2z=b \\ 3x-y-5cz=0 \end{cases}$

A) é possível, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

B) é possível quando $a=\dfrac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

C) é possível quando $c=1, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

D) é impossível quando $a \neq \dfrac{7b}{3},\ \forall c \in \mathbb{R}$.

E) é possível quando $c=1\ e\ a \neq \dfrac{7b}{3}$.

Resolução:

Associemos o sistema à sua matriz completa para escaloná-lo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 3 & -1 & -5c & 0 \end{pmatrix}$$

Indicando por $L_1,\ L_2,\ L_3$ as linhas de matriz, substituímos L_3 por $-3\cdot L_1+L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & -7 & -9-5c & -3a \end{pmatrix}$$

Substituímos agora L_3 por $7L_2+L_3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2 & b \\ 0 & 0 & 5-5c & 7b-3a \end{pmatrix}$$

O sistema será impossível se, e somente se, $5-5c=0$ e $7b-3a \neq 0$.

$5-5c=0$ e $7b-3a \neq 0 \Leftrightarrow c=1$ e $a \neq \dfrac{7b}{3}$.

logo o sistema será possível se, e somente se, $c \neq 1$ ou $a=\dfrac{7b}{3}$.

Alternativa B

Questão 07

Considere as afirmações abaixo:

I Se M é uma matriz quadrada de ordem $n>1$, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

II Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que $\det\left(M^2-M\right)=0$, então existe matriz não-nula X, de ordem $n\times 1$, tal que $MX=X$.

III A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta} & 1-2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall\theta \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Destas, é(são) verdadeira(s)

A) apenas II.
B) apenas I e II.
C) apenas I e III.
D) apenas II e III.
E) todas.

Resolução:

I – Como M é não-inversível, o sistema linear homogêneo $M\cdot X=0$ é possível e indeterminado, logo existem infinitas matrizes coluna X que satisfazem o sistema. A matriz N pode ser uma matriz em que suas colunas são soluções deste sistema homogêneo.

Observação: Em $M\cdot X=0$, X é uma matriz coluna e O é uma matriz coluna nula.

II $-\det\left(M^2-M\right)=0 \Rightarrow \det\left[M\cdot\left(M-I\right)\right]=0 \Rightarrow \det\left(M\right)\cdot\det\left(M-I\right)=0 \Rightarrow \det\left(M-I\right)=0$

Deste último resultado, segue que existe uma matriz coluna não nula X, tal que $\left(M-I\right)\cdot X=0 \Rightarrow M\cdot X-X=0 \Rightarrow M\cdot X=X.$

III – Como $\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\sec\theta}=\operatorname{sen}\theta$ e $1-2\sec^2\dfrac{\theta}{2}=\cos\theta$, então a matriz referida é $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ cuja inversa é $\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Portanto todas são verdadeiras.

Alternativa E

Questão 08

Se 1 é uma raiz de multiplicidade 2 da equação $x^4+x^2+ax+b=0,$ com $a,\ b\in\mathbb{R},$ então a^2-b^3 é igual a

A) $-64.$ B) $-36.$ C) $-28.$ D) $18.$ E) $27.$

Resolução:

Seja

$P(x)=x^4+x^2+ax+b:$

$P(1)=1^4+1^2+a\cdot 1+b=0 \Rightarrow a+b=-2 \quad (1)$

$P'(x)=4x^3+2x+a$

$P'(1)=4\cdot 1^3+2\cdot 1+a=0 \ \Rightarrow\ a=-6$

Voltando em (1):

$b=4$

$\therefore\ a^2-b^3=\left(-6\right)^2-4^3=-28$

Observação: $P`(x)$ representa a derivada de $P(x).$

Alternativa C

Questão 09

O produto das raízes reais da equação $\left|x^2-3x+2\right|=\left|2x-3\right|$

A) $-5.$
B) $-1.$
C) $1.$
D) $2.$
E) $5.$

Resolução:

$\left|x^2-3x+2\right|=\left|2x-3\right|$

I) $x^2-3x+2=2x-3$

$x^2-5x+5=0$

$\Delta=25-20=5$

$x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$

II) $x^2 - 3x + 2 = -2x + 3$

$x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 4 = 5$

$x_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

O produto de todas as raízes reais é:

$P = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$

$P = -5$

Alternativa A

Questão 10

Considere a equação algébrica $\sum_{k=1}^{3}(x-a_k)^{4-k} = 0$. Sabendo que $x = 0$ é uma das raízes e que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica com $a_1 = 2$ e soma 6, pode-se afirmar que

A) a soma de todas as raízes é 5.
B) o produto de todas as raízes é 21.
C) a única raiz real é maior que zero.
D) a soma das raízes não reais é 10.
E) todas as raízes são reais.

