2014 ITA

*"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"*
***Galileu Galilei***

## Notações

$\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais; $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$ : conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$ : conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$ : conjunto dos números complexos
$i$ : unidade imaginária: $i^2 = -1$
$|z|$ : módulo do número $z \in \mathbb{C}$
$\bar{z}$ : parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\text{Re}(z)$ : parte real do número $z \in \mathbb{C}$
$\det A$ : determinante da matriz $A$
$A^t$ : transposta da matriz $A$
$\mathcal{P}(A)$ : conjunto de todos os subconjuntos do conjunto $A$
$n(A)$ : número de elementos do conjunto finito $A$
$P(A)$ : probabilidade de ocorrência do evento $A$
$f \circ g$ : função composta das funções $f$ e $g$
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$
$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a < x \le b\}$
$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$
$A \setminus B = \{x;\ x \in A \text{ e } x \notin B\}$

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

### Questão 01

Das afirmações:

I. Se $x$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, com $y \ne -x$, então $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

III. Sejam $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$, com $a < b < c$. Se $f : [a, c] \to [a, b]$ é sobrejetora, então $f$ não é injetora,

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I e II.
B) apenas I e III.
C) apenas II e III.
D) apenas III.
E) nenhuma.

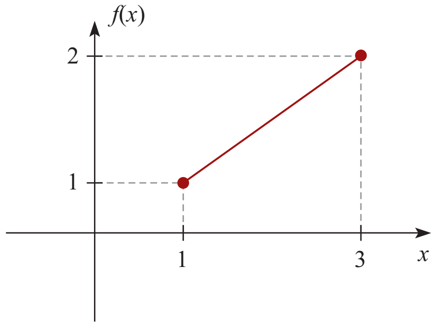
---

Resolução:

I. Falso. Vejamos um contra-exemplo: seja $x = 2 + \sqrt{3}$ e $y = 2 - \sqrt{3}$. Assim $y \ne -x$ e $x + y = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4 \in \mathbb{Q}$.

II. Falso. Vejamos um contra-exemplo: seja $x = 0$ e $y = \pi$
$x \cdot y = 0 \cdot \pi = 0 \in \mathbb{Q}$

III. Falso. Vejamos um contra-exemplo, onde $f$ é injetora




Neste caso temos $a=1$, $b=2$ e $c=3$ com $f:[1,3]\to[1,2]$ injetora e sobrejetora.

Alternativa E

## Questão 02

Considere as funções $f$, $g:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+m$, $g(x)=bx+n$, em que $a$, $b$, $m$ e $n$ são constantes reais. Se $A$ e $B$ são as imagens de $f$ e de $g$, respectivamente, então, das afirmações abaixo:

I. Se $A=B$, então $a=b$ e $m=n$;
II. Se $A=Z$, então $a=1$;
III. Se $a$, $b$, $m$, $n\in\mathbb{Z}$, com $a=b$ e $m=-n$, então $A=B$,

é (são) verdadeira(s)
A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas I e II.
E) Nenhuma.

---

Resolução:

Considere que:
I) Com $f(x)=-x+1$ e $g(x)=x+1$, tem-se que, com $x\in\mathbb{Z}$, $A=B$. Logo, $A=B$ não implica $a=b$ e $m=n$.
II) Com $f(x)=-x+1$ tem-se, com $x\in\mathbb{Z}$, que $A=\mathbb{Z}$. Logo, $A=\mathbb{Z}$ não implica que $a=1$.
III) Com $f(x)=3x+1$ e $g(x)=3x-1$, tem-se que $10\in A$, mas $10\notin B$. Logo, $a, b, m, n\in\mathbb{Z}$, com $a=b$ e $m=-n$ não implica $A=B$, com $x\in\mathbb{Z}$.

Com isso, nenhuma das afirmações é verdadeira.

Alternativa E

## Questão 03

A soma $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}\frac{\log_{1/2}\sqrt[n]{32}}{\log_{1/2}8^{n+2}}$ é igual a

A) $\frac{8}{9}$.
B) $\frac{14}{15}$.
C) $\frac{15}{16}$.
D) $\frac{17}{18}$.
E) $1$.

**Resolução:**

$$\sum_{n=1}^{4}\frac{\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[n]{32}}{\log_{\frac{1}{2}}8^{n+2}}=\sum_{n=1}^{4}\log_{8^{n+2}}32^{\frac{1}{n}}$$

$$=\sum_{n=1}^{4}\log_{2^{3n+6}}2^{\frac{5}{n}}=\sum_{n=1}^{4}\frac{5}{n(3n+6)}\log_2 2$$

$$=\sum_{n=1}^{4}\frac{5}{n(3n+6)}=\frac{5}{1\cdot 9}+\frac{5}{2\cdot 12}+\frac{5}{3\cdot 15}+\frac{5}{4\cdot 18}$$

$$=\frac{17}{18}$$

Alternativa D

## Questão 04

Se $z\in\mathbb{C}$, então $z^6-3|z|^4\left(z^2-\bar{z}^2\right)-\bar{z}^6$ é igual a

A) $\left(z^2-\bar{z}^2\right)^3$.

B) $z^6-\bar{z}^6$.

C) $\left(z^3-\bar{z}^3\right)^2$.

D) $\left(z-\bar{z}\right)^6$.

E) $\left(z-\bar{z}\right)^2\left(z^4-\bar{z}^4\right)$.

**Resolução:**

Utilizando que $z\cdot\bar{z}=|z|^2$, segue que:

$$z^6-3|z|^4\cdot\left(z^2-\bar{z}^2\right)-\bar{z}^6=z^6-3\left|z^2\right|^2\cdot\left(z^2-\bar{z}^2\right)-z^6$$

$$z^6-3\left(z\cdot\bar{z}\right)^2\cdot\left(z^2\cdot\bar{z}^2\right)-z^6=z^6-3z^2\cdot\bar{z}^2\left(z^2\cdot\bar{z}^2\right)-z^6 \text{ logo}$$

$$z^6-3z^4\cdot\bar{z}^2+3z^2\cdot\bar{z}^4-z^6=\left(z^2-\bar{z}^2\right)^3$$

Alternativa A

## Questão 05

Sejam $z$, $w\in\mathbb{C}$. Das informações:

I. $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$;

II. $\left(z+\bar{w}\right)^2-\left(z-\bar{w}\right)^2=4z\bar{w}$;

III. $|z+w|^2-|z-w|^2=4\,\mathrm{Re}\left(z\bar{w}\right)$

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.

B) apenas I e II.

C) apenas I e III.

D) apenas II e III.

E) todas.

