2015 ITA

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
i	: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\lvert z \rvert$	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Re}(z)$	: parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\mathrm{Im}(z)$	: parte imaginária do número $z \in \mathbb{C}$
$\det A$	: determinante da matriz A
$\mathrm{tr}\, A$	: traço da matriz quadrada A, que é definido como a soma dos elementos da diagonal principal de A.

Potência de matriz: $A^1 = A,\ A^2 = A \cdot A, \ldots, A^k = A^{k-1} \cdot A,$ sendo A matriz quadrada e k inteiro positivo.

$d(P, r)$	: distância do ponto P à reta r
$\overline{AB}$	: segmento de extremidades nos pontos A e B

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$X \setminus Y = \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$

$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 01

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}.$

III. $\ln \sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

A) nenhuma.
B) apenas II.
C) apenas I e II.
D) apenas I e III.
E) I, II e III.

Resolução:

I. Verdadeira.

II. Falsa, pois:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2^{n}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot$$

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}n}\right]=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2^{0}}}+\frac{1}{\sqrt{2^{1}}}+\frac{1}{\sqrt{2^{2}}}+\ldots\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\neq\frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$$

III. Verdadeira pois:

$$\ln\sqrt[3]{e^{2}}+\left(\log_{3}^{2}\right)\left(\log_{4}^{9}\right)=\ln e^{2/3}+\left(\log_{3}^{2}\right)\left(\log_{2^{2}}^{3^{2}}\right)$$

$$\frac{2}{3}\ln e+\left(\log_{3}^{2}\right)\left(\frac{2}{2}\log_{2}^{3}\right)=\frac{2}{3}+\log_{3}^{2}\cdot\log_{2}^{3}$$

$$\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\in\mathbb{Q}$$

Alternativa D

Questão 02

Sejam A,B e C os subconjuntos de $\mathbb{C}$ definidos por $A=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+2-3i\right|<\sqrt{19}\right\}$, $B=\left\{z\in\mathbb{C}:\left|z+i\right|<7/2\right\}$ e $C=\left\{z\in\mathbb{C}:z^{2}+6z+10=0\right\}$. Então, $\left(A\setminus B\right)\cap C$ é o conjunto

A) $\{-1-3i,-1+3i\}$.

B) $\{-3-i,-3+i\}$.

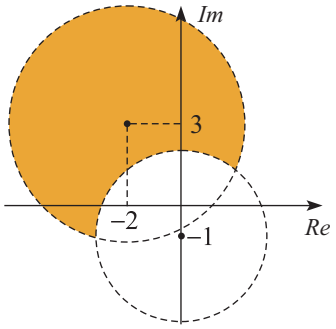
C) $\{-3+i\}$.

D) $\{-3-i\}$.

E) $\{-1+3i\}$.

Resolução:

O conjunto A é formando pelos números complexos cujos afixos pertencem ao interior da circunferência de centro $(-2,3)$ e raio $\sqrt{19}$. O conjunto B é formando pelos números complexos cujos afixos pertencem ao interior da circunferência de centro $(0,-1)$ e raio $\frac{7}{2}$. A figura ilustra o conjunto $A\setminus B$.



Considerando que as raízes da equação $z^{2}+6z+10=0$ são $z=-3-i$ e $z=-3+i$, o conjunto C é $\{-3-i,-3+i\}$. O afixo do número $z=-3-i$ pertence ao interior da circunferência com centro $(0,-1)$ e raio $\frac{7}{2}$. Logo, $z=-3-i\notin A\setminus B$. O afixo do número $z=-3+i$ pertence ao interior da circunferência com centro $(-2,3)$ e raio $\sqrt{19}$ e não pertence ao interior e nem à circunferência de centro $(0,-1)$ e raio $\frac{7}{2}$. Logo, $z=-3+i\in A\setminus B$ assim, $\left(A\setminus B\right)\cap C=\{-3+i\}$.

Alternativa C

Questão 03

Se $z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$, então o valor de $2\,\text{arcsen}\left(\text{Re}(z)\right)+5\,\text{arctg}\left(2\,\text{Im}(z)\right)$ é igual a

A) $-\frac{2\pi}{3}$.

B) $-\frac{\pi}{3}$.

C) $\frac{2\pi}{3}$.

D) $\frac{4\pi}{3}$.

E) $\frac{5\pi}{3}$.

Resolução:

$z=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ Usando $\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta=\text{cis}(\theta)$

Como $1+\sqrt{3}i=2\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $1-\sqrt{3}i=2\cdot\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$$z=\left(\frac{2\cdot\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2\cdot\text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right)}\right)^{10}\Rightarrow z=\left(\text{cis}\left(\frac{-4\pi}{3}\right)\right)^{10}$$

$$\Rightarrow z=\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^{10}\Rightarrow z=\text{cis}\frac{20\pi}{3}\Rightarrow z=\text{cis}\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Desta forma temos:

$$\text{arcsen}\left(\text{Re}(z)\right)=\text{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$$

$$\text{arctg}\left(2\cdot\text{Im}(z)\right)=\text{arctg}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\text{arctg}\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\ 2\cdot\text{arcsen}\left(\text{Re}(z)\right)+5\cdot\text{arctg}\left(2\cdot\text{Im}(z)\right)=$$

$$2\cdot\left(-\frac{\pi}{6}\right)+5\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$

Alternativa D

Questão 04

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r: 3x+4y-4=0$ e $s: 3x+4y-19=0$. A área do círculo determinado por C é igual a

A) $\frac{5\pi}{7}$.

B) $\frac{4\pi}{5}$.

C) $\frac{3\pi}{2}$.

D) $\frac{8\pi}{3}$.

E) $\frac{9\pi}{4}$.