Resolução:

$\sum_{k=1}^{3}(x-a_k)^{4-k} = 0$

$(x-a_1)^3 + (x-a_2)^2 + (x-a_3)^1 = 0$

$x = 0$ é raiz:

$-a_1^3 + a_2^2 - a_3 = 0 \quad (1)$

Seja q a razão da P.G.:

$a_1 = 2,\ a_2 = 2 \cdot q,\ a_3 = 2q^2$ e $2 + 2q + 2q^2 = 6$

$q^2 + q - 2 = 0$

$q = 1$ ou $q = -2$

Lembrando da equação (1), temos $q = -2$

$\therefore\ a_1 = 2,\ a_2 = -4$ e $a_3 = 8$

Na equação original:

$(x-2)^3 + (x+4)^2 + x - 8 = 0$

$x^3 - 5x^2 + 21x = 0$

Seja S a soma de todas as raízes:

$S = -\frac{(-5)}{1} = 5$

Alternativa A

Questão 11

A expressão $4e^{2x} + 9e^{2y} - 16e^x - 54e^y + 61 = 0$, com x e y reais, representa

A) o conjunto vazio.
B) um conjunto unitário.
C) um conjunto não-unitário com um número finito de pontos.
D) um conjunto com um número infinito de pontos.
E) o conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 2(e^x - 2)^2 + 3(e^y - 3)^2 = 1\right\}$.

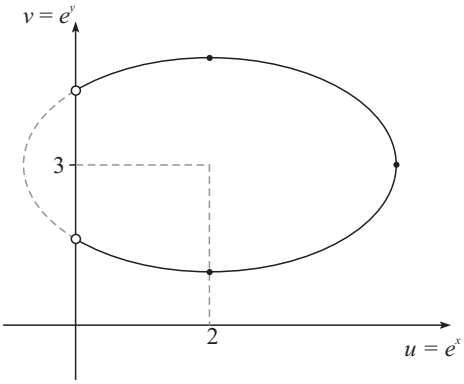
Resolução:

$$4e^{2x}+9e^{2y}-16e^{x}-54e^{y}+61=0$$
$$4\left(e^{2x}-4e^{x}\right)+9\left(e^{2y}-6e^{y}\right)+61=0$$

Completando os quadrados:

$$4\left(e^{2x}-4e^{x}+4\right)+9\left(e^{2y}-6e^{y}+9\right)+61-16-81=0$$
$$4\left(e^{x}-2\right)^{2}+9\left(e^{y}-3\right)^{2}=36$$
$$\frac{\left(e^{x}-2\right)^{2}}{9}+\frac{\left(e^{y}-3\right)^{2}}{4}=1$$

Mudança de variáveis: $e^{x}=u,\quad e^{y}=v$



Logo, existem infinitos valores possíveis de
$(u,\ v)=\left(e^{x},\ e^{y}\right)$

Correspondendo cada um a um par $(x,\ y)$.
Logo existem infinitos pares $(x,\ y)$.

Alternativa D

Questão 12

Com respeito à equação polinomial $2x^{4}-3x^{2}-3x^{2}+6x-2=0$ é correto afirmar que

A) todas as raízes estão em $\mathbb{Q}$.
B) uma única raiz está em $\mathbb{Z}$ e as demais estão em $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.
C) duas raízes estão em $\mathbb{Q}$ e as demais têm parte imaginária não-nula.
D) não é divisível por $2x-1$.
E) uma única raiz está em $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ e pelo menos uma das demais está em $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Resolução:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^{4}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{3}-3\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+6\cdot\frac{1}{2}-2=0$$
$$2\cdot(1)^{4}-3\cdot(1)^{3}-3\cdot(1)^{2}+6\cdot1-2=0$$

$\therefore x_{1}=\dfrac{1}{2}$ e $x_{2}=1$ são raízes da equação $2x^{4}-3x^{3}-3x^{2}+6x-2=0$