**Resolução:**

Sejam $z=a+bi$

$w=c+di$

e lembrando que $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, julgamos:

Afirmação I: Desenvolvendo cada lado separadamente.

$$|z+w|^2+|z-w|^2=|a+bi+c+di|^2+|a+bi-c-di|^2$$

$$=\left(a+b\right)^2+\left(c+d\right)^2+\left(a-c\right)^2+\left(b-d\right)^2$$

$= 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$

Enquanto
$2\left(|z|^2 + |w|^2\right) = 2\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)$

Logo, a afirmação I é verdadeira.

Afirmação II:
$(z + \overline{w})^2 - (z - \overline{w})^2 =$
$z^2 + 2z\overline{w} + (\overline{w})^2 - \left(z^2 - 2z\overline{w} + \overline{w}^2\right) =$
$4z\overline{w}$

Logo a afirmação II é verdadeira.
Afirmação III: Desenvolvendo separadamente cada lado da igualdade, segue:
$|z + w|^2 - |z - w|^2 =$
$|a + bi + c + di|^2 - |a + bi - c - di|^2 =$
$(a + c)^2 + (b + d)^2 - \left[(a - c)^2 + (b - d)^2\right] = 4ac + 4bd$
Enquanto: $z \cdot \overline{w} = (a + bi) \cdot (c - di)$
$= (ac + bd) + i \cdot (bc - ad)$

Logo $4\operatorname{Re}(z\overline{w}) = 4(ac + bd)$ e a afirmação III é verdadeira.

Alternativa E

## Questão 06

Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando $(a_1, a_2, a_3)$ é igual a

A) $\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4}\right)$.
B) $\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}\right)$.
C) $\left(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}\right)$.
D) $\left(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$.
E) $\left(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4}\right)$.

---

**Resolução:**
Seja $x^5 + 0x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = 0$ com raízes $\left(\alpha - 1, \alpha - \frac{1}{2}, \alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \alpha + 1\right)$. Pelas relações de Girard temos:

$\alpha - 1 + \alpha - \frac{1}{2} + \alpha + \alpha + \frac{1}{2} + \alpha + 1 = 0$
Assim $5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

Logo as raízes são: $\left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$. Pelo teorema fundamental da álgebra, polinômio $p(x)$ é tal que:

$x^5 + 0x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = (x + 1)(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot x$

$x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = \left(x^2 - 1\right)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) \cdot x = \left(x^4 - \frac{1}{4}x^2 - x^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot x$

$x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x = x^5 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{1}{4}x$ logo $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 0$ e $a_3 = -\frac{5}{4}$

Alternativa C

## Questão 07

Para os inteiros positivos $k$ e $n$, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

Então, o valor de $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$ é igual a

A) $2^n + 1$.
B) $2^{n+1} + 1$.
C) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.
D) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
E) $\frac{2^n - 1}{n}$.

---

Resolução:

Seja $S = \binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$.

Multiplicando ambos os lados por $(n+1)$:

$$S \cdot (n+1) = \frac{(n+1)}{1} \cdot \binom{n}{0} + \frac{n+1}{2} \cdot \binom{n}{1} + \frac{n+1}{3} \cdot \binom{n}{2} + \ldots + \frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}$$

Usando a propriedade sugerida no enunciado:

$$S \cdot (n+1) = \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}$$

Acrescentando-se $\binom{n+1}{0}$ a ambos os lados da igualdade completa-se uma linha do Triângulo de Pascal:

$$S(n+1) + \binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}$$

Logo $S \cdot (n+1) + 1 = 2^{n+1}$

Assim $S = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Alternativa D

## Questão 08

Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas $A$ e $B$ de ordem $n$, com $A$ inversível e $B$ antissimétrica:

I. Se o produto $AB$ for inversível, então $n$ é par;
II. Se o produto $AB$ não for inversível, então $n$ é ímpar;
III. Se $B$ for inversível, então $n$ é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas I e II.
C) apenas I e III.
D) apenas II e III.
E) todas.

**Resolução:**

Considere que:

I) Com $AB$ inversível, $\det(AB) \neq 0$. Com $\det(AB) = \det A \times \det B$, pois $A$ e $B$ são quadradas e tem mesma ordem, tem-se que $\det A \neq 0$ e $\det B \neq 0$. Com $B$ sendo antissimétrica, $B^t = -B$, o que implica que $\det B^t = \det(-B)$. Como $\det B^t = \det B$ e $\det(-B) = (-1)^n \det B$, $\det B = (-1)^n \det B$. Disso, $(-1)^n = 1$, pois $\det B \neq 0$, e, assim, conclui-se que $n$ é par.

II) Com $AB$ não sendo inversível, $\det(AB) = 0$ e, já que $A$ é inversível e $\det(AB) = \det A \times \det B$, pode-se dizer que $\det B = 0$. Com $B$ antissimétrica, do item anterior, $\det B = (-1)^n \det B$. Nesse caso, com $\det B = 0$, $n$ pode ser tanto par, quanto ímpar. Com qualquer $A$ inversível de ordem $2$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, por exemplo, $AB$ não é inversível e $n$ é par, o que contraria a afirmativa.

III) Se $B$ é inversível, então $\det B \neq 0$. Com $B$ sendo antissimétrica, do item $(I)$, $\det B = (-1)^n \det B$, o que implica que $(-1)^n = 1$. Assim, $n$ deve ser um número par.

Diante das considerações, apenas I e III são verdadeiras.

Alternativa C

## Questão 09

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix}$ matrizes reais tais que o produto $AB$ é uma matriz antissimétrica. Das afirmações abaixo:

I. $BA$ é antissimétrica;
II. $BA$ não é inversível;
III. O sistema $(BA)X = 0$, com $X^t = [x_1 \; x_2 \; x_3]$, admite infinitas soluções,

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I e II.
B) apenas II e III.
C) apenas I.
D) apenas II.
E) apenas III.

**Resolução:**

A matriz $X$ é antissimétrica se e somente se $X^t = -X$.

Como $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ y & -x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x+1 & x \\ y-2 & y \\ z+3 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1-y+2+z+3 & x-y+z \\ xy+y-xy+2x+z+3 & yx-xy+z \end{bmatrix}$, então

$A \cdot B = \begin{bmatrix} x-y+z+6 & x-y+z \\ 2x+y+z+3 & z \end{bmatrix}$. Como $AB$ é antissimétrica temos:

$$\begin{cases} x-y+z+6=0 \\ z=0 \\ x-y+z=-2x-y-z-3 \end{cases}$$

Disso $\begin{cases} x-y=-6 \\ 3x=-3 \end{cases}$, o que quer dizer que $x=-1$ e $y=5$.