Resolução:

Identificando um ponto P na reta s de abscissa 0:

$P(0; y_p)$

$s: 3x + 4y - 19 = 0$

$3x_p + 4y_p - 19 = 0$

$3 \cdot 0 + 4y_p - 19 = 0$

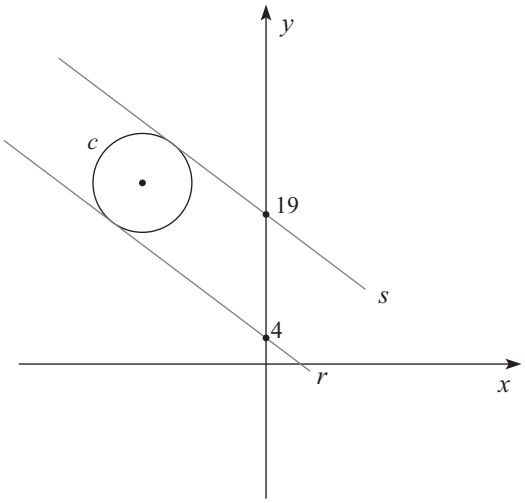
$y_p = \frac{19}{4}$

Portanto: $P\left(0; \frac{19}{4}\right)$

Calculando a distância do ponto P até a reta r, que é a distância entre as duas retas:

$$d(P,r) = \frac{\left|3 \cdot 0 + 4 \cdot \left(\frac{19}{4}\right) - 4\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$d(P,r) = \frac{|19 - 4|}{\sqrt{25}} = 3$$



Raio do círculo é metade da distância entre as duas retas, ou seja, $R = \frac{3}{2}$

Área do círculo

$$A_c = \pi \cdot R^2 = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9\pi}{4}$$

Alternativa E

Questão 05

Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

A) apenas II.
B) apenas I e II.
C) apenas I e III.
D) apenas II e III.
E) I, II e III.

Resolução:
A sequência definida na questão é a sequência de Fibonacci. Seus 7 primeiros termos são:
$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3,\ a_5 = 5,\ a_6 = 8,\ a_7 = 13$

(I) FALSA. A sequência de Fibonacci é composta apenas por números inteiros, já que cada elemento a partir do 3º é a soma dos dois anteriores, que são inteiros.
Suponha que existam 3 termos consecutivos em PG, quais sejam a, aq e aq^2. Pela definição da sequência:

$$aq^2 = aq + a \Rightarrow q^2 - q - 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Como $q \notin Q$ e $a \in \mathbb{Z}^*$, temos que $a \cdot q \notin \mathbb{Z}$, o que é um absurdo. Logo não existem 3 termos em PG.

(II) VERDADEIRA, pois $a_7 = 13$, que é primo.

(III) VERDADEIRA. Sejam a_{3k-1} ímpar e a_{3k} par. Então:
$a_{3k+1} = a_{3k} + a_{3k-1}$ é ímpar
$a_{3k+2} = a_{3k+1} + a_{3k}$ é ímpar
$a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{3k+1}$ é par
A indução está garantida pois $a_2 = 1$ é ímpar e $a_3 = 2$ é par.

Alternativa D

Questão 06

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-1/2} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s)
A) apenas II.
B) apenas I e II.
C) apenas I e III.
D) apenas II e III.
E) I, II e III.

Resolução:
Considerando $x \neq 1, x \neq -1$ e $x \neq \frac{1}{2}$, a referida equação equivale a $10x^3 + (2b-5)x^2 + (2a-10)x + 5 - a - 2b = 0$.

(I) Com $a = 1$ e $b = 2$, $10x^3 - x^2 - 8x = 0$, ou ainda, $x \cdot (10x^2 - x - 8) = 0$. Isso implica que $x = 0$ é uma solução da equação.

(II) Como condição para que a equação tenha sentido, $x \neq 1, x \neq -1$ e $x \neq \frac{1}{2}$.

(III) Dependendo dos valores de "a" e de "b", 2 pode ser divisor do termo independente $5 - a - 2b$, mas, não importa quais sejam os valores de "a" e "b", certamente, 3 não é divisor do coeficiente dominante 10. Isso implica que a equação não tem solução racional $x = \frac{2}{3}$.
Diante do exposto, as três afirmações são verdadeiras.

Alternativa E

Questão 07

Considere o polinômio p dado por $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 16$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que p admite raiz dupla e que 2 é uma raiz de p, então o valor de $b - a$ é igual a

A) -36.
B) -12.
C) 6.
D) 12.
E) 24.

Resolução:

Sendo r_1, r_2, r_3 as raízes de p, temos:

Se 2 for raiz dupla, teremos:

$$2\cdot 2\cdot r=-\frac{(-16)}{2}\Rightarrow r=2,$$

o que faria com que p tivesse raiz tripla, que não é possível.

Partindo do fato de 2 não ser raiz tripla, temos $r_1=r_2=r\neq 2$ e $r_3=2$, daí:

$$r\cdot r\cdot 2=-\frac{(-16)}{2}\Rightarrow r=-2$$

Usando essas raízes, temos:

$$2\cdot(2)^3+a(2)^2+b(2)-16=0\Rightarrow 4a+2b=0$$

$$2(-2)^3+a(-2)^2+b(-2)-16=0\Rightarrow 4a-2b=32$$

Resolvendo o sistema, temos $a=4$ e $b=-8$.

$$\therefore b-a=-8-(4)=-12$$

Alternativa B

Questão 08

Seja p o polinômio dado por $p(x)=\sum_{j=0}^{15}a_jx^j$, com $a_j\in\mathbb{R}, j=0,1,\ldots,15,$ e $a_{15}\neq 0.$ Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2)=1$, então o resto da divisão do p pelo polinômio $q,$ dado por $q(x)=x^3-2x^2+x-2$, é igual a

A) $\frac{1}{5}x^2-\frac{1}{5}.$

B) $\frac{1}{5}x^2+\frac{1}{5}.$

C) $\frac{2}{5}x^2-\frac{2}{5}.$

D) $\frac{3}{5}x^2-\frac{3}{5}.$

E) $\frac{3}{5}x^2-\frac{1}{5}.$

Resolução:

Analisemos as raízes de $q(x)=x^3-2x^2+x-2$.