Fatorando:

$$2x^{4}-3x^{3}-3x^{2}+6x-2=(2x-1)(x-1)\left(x^{2}-2\right)$$

As outras duas raízes vêm da equação $x^{2}-2=0$:

$$x^{2}-2=0$$
$$x=\pm\sqrt{2}$$

Alternativa E

Questão 13

Sejam m e n inteiros tais que $\frac{m}{n}=-\frac{2}{3}$ e a equação $36x^2+36y^2+mx+ny-23=0$ representa uma circunferência de raio $r=1\text{ cm}$ e centro C localizado no segundo quadrante. Se A e B são os pontos onde a circunferência cruza o eixo Oy, a área do triângulo ABC, em cm^2, é igual a

A) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$. B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$. E) $\frac{\sqrt{2}}{9}$.

Resolução:

Da equação da circunferência temos:

$$36\left(x^2+y^2+\frac{m}{36}x+\frac{n}{36}y-\frac{23}{36}\right)=0$$

$$x^2+y^2+\frac{m}{36}x+\frac{n}{36}y-\frac{23}{36}=0$$

$$\left(x+\frac{m}{72}\right)^2+\left(y+\frac{n}{72}\right)^2=\frac{23}{36}+\frac{m^2+n^2}{5184}$$

$$C\left(-\frac{m}{72},\ -\frac{n}{72}\right) \text{ e } r^2=\frac{m^2+n^2}{5184}+\frac{23}{36}$$

$$m^2+n^2=1872$$

Como $\frac{m}{n}=-\frac{2}{3}$

$$m=-\frac{2}{3}n,$$

logo:

$$\frac{4}{9}n^2+n^2=1872$$

$$13n^2=16848$$

$$n^2=1296$$

$$n=\pm 36$$

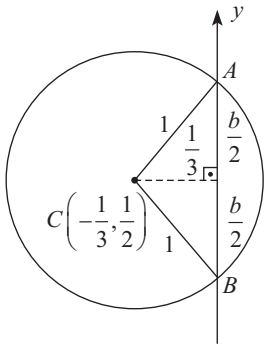
e

$$m=\pm 24$$

Como $C\left(-\frac{m}{72},\ -\frac{n}{72}\right)$ é ponto no segundo quadrante:

$$m=24,\ n=-36 \text{ e } C\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$$

Assim:



Pelo Teorema de Pitágoras

$$1^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$b=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Logo:

$$S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{9}\ \text{cm}^2$$

Alternativa D

Questão 14

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em *radianos*, é igual a

A) $\frac{23}{11}\pi$.

B) $\frac{13}{6}\pi$.

C) $\frac{24}{11}\pi$.

D) $\frac{25}{11}\pi$.

E) $\frac{7}{3}\pi$.

Resolução:

$$v_H = \frac{\frac{\pi}{6}\text{rad}}{60\,\text{min}} = \frac{\pi}{360}\ \text{rad/min}$$

$$v_M = \frac{2\pi\,\text{rad}}{60\,\text{min}} = \frac{\pi}{30}\ \text{rad/min}$$

Escrevendo as equações horárias:

$$s_M = 0 + \frac{\pi}{30} \cdot t \ \text{ e } \ s_H = \alpha + \frac{\pi}{360} \cdot t$$

$$s_M = s_H \Rightarrow \frac{\pi}{30} \cdot t_1 = \alpha + \frac{\pi}{360} \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{360 \cdot \alpha}{11 \cdot \pi}$$

$$s_M = s_H + 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{30} \cdot t_2 = \alpha + \frac{\pi}{360} \cdot t_2 + 2\pi \Rightarrow t_2 = \frac{360\alpha}{11\pi} + \frac{2\pi \cdot 360}{11\pi}$$

$$\therefore \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{2\pi \cdot 360}{11\pi} = \frac{720}{11}\text{min}$$

$$\Delta s_M = v_M \cdot \Delta t = \frac{\pi}{30} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{min}} \cdot \frac{720}{11}\text{min}$$

$$\Delta s_M = \frac{24\pi}{11}\text{rad}$$

Alternativa C

Questão 15

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem $8\ \text{cm}$ e $6\ \text{cm}$, respectivamente. Se D é um ponto $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento AD, em cm, é igual a:

A) $\frac{3}{4}$.