Assim, $B \cdot A$ fica

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 28 & -8 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$. Julgando as afirmações:

I) $B \cdot A$ não é antissimétrica
I é Falso

II) $\det(B \cdot A) = (120+24+84)-(+24+120+84) = 0$ logo $B \cdot A$ não é inversível
II é verdadeira

III) $(BA)X = 0$

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 \\ 28 & -8 & 8 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Temos um sistema linear homogêneo com $\det(B \cdot A) = 0$. Logo admite infinitas soluções

III verdadeira

Alternativa B

## Questão 10

Seja $M$ uma matriz quadrada de ordem $3$, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det\left(2M^2\right) - \det\left(\sqrt[3]{2}M^3\right) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de $M$ é

A) $\frac{1}{3}$.

B) $\frac{1}{2}$.

C) $\frac{2}{3}$.

D) $\frac{4}{5}$.

E) $\frac{5}{4}$.

---

Resolução:

Lembrando que, para $A_{n\times n}$, $\det(kA) = k^n \cdot \det A$ e aplicando o Teorema de Binet, segue:

$$\det\left(2M^2\right) - \det\left(\sqrt[3]{2} \cdot M^3\right) = \frac{2}{9} \cdot \det(3M)$$

$$2^3 \cdot (\det M)^2 - 2 \cdot (\det M)^3 = \frac{2}{9} \cdot 3^3 \cdot \det(M)$$

$$8 \cdot (\det M)^2 - 2 \cdot (\det M)^3 = 6 \cdot (\det M)$$

Fazendo a substituição de variáveis: $\det M = y$

$$2y^3 - 8y^2 + 6y = 0$$

$2y \cdot \left(y^2 - 4y + 3\right) = 0$ Como $M$ é inversível, $\det M \neq 0$

Logo $y = 1$ ou $y = 3$.

Assim, $\det M = 1 \Rightarrow \det M^{-1} = 1$

$\det M = 3 \Rightarrow \det M^{-1} = \frac{1}{3}$

Alternativa A

## Questão 11

Considere a equação $A(t)X = B(t), t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $det\,A(t) = 1$ e $t \neq 0$, as valores de $x$, $y$ e $z$ são, respectivamente,

A) $2\sqrt{2},\ 0, -3\sqrt{2}$.

B) $-2\sqrt{2},\ 0, -3\sqrt{2}$.

C) $0,\ 3\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}$.

D) $0, 2\sqrt{3},\ \sqrt{3}$.

E) $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$.

Resolução:

Fazendo a substituição $e^{2t} = k$ , segue:

$\det A(t) = 1$

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{k} & -k & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$\frac{2}{k} + k - 2 = 1$

Segue $k^2 - 3k + 2 = 0 \Rightarrow k = 1$ ou $k = 2$

Como $e^{2t} = k$ ,

$e^{2t} = 1 \Rightarrow t = 0 \quad$ (não convém)

$e^{2t} = 2 \Rightarrow t = \frac{ln 2}{2}$

Notando que $e^{2t} = 2$ leva a $e^t = \sqrt{2}$ , segue:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

E o sistema $A(t) \cdot X = B(t)$ reduz-se a

$$\begin{cases} x - 2y - z = \sqrt{2} \\ -x + y + z = -\sqrt{2} \\ -3x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

Assim $x = -2\sqrt{2}$ , $y = 0$ , $z = -3\sqrt{2}$

Alternativa B

## Questão 12

Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + a\,z^3 + 5z^2 - i\,z - 6$, em que $a$ é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

A) $-3i, -1, \ 1.$

B) $-i, \ i, \ 1.$

C) $-i, \ i, \ -1.$

D) $-2i, -1, \ 1.$

E) $-2i, -i, \ i.$

Resolução:

Como $2i$ e raiz, então $P(2i) = 0$

$P(2i) = (2i)^4 + a(2i)^3 + 5(2i)^2 - i(2i) - 6 = 0$

$16 - 8ai - 20 + 2 - 6 = 0$ ,

$8ai = -8,$

$a = \frac{-1}{i} \Rightarrow a = i$

Aplicando Briot Ruffini:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $1$ | $i$ | $5$ | $-i$ | $-6$ | |
| $2i$ | $1$ | $3i$ | $-1$ | $-3i$ | $0$ | *É fácil ver que 1 é Raiz* |
| $1$ | $1$ | $1+3i$ | $3i$ | $0$ | | |
| $-1$ | $1$ | $3i$ | $0$ | | | *Fácil ver que −1 é Raiz* |

Assim $(x - 2i)(x - 1)(x + 1)(x + 3i) = 0$

Raízes $2i, \ 1, -1, -3i$

Alternativa A

## Questão 13

Sabendo que $\text{sen}\,x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, um possível valor para $\text{cossec}\,2x - \dfrac{1}{2}\text{tg}\,x$ é

A) $\dfrac{a-b}{ab}$.

B) $\dfrac{a+b}{2ab}$.

C) $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.

D) $\dfrac{a^2+b^2}{4ab}$.

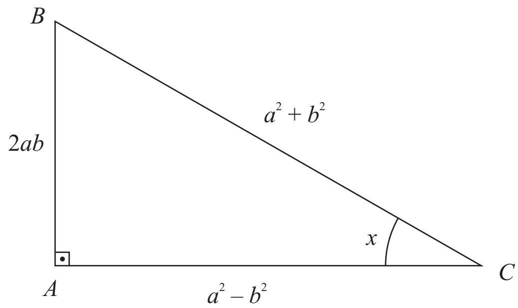
E) $\dfrac{a^2-b^2}{4ab}$.

---

Resolução:

$\text{Sen}\,x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2}$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Colocando no triângulo retângulo teremos




Assim $\text{tg}\,x = \dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

$$\text{sen}\,x = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\text{Sen}(2x) = 2\,sen\,x \cdot cos\,x = 2 \cdot \left(\frac{2ab}{a^2+b^2}\right) \cdot \left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$A = \text{cossec}(2x) - \frac{1}{2}\text{tg}\,x = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2}{4ab\left(a^2-b^2\right)} - \frac{ab}{a^2-b^2} =$$

$$A = \frac{\left(a^2+b^2\right)^2 - (2ab)^2}{4ab\left(a^2-b^2\right)}$$

$$A = \frac{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2}{4ab\left(a^2-b^2\right)}$$

$$A = \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4ab\left(a^2-b^2\right)} = \frac{a^2-b^2}{4ab}$$