Note-se que $q(i)=i^3-2i^2+i-2=0$.

Portanto $x_1=i$ é raiz.

Como os coeficientes de q são reais, $x_2=-i$ também é raiz.

Soma de Girard: $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$

$$i+(-i)+x_3-2$$

$$x_3=2$$

A respeito do polinômio p, é importante notar:

- i e $(-i)$ são raízes comuns a p e q.
- p tem coeficientes reais.
- p tem grau 15.

A divisão de p por q pode ser representada:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & q(x) \\ \hline ax^2+bx+c & L(x) \end{array}$$

$$p(x)\equiv q(x)\cdot L(x)+ax^2+bx+c$$

Note-se o resto com grau inferior ao grau de q.

Segue:

- $p(i) = q(i)L(i) - a + bi + c$
  $\therefore -a + bi + c = 0$
  $\therefore b = 0$

- $p(2) = q(2)L(2) + 4a + 2b + c$
  $\therefore 4a + 2b + c = 1$

Obtemos o sistema:

$$\begin{cases} -a + c = 0 \\ 4a + c = 1 \end{cases}$$

Donde $a = c = \frac{1}{5}$.

Assim, o resto é $r(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Alternativa B

Questão 09

Considere todos os triângulos retângulos com os lados medindo $\sqrt{a}, 2\sqrt{a}$ e a. Dentre esses triângulos, o de maior hipotenusa tem seu menor ângulo, em radianos. igual a

A) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{4}$.

B) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

C) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

D) $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

E) $\operatorname{arctg}\frac{4}{5}$.

Resolução:

Temos duas situações:

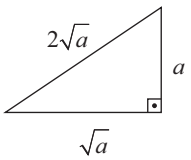
I. $2\sqrt{a} > \sqrt{a}$

$\left(2\sqrt{a}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2 + a^2$

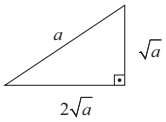
$4a = a + a^2$

$a = 0$ ou $a = 3$,

Logo $a = 3$.



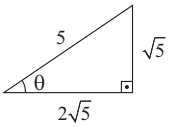
II. $a > 2\sqrt{a}$



$a^2 = \left(2\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{a}\right)^2$

$a^2 = 5a$

$a = 0$ ou $a = 5$



Logo $a = 5$

Portanto o triângulo de maior hipotenusa tem $a = 5$ e seu menor ângulo, em radianos, igual a $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Alternativa C

Questão 10

Os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação $2\,\text{sen}\,x - \cos x = 1$ são

A) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.

B) $\text{arcsen}\left(\frac{3}{5}\right)$ e π.

C) $\text{arcsen}\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.

D) $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$ e π.

E) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ e π.

Resolução:

Tem-se $\cos x = 2\text{senx} - 1$. Com a relação $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, $(2\,\text{sen}\,x - 1)^2 + \text{sen}^2 x = 1$, ou ainda, $\text{sen}\,x \cdot (5\,\text{sen}\,x - 4) = 0$. Disso, $\text{sen}\,x = 0$ ou $\text{sen}\,x = \frac{4}{5}$. Com $\text{sen}\,x = 0$, $\cos x = -1$. Isso implica que $x = \pi$, já que $x \in [0, 2\pi]$. Com $\text{sen}\,x = \frac{4}{5}$, $\cos x = \frac{3}{5}$. Isso implica que $x = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Assim, os valores que satisfazem a referida equação são $x = \pi$ e $x = \arccos\left(\frac{3}{5}\right)$.

Alternativa A

Questão 11

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\cos^4 \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{5} \quad \text{e} \quad \cos^2 \frac{\beta}{3} = \frac{4}{7}\cos^4 \frac{\beta}{3} + \frac{3}{7}.$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha + \beta)$ é igual a

A) -1.

B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

D) $-\frac{1}{2}$.

E) 0.

Resolução:

Usando $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = x$ na equação $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{5}$

Temos:

$$x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{5} \Rightarrow 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (1) = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = \frac{1}{4}.$$

Para o caso $x = 1$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{1}\right) = \pm 1$$

Como $\alpha \in]0, 2\pi[$, segue que $\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in]0, \pi[$, desta forma a equação $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm 1$ não tem solução.

Para o caso $x = \frac{1}{4}$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$$

Como $\left(\frac{\alpha}{2}\right) \in]0, \pi[$, temos que $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}$ em $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ em $\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$.

Usando $\cos^2\left(\frac{\beta}{2}\right) = y$ na equação $\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{3}{7}$, temos:

$$y = \frac{4}{7}y^2 + \frac{3}{7} \Rightarrow 4y^2 - 7y + 3 = 0$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(4)(3) = 1$$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} \Rightarrow y = 1 \text{ ou } y = \frac{3}{4}$$

Para o caso $y = 1$:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = \pm 1$$

Como $\beta \in [0, 2\pi]$, segue que $\left(\frac{\beta}{3}\right) \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$

Neste intervalo a equação $\cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = \pm 1$ não tem solução.

Para o caso $y = \frac{3}{4}$:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Como $\left(\frac{\beta}{3}\right) \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$, segue que $\cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$\frac{\beta}{3} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$, e $\cos\left(\frac{\beta}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ não tem solução.

Para o caso $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para o caso $\alpha = \frac{4\pi}{3}$ e $\beta = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o menor valor para $\cos(\alpha + \beta)$ é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Alternativa B

Questão 12

Seja $4 = (a_{ij})_{5\times5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1)$, $1 \le i, j \le 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i .