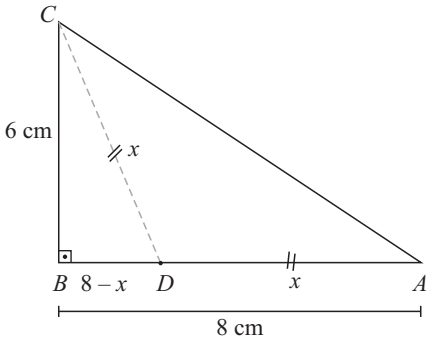
B) $\frac{15}{6}$.

C) $\frac{15}{4}$.

D) $\frac{25}{4}$.

E) $\frac{25}{2}$.

Resolução:



Pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 = 6^2 + (8-x)^2$

$x^2 = 36 + 64 - 16x + x^2$

$16x = 100$

$x = \frac{25}{4}$ cm

Alternativa D

Questão 16

Sejam $ABCD$ um quadrado e E um ponto sobre $\overline{AB}$. Considere as áreas do quadrado $ABCD$, do trapézio $BEDC$ e do triângulo ADE. Sabendo que estas áreas definem, na ordem em que estão apresentadas, uma progressão aritmética cuja soma é $200\,\text{cm}^2$, a medida do segmento $\overline{AE}$, em cm, é igual a:

A) $\frac{10}{3}$.

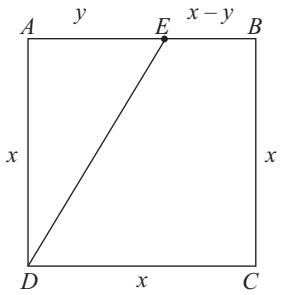
B) 5.

C) $\frac{20}{3}$.

D) $\frac{25}{3}$.

E) 10.

Resolução:



Seja $BC = x$ e $AE = y$

$S_{ABCD} = x^2$

$S_{BEDC} = \frac{(2x-y)\cdot x}{2}$

$S_{ADE} = \frac{xy}{z}$

$(S_{ABCD}, S_{BEDC}, S_{ADE})$ é uma P.A:

$S_{ADE} - S_{BEDC} = S_{BEDC} - S_{ABCD}$

$\frac{xy}{2} - \frac{(2x-y)\cdot x}{2} = \frac{(2x-y)\cdot x}{2} - x^2$

$xy - 2x^2 + xy = 2x^2 - xy - 2x^2$

$3xy = 2x^2$

Como $x \neq 0$:

$3y = 2x$

Soma da P.A:

$$x^2 + \frac{(2x-y)x}{2} + \frac{xy}{2} = 200$$

$$x^2 + \frac{4x^2}{6} + \frac{x^2}{3} = 200$$

$$6x^2 + 4x^2 + 2x^2 = 1200$$

$$12x^2 = 1200$$

$$x^2 = 100 \Rightarrow x = 10\text{cm}$$

$$y = \frac{2x}{3}$$

$$y = \frac{20}{3}\text{cm}$$

Alternativa C

Questão 17

Num triângulo ABC o lado $\overline{AB}$ mede $2\,\text{cm}$, a altura relativa ao lado $\overline{AB}$ mede 1cm, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $135°$ e M é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então a medida de $B\hat{A}C + B\hat{M}C$, em *radianos*, é igual a:

A) $\frac{1}{5}\pi$.

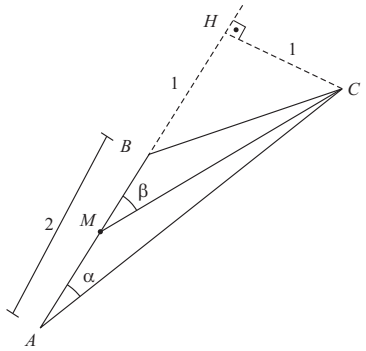
B) $\frac{1}{4}\pi$.

C) $\frac{1}{3}\pi$.

D) $\frac{3}{8}\pi$

E) $\frac{2}{5}\pi$.