Alternativa E

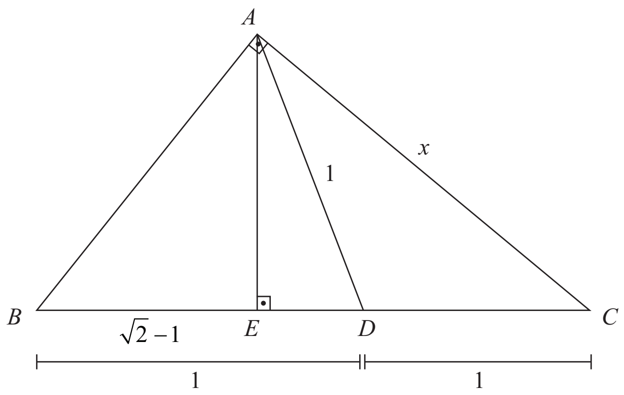
## Questão 14

Considere o triângulo $ABC$ retângulo em $A$. Sejam $\overline{AE}$ e $\overline{AD}$ a altura e a mediana relativa à hipotenusa $\overline{BC}$, respectivamente. Se a medida de $\overline{BE}$ é $\left(\sqrt{2}-1\right)\text{cm}$ e a medida de $\overline{AD}$ é $1\text{cm}$, então $\overline{AC}$ mede, em cm,

A) $4\sqrt{2}-5$.
B) $3-\sqrt{2}$.
C) $\sqrt{6-2\sqrt{2}}$.
D) $3\left(\sqrt{2}-1\right)$.
E) $3\sqrt{4\sqrt{2}-5}$.

---

Resolução:




$$x^2 = (BC)\cdot(EC) = 2\left(3-\sqrt{2}\right)$$
$$x = \sqrt{6-2\sqrt{2}}$$

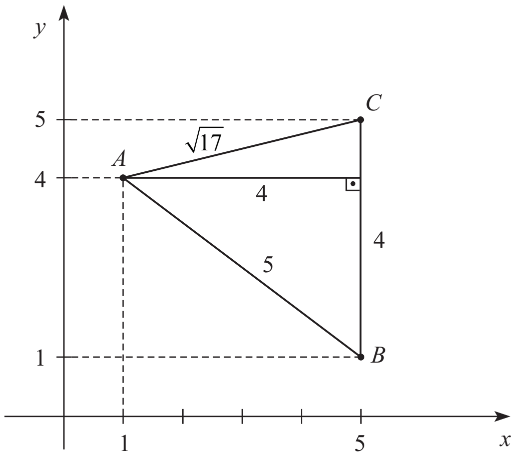
Alternativa C

## Questão 15

Seja $ABC$ um triângulo de vértices $A=(1,4)$, $B=(5,1)$ e $C=(5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

A) $\frac{15}{8}$.
B) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$.
C) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$.
D) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$.
E) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$.

Resolução:




Como $S = \dfrac{abc}{4R}$, $\dfrac{4 \cdot 4}{2} = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot \sqrt{17}}{4R}$

$R = \dfrac{5\sqrt{17}}{8}$

Alternativa D

## Questão 16

Em um triângulo isósceles $ABC$, cuja área mede $48\,\text{cm}^2$, a razão entre as medidas da altura $\overline{AP}$ e da base $\overline{BC}$ é igual a $\dfrac{2}{3}$. Das afirmações abaixo:

I. As medianas relativas aos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ medem $\sqrt{97}\,\text{cm}$;

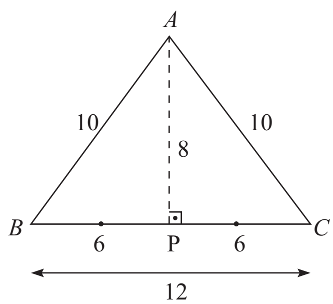
II. O baricentro dista $4\,\text{cm}$ do vértice $A$;

III. Se $\alpha$ é o ângulo formado pela base $\overline{BC}$ com a mediana $\overline{BM}$, relativa ao lado $\overline{AC}$, então $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{97}}$,

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas I e III.
E) apenas II e III.

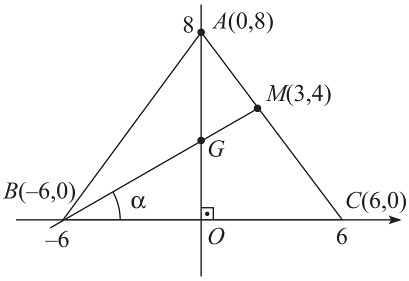
Resolução:




Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $\dfrac{\overline{BC} \cdot \overline{AP}}{2} = 48$. Foi dado, ainda, que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BC}} = \dfrac{2}{3}$. A solução do sistema $\begin{cases} \overline{BC} \cdot \overline{AP} = 96 \\ 3 \cdot \overline{AP} = 2 \cdot \overline{BC} \end{cases}$ é $\overline{AP} = 8\,\text{cm}$ e $\overline{BC} = 12\,\text{cm}$

Como $\left(\overline{AC}\right)^2 = 8^2 + 6^2$, tem-se $\overline{AC} = 10\,\text{cm}$.

Em um plano cartesiano $xOy$, a figura pode ser colocada como mostra a figura seguinte.




O ponto $M(3,4)$ é médio de $AC$. Então, a mediana $BM$ é tal que $\overline{BM} = \sqrt{(3+6)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{97}\,\text{cm}$, o mesmo ocorre com a mediana $CN$, ou seja, $\overline{CN} = \sqrt{97}\,\text{cm}$.

O baricentro $G$ é tal que $\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot \overline{OA}$, ou seja, $\overline{AG} = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}\text{cm}$.

A equação da reta $\overleftrightarrow{GM}$ é $y = \frac{4}{9}x + \frac{8}{3}$, logo, $\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{9}$ e, portanto, $\cos\alpha = \frac{9}{\sqrt{97}}$.

Assim, somente a afirmação I é verdadeira.

Alternativa A

## Questão 17

Considere o trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sejam $M$ e $N$ os pontos médios das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, respectivamente. Então, se $\overline{AB}$ tem comprimento $x$ e $\overline{CD}$ tem comprimento $y < x$, o comprimento de $\overline{MN}$ é igual a

A) $x - y$.

B) $\frac{1}{2}(x-y)$.

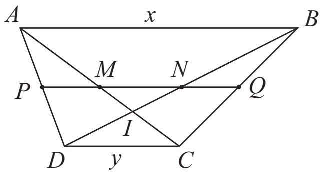
C) $\frac{1}{3}(x-y)$.

D) $\frac{1}{3}(x+y)$.

E) $\frac{1}{4}(x+y)$.

---

Resolução:




Sendo $M$ e $N$ os pontos médios das diagonais $AC$ e $BD$, demonstra-se que $PQ$ é a base média do trapézio $ABCD$, $PM$ é a base média do triângulo $ACD$ e $NQ$ é a base média do triângulo $CBD$.

Assim, $PQ = \frac{x+y}{2}$, $PM = NQ = \frac{y}{2}$.

Como $PQ = PM + MN + NQ$, temos $\frac{x+y}{2} = \frac{y}{2} + MN + \frac{y}{2}$, ou seja, $MN = \frac{1}{2}(x-y)$.