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2 .

III. $\operatorname{tr} A$ é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

A) apenas I.

B) apenas I e II.

C) apenas II e III.

D) apenas I e III.

E) I, II e III.

Resolução:

A matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{5\times 5}$ definida por $a_{ij}=2^{i-1}\cdot(2j-1)$ é:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 18 \\ 4 & 12 & 20 & 28 & 36 \\ 8 & 24 & 40 & 56 & 72 \\ 16 & 48 & 80 & 112 & 144 \end{bmatrix}$$

(I) Observamos que as linhas apresentam progressões aritméticas de razões $2, 2^2, 2^3, 2^4$ e 2^5. Portanto, esse item é verdadeiro.

(II) Observamos que todas as colunas apresentam progressões geométricas de razão 2. Esse item também é verdadeiro.

(III) O traço de A é dado por: $tr\,A=1+6+20+56+144=227$, que é um número primo. Assim, o item III também é verdadeiro.

Alternativa E

Questão 13

Considere a matriz $M=\left(m_{ij}\right)_{2\times 2}$ tal que $m_{ij}=j-i+1,\ i,j=1,2$. Sabeudo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)=252,$$

então o valor de n é igual a

A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.
E) 8.

Resolução:

Temos

$$M_2=\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-1+1 & 2-1+1 \\ 1-2+1 & 2-2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Provemos, por indução, que $M^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Admitindo $M^k=\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ temos:

$$m^{k+1}=M\cdot M^k=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2k+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2(k+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $M^1=\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, segue que $M^n=\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dessa maneira:

- $$\sum_{k=1}^{n} M^k=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} n & \dfrac{(2+2n)\cdot n}{2} \\ 0 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

- $$\sum_{k=1}^{n} M^k-n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & n^2+n \\ 0 & n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} n & 0 \\ n & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & n^2+n \\ -n & 0 \end{pmatrix}$$

- $$\det\left(\sum_{k=1}^{n} m^k-n\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix} 0 & n^2+n \\ -n & 0 \end{vmatrix}=n^3+n^2$$

Assim: $n^3+n^2=252$

$n=6$

Alternativa C

Questão 14

Considere os pontos $A=(0,-1), B=(0,5)$ e a reta $r: 2x-3y+6=0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A,r)=d(B,r)$.

II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C=\left(-3\sqrt{3},2\right)$ ou $C=\left(3\sqrt{3},2\right)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

A) I.
B) II.
C) I e II.
D) I e III.
E) II e III.

Resolução:

(I) $$d(A,r)=\frac{|2\cdot 0-3\cdot(-1)+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$d(B,r)=\frac{|2\cdot 0-3\cdot(5)+6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

Portanto, $d(A,r)=d(B,r)$. O item é VERDADEIRO

(II) Como A e B são equidistantes de (r) então serão pontos simétricos em relação a essa reta se $\overleftrightarrow{AB}$ for perpendicular a (r).

Como $\overleftrightarrow{AB}$ é uma reta vertical e (r) não é uma reta horizontal, então não são perpendiculares.

Portanto, A e B não são simétricos em relação a (r).

O item é FALSO.

(III) O ponto C pertence à mediatriz de $\overleftrightarrow{AB}$, de equação $y=2$, ou seja, é um ponto da forma $(x,2)$.

Além disso como $d(A,B)=6$, então devemos ter $d(A,C)=6$, ou seja:

$$\sqrt{(x-0)^2+(2+1)^2}=6$$

$$x^2+9=36 \Rightarrow x=\pm 3\sqrt{3}$$

Assim, $C=\left(3\sqrt{3},2\right)$ ou $C=\left(-3\sqrt{3},2\right)$

O item é VERDADEIRO.

Alternativa D

Questão 15

Dados o ponto $A=\left(4,\frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x+4y-12=0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

A) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

B) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

C) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$.

D) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$.

E) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$.

Resolução:

A distância do ponto A à reta r é a altura do triângulo ABC. Logo:

$$h=\frac{\left|3\cdot 4+4\cdot\frac{25}{6}-12\right|}{\sqrt{3^2+4^2}}\Rightarrow h=\frac{\left(\frac{50}{3}\right)}{5}=\frac{10}{3}$$

Como o triângulo ABC é isósceles, temos:

$$\left(\frac{25}{6}\right)^2=\left(\frac{10}{3}\right)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2\Rightarrow\frac{BC}{2}=\frac{15}{6}\Rightarrow BC=5$$

Desta forma:

$$2p=AB+AC+BC=\frac{25}{6}+\frac{25}{6}+5=\frac{40}{3}$$

Área $=\dfrac{5\cdot\frac{10}{3}}{2}=\dfrac{25}{3}$

Alternativa E

Questão 16

Considere as afirmações a seguir:

I. O lugar geométrico do ponto médio de um segmento $\overline{AB}$, com comprimento ℓ fixado, cujos extremos se deslocam livremente sobre os eixos coordenados é uma circunferência.

II. O lugar geométrico dos pontos (x,y) tais que $6x^3+x^2y-xy^2-4x^2-2xy=0$ é um conjunto finito no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

III. Os pontos $(2,3),(4,-1)$ e $(3,1)$ pertencem a uma circunferência.

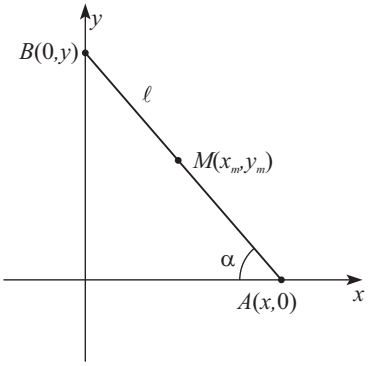
Destas, é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) I e II.
E) I e III.