Resolução:



$$A\hat{B}C + H\hat{B}C = 180°$$

$$H\hat{B}C = 45° \Rightarrow HB = HC = 1\text{cm}$$

Seja $B\hat{A}C = \alpha$ e $B\hat{M}C = \beta$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{3},\ tg\,\beta = \frac{1}{2}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\beta}{1 - tg\,\alpha \cdot tg\,\beta}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}$$

$$tg(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$$

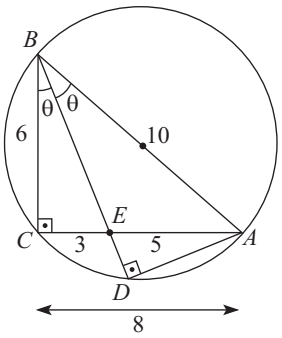
Alternativa B

Questão 18

Um triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5cm. Sabe-se ainda que $\overline{AB}$ é o diâmetro, $\overline{BC}$ mede 6cm e a bissetriz do ângulo $A\hat{B}C$ intercepta a circunferência no ponto D. Se α é a soma das áreas dos triângulos ABC e ABD e β é a área comum aos dois, o valor de $\alpha - 2\beta$, em cm^2, é igual a:

A) 14. B) 15. C) 16. D) 17. E) 18.

Resolução:



Pelo teorema da bissetriz interna

$$\frac{EC}{EA} = \frac{6}{10}$$

Como $EA + EC = 8$, concluímos que $EA = 5$, $EC = 3$

A área pedida é:

$$S(ABC) + S(ADB) - 2 \cdot S(EAB) = S(BCE) + S(EAD)$$

No ΔBCE, temos $EB = 3\sqrt{5}$ e $S(BCE) = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

Como $\Delta EAD \sim \Delta BCE$, então:

$$\frac{S(EAD)}{S(BCE)} = \left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^2 \Rightarrow S(EAD) = 5$$

Portanto, $S(BCE) + S(EAD) = 14$

Alternativa A

Questão 19

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}\text{cm}$.

Então o raio da esfera, em cm, é igual a:

A) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$.

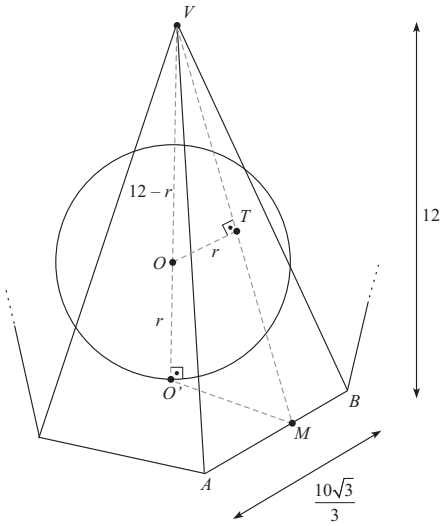
B) $\frac{13}{3}$.

C) $\frac{15}{4}$.

D) $2\sqrt{3}$.

E) $\frac{10}{3}$.

Resolução:



Sejam O e O' o centro da esfera e da base da pirâmide. Seja T um ponto de tangência da esfera com face lateral da pirâmide.

No $\Delta AO'B$ (equilátero), $O'M$ é altura:

$$O'M = \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 .$$

Assim, pelo teorema de Pitágoras no $\Delta VO'M$, temos $VM = 13$.
Temos ainda $\Delta VOT \sim \Delta VO'M$:

$$\frac{r}{5} = \frac{12-r}{13} \quad \therefore \quad r = \frac{10}{3}$$

Alternativa E

Questão 20

Considere as afirmações:

I Existe um triedro cujas 3 faces têm a mesma medida $a = 120º$.
II Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30º$, $45º$, $50º$, $50º$ e $170º$.
III Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, e 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.
IV A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880º$.
Destas, é(são) correta(s) apenas:
A) II.
B) IV.
C) II e IV.
D) I, II e IV.
E) II, III, e IV.

Resolução:
I (Falso) – O triplo de $a = 120º$ deveria ser menor que $360º$.
II (Verdadeiro) – Tal ângulo poliédrico existe pois $30º+45º+50º+50º+170º < 360º$ e $170º < 30º+45º+50º+50º$.
III (Falso) - $F = 3+1+1+2 = 7$

$$A = \frac{3.3+1.4+1.5+2.6}{2} = 12$$

$$V + F = A + 2 \Rightarrow V = A + 2 - F = 12 + 2 - 7 = 7$$

IV (Verdadeira)

$$S = (V-2) \cdot 360º$$

$$S = (10-2) \cdot 360º$$

$$S = 2880º$$

Alternativa C

Questão 21

Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não-vazios, tais que $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

Resolução:

Com $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ e $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$, vamos analisar $(B \setminus A) \neq \varnothing$.