Alternativa B

## Questão 18

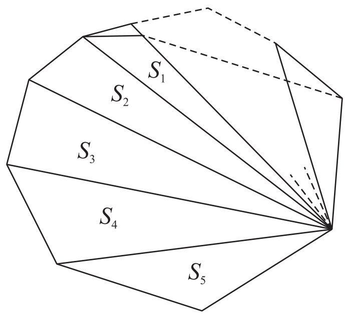
Uma pirâmide de altura $h = 1\text{ cm}$ e volume $V = 50\text{ cm}^3$ tem como base um polígono convexo de $n$ lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas $S_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}\text{cm}^2$ e $S_6 = 3\text{ cm}^2$. Então $n$ é igual a

A) 22.
B) 24.
C) 26.
D) 28.
E) 32.

**Resolução:**

O volume $V$ da pirâmide de altura $h$ é $V=\frac{1}{3}\cdot A_B\cdot h$, ou seja, $50=\frac{1}{3}\cdot A_B\cdot 1$. Portanto, $A_B=150\ \text{cm}^2$

Considere a base da figura seguinte.




Sabe-se que $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-2})$ é uma PA,

com $S_3=\frac{3}{2}\text{cm}^2$ e $S_6=3\ \text{cm}^2$. Assim,

$S_6=S_3+3r \Rightarrow 3=\frac{3}{2}+3r \Rightarrow r=\frac{1}{2}$ é a razão da PA.

$S_3=S_1+2r \Rightarrow \frac{3}{2}=S_1+2\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow S_1=\frac{1}{2}$ é o 1° termo da PA.

$S_{n-2}=S_1+(n-3)r \Rightarrow S_{n-2}=\frac{1}{2}+(n-3)\frac{1}{2} \Rightarrow S_{n-2}=\frac{n}{2}-1$

A soma dos $n-2$ termos é

$$\Sigma=\frac{(S_1+S_{n-2})(n-2)}{2}=\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-1\right)(n-2)}{2}=150 \ \text{(área da base)}$$

ou seja, $n=26$.

Alternativa C

## Questão 19

A equação do círculo localizado no 1° quadrante que tem área igual a $4\pi$ (unidades de área) e é tangente, simultaneamente, às retas $r: 2x-2y+5=0$ e $s: x+y-4=0$ é

A) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{10}{4}\right)^2=4$.

B) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2=4$

C) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\frac{10}{4}\right)^2=4$

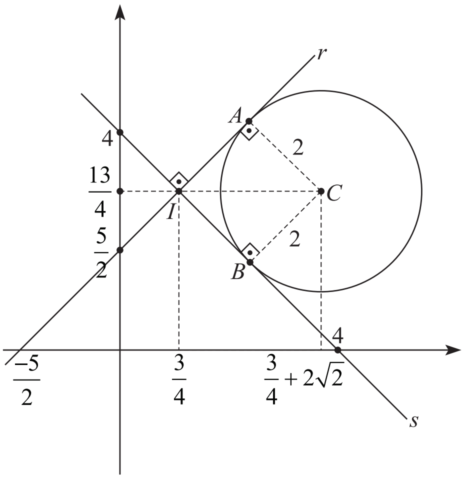
D) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\frac{13}{4}\right)^2=4$

E) $\left(x-\left(2\sqrt{2}+\frac{3}{4}\right)\right)^2+\left(y-\frac{11}{4}\right)^2=4$

**Resolução:**

A circunferência cuja área interna é $4\pi$ tem raio 2.

As retas $(r)$ e $(s)$ têm equações $y=x+\frac{5}{2}$ e $y=-x+4$, respectivamente, e seus gráficos estão representados na figura.




O ponto $I$ de intersecção das retas $r$ e $s$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{5}{2} \\ y = -x + 4 \end{cases}, \text{ ou seja,}$$

$$I = \left(\frac{3}{4}, \frac{13}{4}\right).$$

Como $\overline{IC}$ é a diagonal do quadrado $AIBC$, temos $\overline{IC} = 2\sqrt{2}$.

Assim, o centro $C$ da circunferência é $C = \left(\frac{3}{4} + 2\sqrt{2}; \frac{13}{4}\right)$ e, portanto, a equação da circunferência é $\left(x - \left(2\sqrt{2} + \frac{3}{4}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{13}{4}\right)^2 = 4.$

Alternativa D

## Questão 20

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles $ABC$ em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0,25$ cm do vértice $A$ e $0,75$ cm da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\dfrac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}$ cm, o volume desse sólido, em $\text{cm}^3$, é igual a

A) $\dfrac{9}{16}$.

B) $\dfrac{13}{96}$.

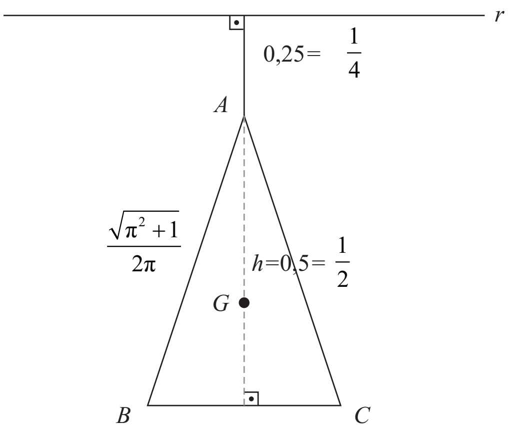
C) $\dfrac{7}{24}$.

D) $\dfrac{9}{24}$.

E) $\dfrac{11}{96}$.

---

Resolução:




O volume $V$ do sólido obtido pela rotação completa do triângulo $ABC$ em torno da reta $r$ é dado por $V = 2\pi dS$ (teorema de *Pappus*), onde $d$ é a distância do baricentro do triângulo $ABC$ à reta $r$ e $S$ é a área do triângulo $ABC$.

Como $d = 0,25 + \frac{2}{3} \cdot h$, temos

$$d = \frac{7}{12}.$$

Por Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\right)^2 = h^2 + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi^2+1}{4\pi^2} = \frac{1}{4} + \left(\frac{\overline{BC}}{2}\right)^2 \Rightarrow \overline{BC} = \frac{1}{\pi}$$

A área s do triângulo $ABC$ é $S = \frac{(\overline{BC}) \cdot h}{2} =$

$= \frac{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{4\pi}$, logo, o volume $V$ é dado por

dado por $V = 2\pi d S = 2\pi \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{1}{4\pi} \Rightarrow V = \frac{7}{24} \text{cm}^3$.