Resolução:

I. (Verdadeiro)

Sem perda de generalidade, analisemos o segmento abaixo:



$$\operatorname{sen}\alpha=\frac{y}{\ell}$$
$$y=\ell\operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{\ell}$$
$$x=\ell\cos\alpha$$

Como $x_m=\dfrac{x}{2}$ e $y_m=\dfrac{y}{2}$, segue:

$$x_m=\frac{\ell}{2}\cos\alpha\ ,\ y_m=\frac{\ell}{2}\operatorname{sen}\alpha\ .$$

Então $(x_m)^2 + (y_m)^2 = \frac{\ell^2}{4}(\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)$

$(x_m)^2 + (y_m)^2 = \frac{\ell^2}{4}$

Portanto o lugar geométrico procurado é uma circunferência de raio $\frac{\ell}{2}$ e centro $(0, 0)$.

II. (Falso). Colocando x em evidência.

$x \cdot (6x^2 + xy - y^2 - 4x - 2x) = 0$

Portanto o par ordenado $(0, y)$ satisfaz a equação, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Logo, o conjunto é infinito.

III. (Falso)

Quaisquer três pontos do plano pertencem a uma única circunferência, se e somente se não estiverem alinhadas.

Testando a condição de alinhamento:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, logo os pontos estão em linha reta.

Alternativa A

Questão 17

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto E em que as diagonais se cortam é

A) $\frac{21}{8}$.

B) $\frac{27}{8}$.

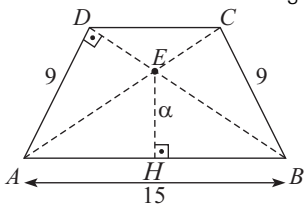
C) $\frac{35}{8}$.

D) $\frac{37}{8}$.

E) $\frac{45}{8}$.

Resolução:

Considere o trapézio $ABCD$ abaixo. A distância procurada é a altura $\overline{EH}$ do triângulo ABE relativa à base $\overline{AB}$.



Como o trapézio é isósceles, temos $AD = BC = 9$ e as diagonais são congruentes. Os triângulos ABC e ABD são congruentes (caso LLL) e, portanto, $B\hat{A}C = A\hat{B}D$. Daí segue que o triângulo ABE é isósceles de base $\overline{AB}$ e sua altura $\overline{EH}$ é uma mediana. Portanto,

$$AH = BH = \frac{15}{2}.$$

Da semelhança entre os triângulos ABE e ABD temos:

$$\frac{EH}{AD} = \frac{BH}{BD}.$$

Do teorema de Pitágoras, vem $DB = 12$, e portanto:

$\frac{d}{9} = \frac{15/2}{12}$

$d = \frac{135}{24} = \frac{45}{8}$.

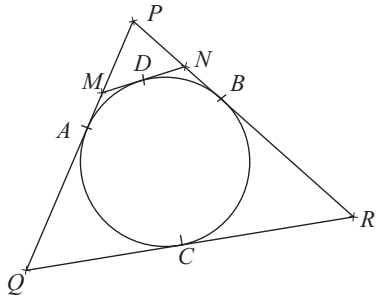
Alternativa E

Questão 18

Num triângulo PQR considere os pontos M e N pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo PQR. Sabendo-se que o perímetro do triângulo PQR é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo PMN é igual a

A) 5.
B) 6.
C) 8.
D) 10.
E) 15.

Resolução:
Considere a figura.



Os pontos A, B e C são pontos de tangência. Se $AQ = QC$, $BR = CR$ e $QR = 10$, então $AQ + BR = 10$. Se o perímetro do triângulo PQR é 25, então $AP + PB = 5$, pois $QR = 10$ e $AQ + BR = 10$.
O ponto D é ponto de tangência. Com isso, $AM = MD$ e $DN = NB$. Isso implica que $PM + MD = AP$ e $PN + ND = PB$. Assim, levando-se em conta que o perímetro do triângulo PMN é $PM + MD + PN + ND$ e $AP + PB = 5$, conclui-se que tal perímetro é 5.

Alternativa A

Questão 19

Considere a circunferência C, no primeiro quadrante, tangente ao eixo Ox e à reta $r: x - y = 0$. Sabendo-se que a potência do ponto $O = (0,0)$ em relação a essa circunferência é igual a 4, então o centro e o raio de C são, respectivamente, iguais a

A) $\left(2, 2\sqrt{2} - 2\right)$ e $2\sqrt{2} - 2$.

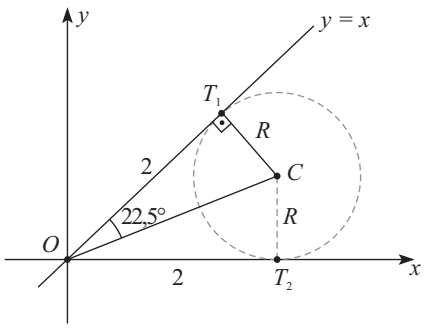
B) $\left(2, \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ e $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}$.

C) $\left(2, \sqrt{2} - 1\right)$ e $\sqrt{2} - 1$.

D) $\left(2, 2 - \sqrt{2}\right)$ e $2 - \sqrt{2}$.

E) $\left(2, 4\sqrt{2} - 4\right)$ e $4\sqrt{2} - 4$.

Resolução:



Como ΔOT_1C é congruente a ΔOT_2C, $\overleftrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo de 45° $\left(T_1\hat{O}T_2\right)$.

A potência de O é 4, logo, $\left(OT_1\right)^2 = 4$

$OT_1 = 2$

Analogamente, $OT_2 = 2$.

Obtendo a tangente do ângulo de 22,5º.

$$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-(\operatorname{tg}\alpha)^2}$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ) = \frac{2\cdot\operatorname{tg}(22,5^\circ)}{1-\operatorname{tg}^2(22,5)}\text{, sendo } y = \operatorname{tg}22,5^\circ$$

$$1 = \frac{2y}{1-y^2}$$

$$y = -1 \pm \sqrt{2}$$

Logo $\operatorname{tg}(22,5^\circ) = \sqrt{2}-1$ (o valor negativo não convém).