Se $(B \setminus A) \neq \varnothing$, então temos $(B \setminus A) \not\subset A$, o que contradiz a afirmativa $A = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, logo $(B \setminus A) = \varnothing$.

Com $B \neq \varnothing$, para $(B \setminus A) = \varnothing$ é necessário que $B \subset A$, resultado impossível, pois assim teríamos $(A \setminus B) \cup \varnothing = A$, logo $(A \setminus B) = A$ e com isto A e B seriam disjuntos.

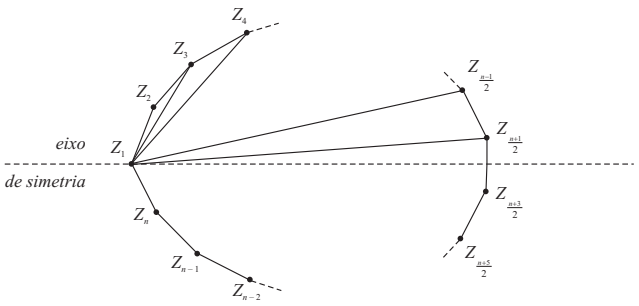
Portanto não existem $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ e $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A$.

Questão 22

Sejam $n \geq 3$ ímpar, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e z_1, $z_2, \ldots,$ z_n as raízes de $z^n = 1$. Calcule o número de valores $|z_i - z_j|$, i, $j = 1$, $2, \ldots,$ n, com $i \neq j$, distintos entre si.

Resolução:

Os afixos das raízes n-ésimas da unidade, z_1, $z_2, \ldots,$ z_n, formam no plano complexo um polígono regular de n lados, com n ímpar, conforme a figura abaixo:



Os valores $|z_i - z_j|$ são as distâncias entre os vértices deste polígono. Tomando z_1 como referência, por exemplo, contamos $\frac{n-1}{2}$ distâncias de z_1 ao demais vértices, considerando-se a simetria da figura.

Questão 23

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Resolução:

Seja P a probabilidade pedida:

$$P = \frac{P_3 \cdot P_5 \cdot P_4 \cdot P_2}{P_{11}}$$

$$P = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}$$

$$P = \frac{1}{1155}$$

Questão 24

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - x + 19\right)}$.

Resolução:

$$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}\left(x^2 - x + 19\right)}$$

$$4^2 < \left(4^{-1}\right)^{\log_{5^{-1}}\left(x^2 - x + 19\right)}$$

$$4^2 < 4^{\log_5\left(x^2 - x + 19\right)}$$

Como a base da inequação exponencial é maior que 1,
$2 < \log_5\left(x^2 - x + 19\right)$

Como a base do logaritmo é maior que 1,
$x^2 - x + 19 > 5^2$
$x^2 - x - 6 > 0$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x > 3 \text{ ou } x < -2\}$

Questão 25

Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall N \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

Resolução:

Sejam $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Se $MN = NM$ então $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, $\forall a$, b, c, $d \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} ax + cy & bx + dy \\ az + cw & bz + dw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}, \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

1. $ax + cy = ax + bz$
   $cy = bz$

Ora, $cy = bz$ para quaisquer b, c reais implica $y = z = 0$.

2. $bx + dy = ay + bw$
   $bx = bw$
   $\therefore x = w$

3. $az + cw = cx + dz$
   $cw = cx$
   $\therefore x = w$, já obtido

4. $bz + dw = cy + dw$
   $bz = cy$, já obtido anteriormente.
   $\therefore y = z = 0$

Logo a matriz M é do tipo
$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Assim $M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x \cdot I$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Questão 26

Determine todos os valores de $m \in \mathbb{R}$ tais que a equação $(2-m)x^2 + 2mx + m + 2 = 0$ tenha duas raízes reais distintas e maiores que zero.

Resolução:

$2 - m \neq 0$ e $(2m)^2 - 4(2-m)(2+m) > 0$ garantem duas raízes reais e distintas.