Alternativa C

## Questão 21

Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\alpha x}$, em que $\alpha$ é uma constante real positiva, e $g: [0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x}$. Determine o conjunto-solução da inequação

$$(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x).$$

---

Resolução:

Tem-se que $(g \circ f)(x) = \sqrt{e^{\alpha x}}$, ou ainda, $(g \circ f)(x) = e^{\frac{\alpha x}{2}}$, com $x \in \mathbb{R}$. Tem-se, ainda, que $(f \circ g)(x) = e^{\alpha \sqrt{x}}$, com $x \in \mathbb{R}_+$. Com isso, qualquer solução $x$ da inequação $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$ deve ser tal que $x \in \mathbb{R}_+$.

De $(g \circ f)(x) > (f \circ g)(x)$, obtém-se $e^{\frac{\alpha x}{2}} > e^{\alpha \sqrt{x}}$. Daí, como $e > 1$, $\frac{\alpha x}{2} > \alpha \sqrt{x}$, ou ainda, $\frac{x}{2} > \sqrt{x}$, pois $\alpha > x$. Considerando que $x \in \mathbb{R}_+$, se $\frac{x}{2} > \sqrt{x}$, então $\frac{x^2}{4} > x$, ou melhor, $x^2 - 4x > 0$. Disso, conclui-se que $x < 0$ ou $x > 4$. Assim, lembrando que $x \in \mathbb{R}_+$, o conjunto solução da inequação é $S = ]4, \infty[$.

## Questão 22

Determine as soluções reais da equação em $x$, $(\log_4 x)^3 - \log_4 (x^4) - 3 \frac{\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$.

---

Resolução:

$$(\log_4 x)^3 - \log_4 x^4 - 3 \cdot \frac{\log_{10} 16x}{\log_{10} 16} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4 \log_4 x - 3 \cdot \frac{\log_{10} 16x}{\frac{1}{2} \cdot \log_{10} 16} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4 \log_4 x - 6 \log_{16} 16x = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4 \log_4 x - \frac{6}{2} \log_4 16x = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4 \log_4 x - \frac{6}{2} (\log_4 16 + \log_4 x) = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4 \log_4 x - 3 \log_4 x - 6 = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 7 \log_4 x - 6 = 0$$

Sendo $\log_4 x = y$,

$y^3 - 7y - 6 = 0$. Por simples verificação, $y = -1$.

Utilizando o dispositivo prático de *Briot Ruffini*, conclui-se que as demais raízes são raízes da equação $y^2 - y - 6 - 0$. Assim, as demais raízes são $y = 3$ e $y = -2$.

Com isso,

Se $\log_4 x = -1$, então $x = \frac{1}{4}$;

Se $\log_4 x = 3$, então $x = 64$;

Se , $\log_4 x = -2$ , então $x = \frac{1}{16}$.

Verificando que $x > 0$ ,

$S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, 64 \right\}$

## Questão 23

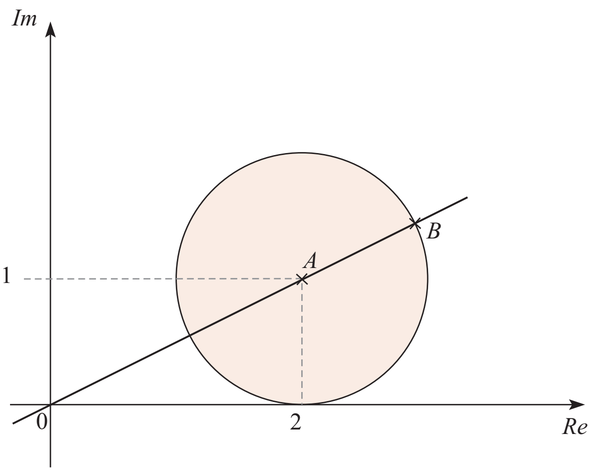
a) Determine o valor máximo de $|z+i|$, sabendo que $|z-2|=1$, $z \in \mathbb{C}$.

b) Se $z_0 \in \mathbb{C}$ satisfaz (a), determine $z_0$.

---

Resolução:

a) Seja $z = x + yi$, com $i$ sendo a unidade imaginária. Se $|z-2|=1$ e $z = x+yi$, então $|(x-2)+yi|=1$. Disso, $(x-2)^2 + y^2 = 1$, o que significa que os números complexos $z$ que satisfazem a condição formam a circunferência com centro no afixo $(2,0)$ e raio $1$.
Com isso, os afixos, dos números complexos $z+i$ formam a circunferência com centro no afixo $(2,1)$ e raio $1$.




O valor máximo de $|z+i|$ corresponde ao módulo do número complexo que pertence à circunferência acima e está mais distante da origem. Na figura, este número complexo tem afixo $B$. Assim, se a distância de $A$ até $O$ é $\sqrt{5}$ e o raio da circunferência é $1$, então o valor máximo de $|z+i|$ é $\sqrt{5}+1$.

b) Se $\theta$ é o argumento de $z_0$, então, considerando que $\theta$ também é o argumento de $z_0 + i$, da figura do item anterior, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, ou ainda, $\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Se, também pelo item anterior, tem-se $|z_0 + i| = \sqrt{5}+1$, então pode-se dizer que $z_0 + i = \left(\sqrt{5}+1\right) \times \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} i\right) = \frac{10+2\sqrt{5}}{5} + \frac{5+\sqrt{5}}{5} \cdot i$, o que implica que $z_0 = \frac{10+2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} i$.

## Questão 24

Seja $\Omega$ o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a $9$ e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a $10$, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(A)$ e $n(B)$;

c) $P(A)$ e $P(B)$.

---

Resolução:

Assumindo que o espaço amostral $\Omega$ citado é o espaço amostral equiprovável, deve-se lembrar que neste caso a ordem dos números em cada lançamento importa.

Assim, o resultado $(1,2,3)$ é diferente de $(2,3,1)$ por exemplo:

a) Princípio Fundamental da Contagem:
$n(\Omega) = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

b) Soma dos números igual a $9$:

$$A = \{(1,2,6);\ (1,6,2);\ (2,1,6);\ (2,6,1);\ (6,1,2);\ (6,2,1);$$
$$(1,3,5);\ (1,5,3);\ (3,1,5);\ (3,5,1);\ (5,1,3);\ (5,3,1);$$
$$(1,4,4);\ (4,1,4);\ (4,4,1);$$
$$(2,2,5);\ (2,5,2);\ (5,2,2);$$
$$(2,3,4);\ (2,4,3);\ (3,2,4);\ (3,4,2);\ (4,2,3);\ (4,3,2);$$
$$(3,3,3)\}$$

Logo $n(A) = 25$.