Assim, $\operatorname{tg}(22,5^\circ) = \frac{R}{2}$

$$R = 2\sqrt{2}-2$$

E o centro tem coordenadas $\left(2, 2\sqrt{2}-2\right)$.

Alternativa A

Questão 20

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

A) $\sqrt[3]{2}-h$.

B) $\sqrt[3]{2}-1$.

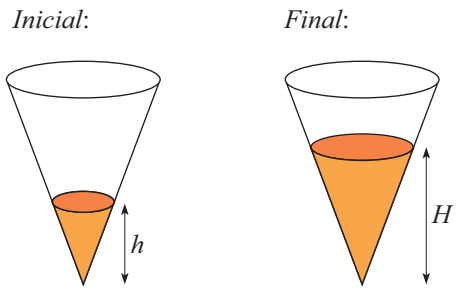
C) $\left(\sqrt[3]{2}-1\right)h$.

D) h.

E) $\frac{h}{2}$.

Resolução:

São semelhantes os sólidos (cones) formados pelo líquido nas duas situações.



Seja V o volume inicial de líquido. Como

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{H_2}{H_1}\right)^3 \text{ (semelhança)}$$

$$\frac{2V}{V} = \left(\frac{H}{h}\right)^3$$

$$H = h\cdot\sqrt[3]{2}$$

O líquido sobe $d = H - h = h\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

Alternativa C

Questão 21

Considere as funções f_1, f_2, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sendo $f_1(x)=\frac{1}{2}|x|+3$, $f_2(x)=\frac{3}{2}|x+1|$ e $f(x)$ igual ao maior valor entre $f_1(x)$ e $f_2(x)$, para cada $x\in\mathbb{R}$. Determine.

a) Todos os $x\in\mathbb{R}$ tais que $f_1(x)=f_2(x)$.

b) O menor valor assumido pela função f.

c) Todas as soluções da equação $f(x)=5$.

Resolução:

a) $f_1(x)=f_2(x)$

$$\frac{1}{2}|x|+3=\frac{3}{2}|x+1|$$

Para $x<-1$:

$$-\frac{1}{2}x+3=-\frac{3}{2}(x+1)\Rightarrow-\frac{x}{2}+3=-\frac{3x}{2}-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{3x}{2}-\frac{x}{2}=-\frac{3}{2}-3\Rightarrow x=-\frac{9}{2}$$

Para $-1\le x<0$:

$$-\frac{1}{2}x+3=\frac{3}{2}(x+1)\Rightarrow-\frac{x}{2}+3=\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow$$

$-\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}=\frac{3}{2}-3\Rightarrow-2x=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{4}$, valor que está fora do intervalo de estudo.

Para $x\ge 0$:

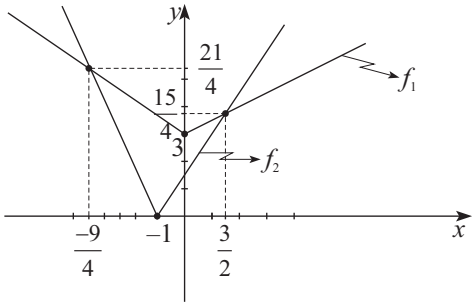
$$\frac{1}{2}x+3=\frac{3}{2}(x+1)\Rightarrow\frac{x}{2}+3=\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}=\frac{3}{2}-3\Rightarrow-x=-\frac{3}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Portanto os valores de x procurados são $-\frac{9}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

b) Para uma melhor visualização de f, seguem os esboços dos gráficos de f_1 e f_2 em um mesmo sistema cartesiano.

$$f_1=\left(-\frac{9}{2}\right)=f_2\left(-\frac{9}{2}\right)=\frac{1}{2}\left|-\frac{9}{2}\right|+3=\frac{21}{4}$$

$$f_1=\left(\frac{3}{2}\right)=f_2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\left|\frac{3}{2}\right|+3=\frac{15}{4}$$



Desta forma, nota-se que:

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{3}{2}(x+1) & \text{, se } x<-\frac{9}{4}\\ -\frac{1}{2}x+3 & \text{, se } -\frac{9}{4}\le x<0\\ \frac{1}{2}x+3 & \text{, se } 0\le x<\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2}(x+1) & \text{, se } x\ge\frac{3}{2}\end{cases},$$

e o menor valor de f é 3.

c) $f(x)=5$

$$-\frac{1}{2}x+3=5\Rightarrow-\frac{x}{2}=2\Rightarrow x=-4$$

$$\frac{3}{2}(x+1)=5\Rightarrow 3x+3=10\Rightarrow 3x=7\Rightarrow x=\frac{7}{3}.$$

Portanto, as soluções são -4 e $\frac{7}{3}$.

Questão 22

Considere o polinômio p dado por $p(z)=18z^3+\beta z^2-7z-\beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma Raí de módulo igual a 1 a parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

Resolução:

a) $p(z)=18z^3+\beta z^2-7z-\beta$

Como os coeficientes são reais, há duas raízes complexas conjugadas, ambas de módulo 1.
Denotemos as raízes por:
$x_1=z_1$ (complexa)
$x_2=\overline{z_1}$ (complexa)
x_3 (real)

Relação produto de Girard:
$$z_1\cdot\overline{z_1}\cdot x_3=\frac{\beta}{18}$$
Como $z_1\cdot\overline{z_1}=|z_1|^2=1$, segue $x_3=\frac{\beta}{18}$.