$2 - m \neq 0$

$m \neq 2$

$(2m)^2 - 4(2-m)(2+m) > 0$
$m^2 > 2$
$m > \sqrt{2}$ ou $m < -\sqrt{2}$

Respeitadas as condições acima, partimos para a condição das raízes x_1 e x_2 serem positivas:

$x_1 \cdot x_2 > 0$ e $x_1 + x_2 > 0$

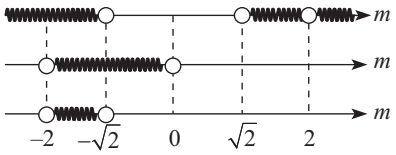
$\frac{m+2}{2-m} > 0$ e $\frac{-2m}{2-m} > 0$

i) $\frac{m+2}{-m+2} > 0 \Rightarrow -2 < m < 2$

ii) $\frac{-2m}{-m+2} > 0 \Rightarrow m < 0$ ou $m > 2$

De i e ii: $-2 < m < 0$

Do exposto e observando o diagrama, concluímos:

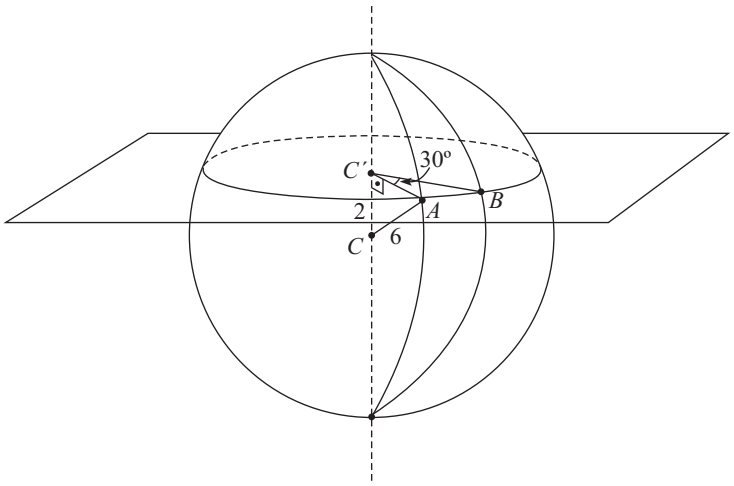


$m \in \left]-2, -\sqrt{2}\right[$

Questão 27

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6\,\text{cm}$ e um plano Σ que dista $2\,\text{cm}$ de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de 30° em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

Resolução:



Desejamos calcular a área do setor $AC'B$, de ângulo central 30° e raio $AC' = BC'$.
Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta AC'C$:

$AC' = \sqrt{32}$

Assim a área do setor $AC'B$ é $\frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(\sqrt{32}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}\text{cm}^2$

Questão 28

A) Calcule $\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{\pi}{10}-2\ \text{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\text{sen}\frac{\pi}{10}$.

B) Usando o resultado do item anterior, calcule $\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$.

Resolução:

A) $\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cos\frac{\pi}{10}-2\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\text{sen}\frac{\pi}{10}=$

Lembrando que $\cos 2a=\cos^2 a-\text{sen}^2 a$ e $\text{sen}\ 2a=2\,\text{sen}\,a\cos a$

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}-\text{sen}\frac{2\pi}{5}\text{sen}\frac{\pi}{10}=$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{10}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

B) Do item anterior temos:

$$\left(\cos^2\frac{\pi}{5}-\text{sen}^2\frac{\pi}{5}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{10}-2\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\text{sen}\frac{\pi}{10}=0$$

$$\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}=2\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\text{sen}\frac{\pi}{10}$$

Isolando o termo: $\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}$

$$\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}}{2\,\text{sen}\frac{\pi}{5}}$$

Desmembrando $\text{sen}\frac{\pi}{5}=2\,\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}$

$$\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\cos\frac{2\pi}{5}\cos\frac{\pi}{10}}{2\cdot 2\,\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{10}}$$

$$\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\cos\frac{2\pi}{5}}{4\,\text{sen}\frac{\pi}{10}}$$

$\frac{2\pi}{5}$ e $\frac{\pi}{10}$ são complementares, assim $\cos\frac{2\pi}{5}=\text{sen}\frac{\pi}{10}$