Soma dos números igual a $10$:

$$B = \{(1,3,6);\ (1,6,3);\ (3,1,6);\ (3,6,1);\ (6,1,3);\ (6,3,1);$$
$$(1,4,5);\ (1,5,4);\ (4,1,5);\ (4,5,1);\ (5,1,4);\ (5,4,1);$$
$$(2,4,4);\ (4,2,4);\ (4,4,2);$$
$$(2,3,5);\ (2,5,3);\ (3,2,5);\ (3,5,2);\ (5,2,3);\ (5,3,2);$$
$$(3,3,4);\ (3,4,3);\ (4,3,3);$$
$$(6,2,2);\ (2,6,2);\ (2,2,6)\}$$

Logo $n(B) = 27$

c) $$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{216}$$

$$P(B) = \frac{27}{216}$$

## Questão 25

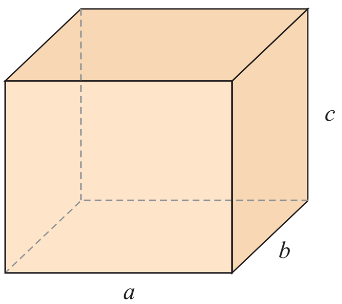
Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda $10$.

---

**Resolução:**

Por "paralelepípedo retângulo" entende-se prisma reto-retângulo.
Dividindo em três casos:

Caso 1: três medidas diferentes.




Assim temos $n_1 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ e a divisão por $3!$ ocorre porque não importa a ordem das medidas $a$, $b$, $c$.

Caso 2: apenas um par de bases quadradas.
Neste caso, pelo Princípio Fundamental, $n_2 = 10 \cdot 9 = 90$

Caso 3: Cubos.
São $10$ cubos possíveis.

Logo o número de paralelepípedos procurado é:

$120 + 90 + 10 = 220$ paralelepípedos.

## Questão 26

Considere o sistema linear nas incógnitas $x$, $y$ e $z$.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\text{sen}\theta)y + 4z = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi]. \\ 2x + (1-\cos 2\theta)y + 16z = 0 \end{cases}$$

a) Determine $\theta$ tal que o sistema tenha infinitas soluções.
b) Para $\theta$ encontrado em ($a$), determine o conjunto-solução do sistema.

---

Resolução:

Sendo $D$ o determinante do sistema homogêneo

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\text{sen}\theta)y + 4z = 0, \ \theta \in [0, 2\pi]. \\ 2x + (1-\cos 2\theta)y + 16z = 0 \end{cases}$$

Tem-se que:

a) Para o sistema ter infinitas soluções, $D = 0$,

ou seja, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & \text{sen}\theta & 4 \\ 2 & 1-\cos 2\theta & 16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos 2\theta + 2\cdot\text{sen}\theta + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 - 2\cdot\text{sen}^2\theta + 2\cdot\text{sen}\theta + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \text{sen}^2\theta - \text{sen}\theta - 2 - 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}\theta = 2 \ (\textit{não convém}) \\ \text{ou} \\ \text{sen}\theta = -1 \Rightarrow \theta = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

b) Para $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, temos

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \\ 2x + 2y + 16z = 0 \end{cases}$$

Somando as duas primeiras equações, temos:

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ -x - y + 4z = 0 \\ \hline 6z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{array} \ +$$

Substituindo na primeira equação, vem:

$x + y + 2\cdot 0 = 0 \Rightarrow x + y = 0$

Fazendo $x = \alpha$, temos $y = -\alpha$.

Portanto, o conjunto solução do sistema é

$S = \{(\alpha, -\alpha, 0), \textit{com } \alpha \in \mathbb{R}\}$.

## Questão 27

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem, simultaneamente,

$\dfrac{2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1}{\cos x - 1} < 0$ e $\text{tg}x + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}\,\text{cotg}\,x\right)\text{cotg}\,x.$

---

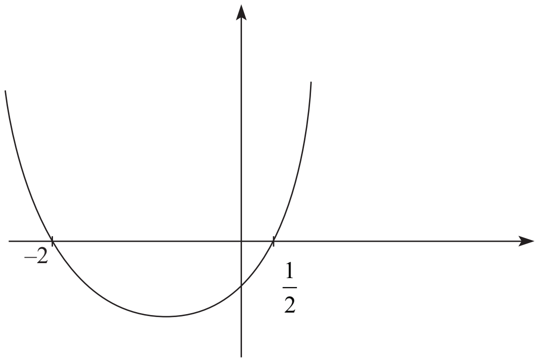
Resolução:

$$\frac{2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1}{\cos x - 1} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1 > 0 & (1) \\ \cos x \neq 1 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo **(1):**

$2\text{sen}^2 x + \text{sen}x - 1 > 0$

Como o gráfico de $f(x) = 2x^2 + x - 1$ é




Desta forma devemos ter $\text{sen}(x) < -2$ ou $\text{sen}(x) > \dfrac{1}{2}$.

- $\text{sen}(x) < -2$ é impossível
- $\text{sen}(x) > \dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$.

Resolvendo **(2):**

$\cos(x) \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$ e $x \neq 2\pi$

Resolvendo $\text{tg}(x) + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}\,\cot g(x)\right) \cdot \cot g(x)$:

$$\text{tg}(x) + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\text{tg}(x)}\right) \cdot \text{cotg}(x)$$

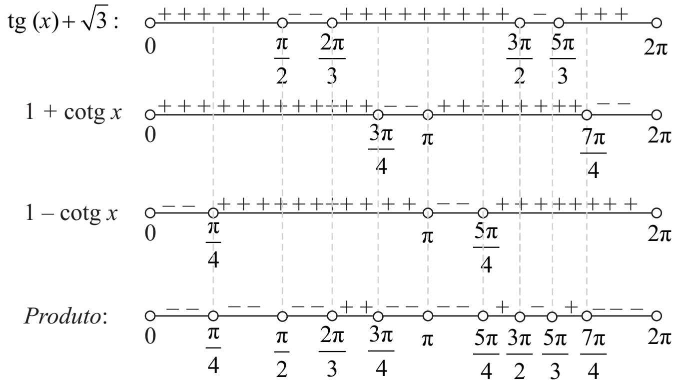
$$\text{tg}(x) + \sqrt{3} < \left(\frac{\text{tg}(x) + \sqrt{3}}{\text{tg}(x)}\right) \cdot \text{cotg}(x)$$

$$\text{tg}x + \sqrt{3} < \left(\text{tg}(x) + \sqrt{3}\right)\text{cotg}^2 x$$

$$\left(\text{tg}(x) + \sqrt{3}\right)\left(1 - \text{cotg}^2 x\right) < 0$$

$$\left(\text{tg}(x) + \sqrt{3}\right)\left(1 + \text{cotg}x\right)\left(1 - \text{cotg}x\right) < 0$$

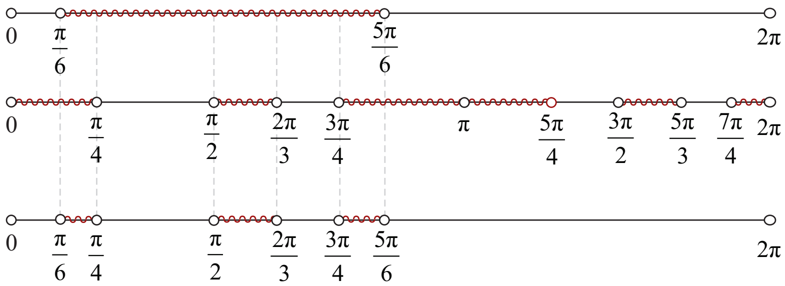
Desta forma é necessário fazer o estudo do sinal de cada fator e o produto.