Ora, se $\frac{\beta}{18}$ é raiz:
$$18\left(\frac{\beta}{18}\right)^3+\beta\cdot\left(\frac{\beta}{18}\right)^2-\frac{7\beta}{18}-\beta=0$$
$$\beta\cdot\left(\beta^2-225\right)=0$$

Os valores possíveis são: $\beta=0$, $\beta=\pm15$.
Para $\beta=0$, o polinômio se torna $p(z)=18z^3-7z$, com três raízes reais (não convém).
Para $\beta=15$ ou $\beta=-15$ haverá raízes complexas não-reais de módulo 1, como será mostrado no item b.

b) Para $\beta=15$:
$$p(z)=18z^3+15z^2-7z-15$$

Como $z=\frac{\beta}{18}=\frac{5}{6}$ é raiz:

$\frac{5}{6}$	18	15	-7	-15
	18	30	18	0

$$\therefore 18z^2+30z+18=0$$

Raízes: $z_1=-\frac{5}{6}+i\frac{\sqrt{11}}{6}$ e $z_2=-\frac{5}{6}-i\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Para $\beta=-15$
$$p(z)=18z^3-15z^2-7z+15$$
Como $z=\frac{\beta}{18}=-\frac{5}{6}$ é raiz:

$-\frac{5}{6}$	18	-15	-7	15
	18	-30	18	0

Raízes $z_1=\frac{5}{6}+i\frac{\sqrt{11}}{6}$, $z_2=\frac{5}{6}-i\frac{\sqrt{11}}{6}$.

Questão 23

Sabe-se que 1, B, C, D e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

(i) B, C, D, E são dois a dois distintos;

(ii) os números 1, B, C, e os números 1, C, E, estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

(iii) os números B, C, D, E, estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

Resolução:

Seja $r \neq 0$ a razão da P.A. $(1,B,C)$. Assim, $B = 1 + r$ e $C = 1 + 2r$.

Como $(1,C,E) = (1, 1+2r, E)$ é P.A., devemos ter $E = 1 + 4r$.

Na P.G. (B,C,D,E) temos:

$$\frac{E}{C} = \left(\frac{C}{B}\right)^2$$

$$\frac{1+4r}{1+2r} = \frac{(1+2r)^2}{(1+r)^2}$$

$$(1+2r)^3 = (1+4r)(1+2r+r^2)$$

$$1 + 6r + 12r^2 + 8r^3 = 1 + 2r + r^2 + 4r + 8r^2 + 4r^3$$

$$4r^3 + 3r^2 = 0$$

$$4r = -3$$

$$r = -\frac{3}{4}$$

Logo $B = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right) = +\frac{1}{4}$, $C = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ e $E = 1 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -2$.

A razão do P.G. é igual a $\frac{C}{B} = \frac{-1/2}{+1/4} = -2$. Logo $D = C \cdot (-2) = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = 1$.

Resposta: $B = +\frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = +1, E = -2$.

Questão 24

Seja $M \subset \mathbb{R}$ dado por $M = \left\{ \left| z^2 + az - 1 \right| : z \in \mathbb{C} \text{ e } |z| = 1 \right\}$, com $a \in \mathbb{R}$. Determine o maior elemento de M em função de a.

Resolução:

Seja $z = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$. Com isso, tem-se que $z^2 = \cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta$ e, consequentemente, que $z^2 + az - 1 = (\cos 2\theta + a\cos\theta - 1) + (\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,\theta)i$.

Sendo $r = \left| z^2 + az - 1 \right|$, $r^2 = (\cos 2\theta + a\cos\theta - 1)^2 + (\text{sen}\,2\theta + \text{sen}\,\theta)^2$. Disso, $r = \sqrt{a^2 + 2 - 2\cos 2\theta}$. Para que r seja máximo, basta que $\cos 2\theta = -1$. Assim, o maior elemento de M é $r = \sqrt{a^2 + 4}$.

Questão 25

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Resolução:

a) Basta selecionar 3 posições de coeficientes para colocar o número 2 e o restante para colocar o número 1. Desta forma:

$$\frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2 \cdot 1} = 10$$

b) $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

$P(-1) = a - b + c - d + e = 0$

$a + c + e = b + d$

Esta última igualdade só ocorre com $4 = 4$, ou seja, do lado esquerdo, temos dois coeficientes iguais a 1 e um igual a 2 e do lado direito, temos dois coeficientes iguais a 2. Desta forma, temos: $\frac{3!}{2!} = 3$ maneiras de montar tal polinômio.

Questão 26

Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal $+$ ou o sinal $-$, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de 1/3 a probabilidade de A escrever o sinal $+$ e de 2/3 as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal $+$ sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Resolução:

Considere os eventos E: "o sinal ao término do experimento é $+$" e F: "A escreve sinal $+$".

Desejamos calcular $P(F \setminus E)$, ou seja, $\frac{P(F \cap E)}{P(E)}$

O evento E é a reunião dos seguintes eventos:

E_1: "A escreve sinal $+$, B conserva o sinal, C conserva o sinal"

$P(E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$

E_2: "A escreve sinal $+$, B troca o sinal, C troca o sinal"

$P(E_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

E_3: "A escreve sinal $-$, B conserva o sinal, C troca o sinal"

$P(E_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$

E_4: "A escreve sinal $-$, B troca o sinal, C conserva o sinal"

$P(E_4) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$

Assim, $P(E) = \frac{1}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} = \frac{13}{27}$

O evento $F \cap E$ é a reunião dos eventos E_1 e E_2, definidos acima:

$P(F \cap E) = \frac{1}{27} + \frac{4}{27} = \frac{5}{27}$.

Portanto, $P(F \setminus E) = \frac{5/27}{12/27} = \frac{5}{13}$

Questão 27

Seja n um inteiro positivo tal que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n.

b) Determine $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24}$.