Logo $\text{sen}\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}$

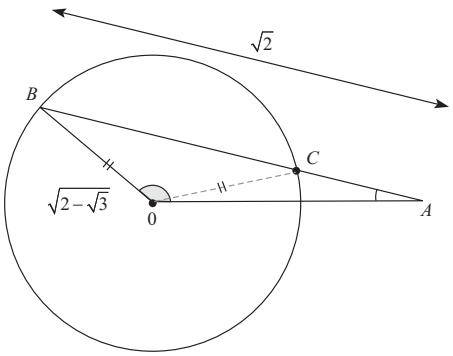
Questão 29

Num triângulo AOB o ângulo $A\hat{O}B$ mede $135°$ e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$ medem $\sqrt{2}\,\text{cm}$ e $\sqrt{2-\sqrt{3}}\,\text{cm}$, respectivamente. A circunferência de centro em O e raio igual à medida de $\overline{OB}$ intercepta $\overline{AB}$ no ponto $C(\neq B)$.

A) Mostre que $O\hat{A}B$ mede $15°$.

B) Calcule o comprimento de $\overline{AC}$.

Resolução:



A) $\text{sen}\,15^\circ = \text{sen}\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Pela lei dos senos na $\Delta\, AOB$, temos:

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\text{sen}\,O\hat{A}B} = \frac{\sqrt{2}}{\text{sen}\,135^\circ} \Rightarrow \text{sen}\,O\hat{A}B = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Dado que $2-\sqrt{3} = \dfrac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}{4}$, então

$$\text{sen}\,O\hat{A}B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \text{sen}\,15^\circ$$

Como $O\hat{A}B$ é agudo, segue que $O\hat{A}B = 15^\circ$

B) Do item (A) concluímos que $O\hat{B}A = 30^\circ$:

Como $\overline{OB} = \overline{OC}$; então $B\hat{O}C = 120^\circ$. Assim $A\hat{O}C = 15^\circ$

Daí $A\hat{O}C = O\hat{A}C$ e portanto, o $\Delta\, AOC$ é isósceles.

Logo: $\overline{AC} = \overline{OC} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$.

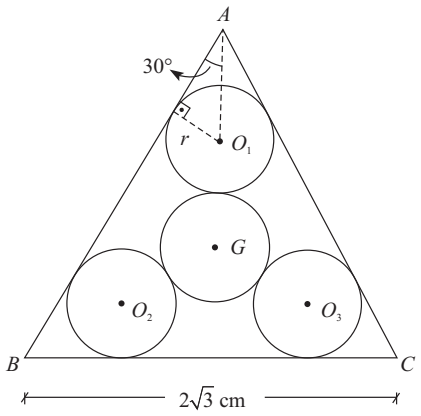
Questão 30

Considere um triângulo equilátero cujo lado mede $2\sqrt{3}\,\text{cm}$. No interior deste triângulo existem 4 círculos de mesmo raio r . O centro de um dos círculos coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo.

A) Determine o valor de r .
B) Calcule a área do triângulo não preenchida pelos círculos.
C) Para cada círculo que tangencia o triângulo, determine a distância do centro ao vértice mais próximo.

Resolução:

A)



$$\operatorname{sen} 30^{\circ} = \frac{r}{AO_1} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{r}{AO_1} \Rightarrow AO_1 = 2r$$

Portanto $AG = 4r$. Como $AG = \frac{2}{3}h$, em que " h " é a altura do triângulo equilátero, temos:

$$4r = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(2\sqrt{3}\right)\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\text{cm} .$$

B) Sendo " S " a área pedida:

$$S = \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} - 4 \cdot \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow S = \left(3\sqrt{3} - \pi\right)\text{cm}^2$$

C) Chamando de " d " tal distância e usando o resultado da letra "A" temos: $d = 2r \Rightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow d = 1\text{cm}$

Professores

Bruno Fraga
Lafayete
Marcelo Moraes
Ney Marcondes

Digitação e Diagramação

Érika Rezende
João Paulo
Valdivina Pinheiro

Colaboradores

Aline Alkmin, Lilian Aparecida, Luis Antônio, Thays Freitas, Filipe Sousa e Mateus Grangeiro

Ilustrações

Thaís Dourado
Vinícius Ribeiro

Projeto Gráfico

Mariana Fiusa
Vinícius Ribeiro

Supervisão Editorial

José Diogo
Valdivina Pinheiro

Copyright©Olimpo2011

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.cursoolimpo.com.br