Desta forma a solução para $\left(\text{tg}x+\sqrt{3}\right)(1+\text{cotg}x)(1-\text{cotg}x)<0$

é $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)\cup\left(\pi,\frac{5\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{7\pi}{3},2\pi\right)$

Fazendo a interseção entre as soluções das duas inequações, temos:



Portanto o conjunto de todos os valores de $x$ que satisfazem simultaneamente as inequações é:

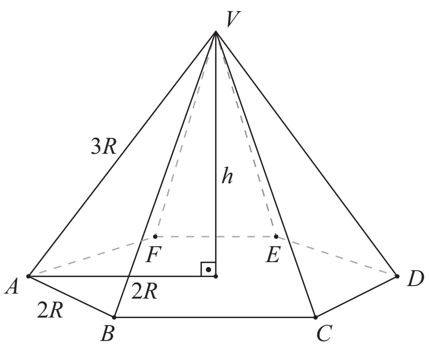
$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right).$

## Questão 28

Seis esferas de mesmo raio $R$ são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

**Resolução:**

O sólido formado pelos centros das 7 esferas será uma pirâmide hexagonal.




$$(3R)^2=\left(2R^2\right)+h^2$$
$$h^2=5R^2$$
$$h=R\sqrt{5}$$

Assim a distância será $R\sqrt{5}+R=R\left(\sqrt{5}+1\right)$

## Questão 29

Três circunferências $C_1$, $C_2$ e $C_3$ são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios $r_1$, $r_2$ e $r_3$ destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{3}$. A soma dos comprimentos de $C_1$, $C_2$ e $C_3$ é igual a $26\pi$ cm. Determine:

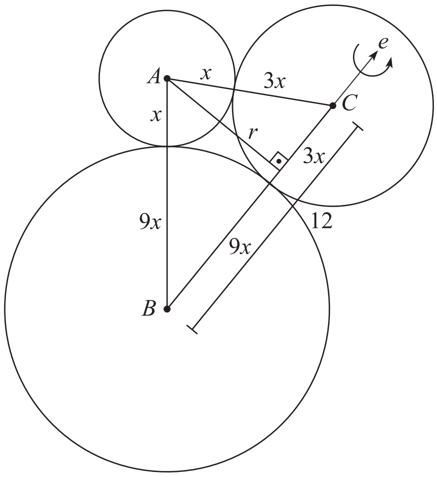
a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de $C_1$, $C_2$ e $C_3$.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

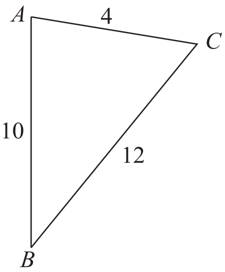
---

Resolução:

Os raios podem ser denominados $x$ , $3x$ e $9x$ do menos para o maior.




$$2\pi r_1 + 2\pi r_2 + 2\pi r_3 = 26\pi$$
$$r_1 + r_2 + r_3 = 13$$
$$x(1+3+9) = 13$$
$$x = 1$$




a) Como o perímetro $2p = 26,\ p = 13$

Fazendo Heron teremos $S = \sqrt{13 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 9} = 3\sqrt{39}\ \text{cm}^2$

b) Como $S = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot r}{2} = 3\sqrt{39}$ , $r = \frac{3\sqrt{39}}{6} = \frac{\sqrt{39}}{2}$

Após a rotação teremos dois cones, usando *Pappus Guldin* fica $V = 2\pi s d = 2\pi s \frac{r}{3} = 2\pi \cdot 3\sqrt{39} \cdot \frac{\sqrt{39}}{6} = 39\pi\ \text{cm}^3$

## Questão 30

Um cilindro reto de altura $h = 1$ cm tem sua base no plano $xy$ definida por

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 \le 0.$$

Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

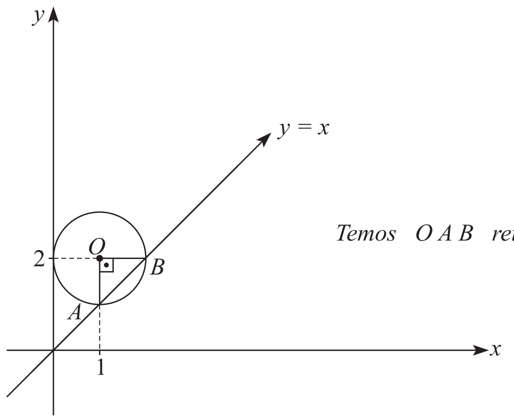
---

Resolução:

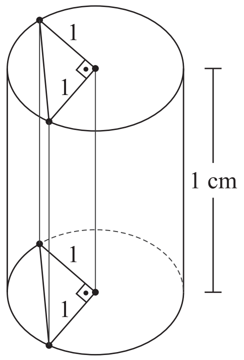
No plano $xy$ temos

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) \le 1$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 \le 1^2$ , centro $= (1, 2)$ , raio $= 1$




*Temos $OAB$ retângulo*




Como a área lateral do cilindro é $2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 1 \cdot 1 = 2\pi$

No menor sólido teremos $\frac{1}{4}$ da superfície lateral, um retângulo e 2 segmentos circulares.

Assim fica, $\frac{2\pi}{4} + \sqrt{2} \cdot 1 + 2 \cdot \left( \frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{1^2}{2} \right)$

$\frac{\pi}{2} + \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} - 1 = \pi + \sqrt{2} - 1$

**Matemática**
Douglas
Lafayette
Manim
Ney
Ronney
Salviano
Toshio

**Colaboradores**
Aline Alkmin
Fernanda Chaveiro
Moisés Humberto

**Digitação e Diagramação**
Daniel Alves
João Paulo
Márcia Santana
Valdivina Pinheiro

**Desenhistas**
Luciano Lisboa
Rodrigo Ramos
Vinicius Ribeiro

**Projeto Gráfico**
Vinicius Ribeiro

**Assistente Editorial**
Valdivina Pinheiro

**Supervisão Editorial**
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes



*A **Resolução Comentada** das provas do ITA poderá ser obtida diretamente no*

***OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777***

***As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.***

**www.grupoolimpo.com.br**

opirus
EDITORA

olimpo