Resolução:

Sabemos que $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ e $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

Fazendo $x = \frac{\theta}{2}$:

$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$

$\cos\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$

a) Para $\theta = \frac{\pi}{6}$ temos:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{5\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Como $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$ e $0 < \frac{\pi}{2n} \le \frac{\pi}{12}$, para $n \in \mathbb{N}^*$, temos $\frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{12}$ e $n = 6$.

b) $\operatorname{sen}\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4}}$.

Questão 28

Sejam α e β números reais não nulos. Determine os valores de b, c, d, bem como a relação entre α e β para que ambos os sistemas lineares S e T a seguir sejam compatíveis indeterminados.

$$S\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ cx + y = \beta \end{cases} \qquad T\begin{cases} cx + 3y = \alpha \\ 4x + dy = \beta \end{cases}$$

Resolução:

Duas condições necessárias para que ambos os sistemas sejam compatíveis e indeterminados são

$$\begin{vmatrix} 2 & b \\ c & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} c & 3 \\ 4 & d \end{vmatrix} = 0$$

Disso, $bc = 2$ e $cd = 12$, o que significa que b, c e d são diferentes de zero.
Escalonando os sistemas S e T, tem-se, respectivamente, que

$$\begin{cases} 2x + by = \alpha \\ \left(-\frac{bc}{2} + 1\right)y = -\frac{\alpha c}{2} + \beta \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 4x + dy = \beta \\ \left(-\frac{cd}{4} + 3\right)y = -\frac{\beta c}{4} + \alpha \end{cases}$$

Como $bc = 2$ e $cd = 12$, para que os sistemas sejam compatíveis e indeterminados, $-\frac{\alpha c}{2} + \beta = 0$ e $-\frac{\beta c}{4} + \alpha = 0$, ou ainda, $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{c}{2}$ e $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{4}{c}$. Com isso, $\frac{c}{2} = \frac{4}{c}$, o que implica que $c = 2\sqrt{2}$ ou $c = -2\sqrt{2}$.

Com $c = 2\sqrt{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $d = 3\sqrt{2}$ e $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{2}$.

Com $c = -2\sqrt{2}$, $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $d = -3\sqrt{2}$ e $\frac{\beta}{\alpha} = -\sqrt{2}$.

Questão 29

Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

Resolução:

Temos:

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$$
$$3x^2 + 6xy - xy - 2y^2 - 6x + 3x + 2y + 6y - 6 = 0$$
$$\left(3x^2 + 6xy - 6x\right) - \left(xy + 2y^2 - 2y\right) + \left(3x + 6y - 6\right) = 0$$
$$3x\left(x + 2y - 2\right) - y\left(x + 2y - 2\right) + 3\left(x + 2y - 2\right) = 0$$
$$\left(x + 2y - 2\right)\left(3x - y + 3\right) = 0 \leftrightarrow$$
$$(r)\, x + 2y - 2 = 0 \text{ ou } (s)\, 3x - y + 3 = 0$$

Os coeficientes angulares das retas acima são: $m_r = -\frac{1}{2}$ e $m_s = 3$

A tangente do ângulo agudo θ formado pelas restas é dado por:

$$\operatorname{tg}\theta = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_s m_r}\right| = \left|\frac{3 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)}\right| = \left|\frac{7}{2} \cdot \frac{2}{(-1)}\right|$$

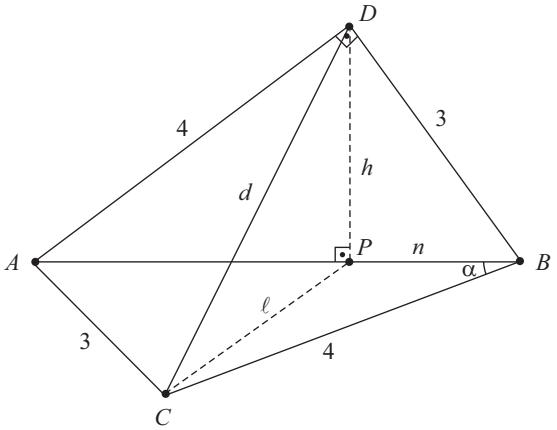
$\therefore \operatorname{tg}\theta = 7$

Questão 30

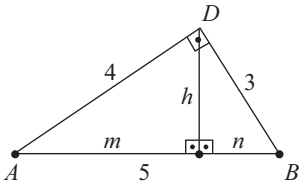
Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Resolução:

Consideremos o Tetraedro $ABCD$:



No triângulo ABD:



$$5 \cdot h = 3 \cdot 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5}$$

$$5 \cdot n = 3^2 \Rightarrow n = \frac{9}{5}$$

No triângulo ABC, tem-se $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

Lei dos Cossenos para obter ℓ.

$$\ell^2 = \left(\frac{9}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{9}{5} \cdot 4 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \ell^2 = \frac{193}{25}$$

Como $\overline{DP}$ é perpendicular à base ΔABC, então $\overline{DP}$ é perpendicular ao segmento $\overline{PC}$.

Assim, determina-se a medida desconhecida de $\overline{CD}$:

$$d^2 = h^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = \frac{337}{25}$$

$$\therefore d = \frac{\sqrt{337}}{5}$$

As medidas das arestas são:

$AB = 5$, $AC = 3$, $BC = 4$, $AD = 4$, $BD = 3$, e $DC = \frac{\sqrt{337}}{5}$.

Matemática
Bruno Fraga
Diego Bernadelli
Fausto
Lafayette
Marcelo Salviano
Marcos Miola
Ney Marcondes

Colaboradores
Aline Alkmin
Fernanda Chaveiro
Igor Macedo
Matheus Cavalcanti
Paulo Adorno
Thiago Higor

Digitação e Diagramação
Daniel Alves
João Paulo
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Luciano Lisboa
Rodrigo Ramos
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Leandro Bessa
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

Copyright©Olimpo2015

*A **Resolução Comentada** das provas do ITA poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo