2013 ITA

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$: conjunto dos números inteiros
$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais
$\mathrm{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m\times n$
$\det(M)$: determinante da matriz M
M^t transposta da matriz M
$A\,|\,B: \{x : x\in A \text{ e } x\notin B\}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n : a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k,\ k\in\mathbb{N}$

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos
i: unidade imaginária, $i^2=-1$
$|z|$: módulo do número $z\in\mathbb{C}$
$\mathrm{Re}\,z$: parte real do número $z\in\mathbb{C}$
$[a,b]: \{x\in\mathbb{R}; a\le x\le b\}$
$[a,b[\, : \{x\in\mathbb{R}; a\le x< b\}$
$]a,b[\, : \{x\in\mathbb{R}; a< x< b\}$
$\sum_{n=0}^{k} a_n : a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ k\in\mathbb{N}$

$\mathrm{Arg}\,z$: argumento principal de $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\mathrm{Arg}\,z\in[0,2\pi[$
A^C: conjunto (evento) complementar do conjunto (evento) A
$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B
$A\hat{B}C$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, com vértice no ponto B.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:
I. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;
II. $(A\cap C)\setminus B = A\cap B^C\cap C$;
III. $(A\setminus B)\cap(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$;

é(são) verdadeira(s)
A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas I e II.
D) apenas I e III.
E) todas.

Resolução:

Se $x \in A \setminus (B \cap C)$, então $x \in A$ e $x \notin (B \cap C)$.

(V) I. Como $A = (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \cup (A \cap (B \cap C))$,

segue que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, logo $A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Se $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, então $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$,

logo $x \in A$ e $x \notin B$ ou $x \in A$ e $x \notin C$, portanto $x \in A \setminus (B \cap C)$,

ou seja $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C)$.

Destas duas conclusões, segue que:

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(V) II. Se $x \in (A \cap C) \setminus B$, então $x \in A \cap C$ e $x \notin B$,

logo $x \in (A \cap C)$ e $x \in B^C$, ou seja $x \in A \cap B^C \cap C$, daí:

$(A \cap C) \setminus B \subset A \cap B^C \cap C$

Se $x \in A \cap B^C \cap C$, então $x \in A \cap C$ e $x \in B^C$, que é equivalente à: $x \in A \cap C$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in (A \cap C) \setminus B$, daí:

$A \cap B^C \cap C \subset (A \cap C) \setminus B$.

Destes dois resultados, temos:

$A \cap B^C \cap C = (A \cap C) \setminus B$

(F) III Se $x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus C)$, então $x \in A \setminus B$ e $x \in B \setminus C$, ou seja $x \in A$ e $x \notin B$,

juntamente com $x \in B$ e $x \notin C$, o que é uma contradição,

logo $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = \varnothing$.

A relação de inclusão $(A \setminus B) \setminus C \subset (A \setminus B) \cap (B \setminus C)$ só seria verdadeira se $A = \varnothing$.

Como nada pode ser dito sobre A o item é falso.

Alternativa C

Questão 02

A soma das raízes da equação em $\mathbb{C}$, $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$, tais que $z - |z| = 0$, é

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Resolução:

$$z^8 - 17z^4 + 16 = 0$$

$$z^4 = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow z^4 = \frac{17 \pm 15}{2}$$

$$\therefore z^4 = 1 \text{ ou } z^4 = 16$$

$$z^4 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \text{ ou } z = \pm i$$

$$z^4 = 16 \Rightarrow z = \pm 2 \text{ ou } z = \pm 2i$$

Das raízes listadas acima, as que satisfazem $z - |z| = 0$ são $z = 1$ ou $z = 2$.

A soma delas é 3.

Alternativa C

Questão 03

Considere a equação em $\mathbb{C}$, $(z-5+3i)^4 = 1$. Se z_0 é a solução que apresenta o menor argumento principal dentre as quatro soluções, então o valor de $|z_0|$ é

A) $\sqrt{29}$.
B) $\sqrt{41}$.
C) $3\sqrt{5}$.
D) $4\sqrt{3}$.
E) $3\sqrt{6}$.

Resolução:

Como

$(z-5+3i)^4 = 1 \Rightarrow z-5+3i = \pm 1$ ou $z-5+3i = \pm i$

Logo as raízes serão:

$z_1 = 6-3i$, $z_2 = 4-3i$, $z_3 = 5-2i$ e $z_4 = 5-4i$

Como todas as raízes se encontram no 4° quadrante, a raiz que possui o menor argumento principal será aquela que tiver a menor razão $\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}$:

z_1	z_2	z_3	z_4
$\frac{-3}{6}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-4}{5}$
$-0{,}5$	$-0{,}75$	$-0{,}4$	$-0{,}8$

Logo é o z_4, cujo módulo é

$|z_4| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$

Alternativa B

Questão 04

A soma de todos os números reais x que satisfazem a equação

$$8^{\sqrt{x+1}} + 44\left(2^{\sqrt{x+1}}\right) + 64 = 19\left(4^{\sqrt{x+1}}\right)$$

é igual a

A) 8
B) 12
C) 16
D) 18
E) 20

Resolução:

Como $\sqrt{x+1} \in \mathbb{R}$, temos $x+1 \geq 0$, $x \geq -1$

Reescrevendo, fica

$\left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^3 + 44 \cdot 2^{\sqrt{x+1}} + 64 = 19 \cdot \left(2^{\sqrt{x+1}}\right)^2$, e fazendo $2^{\sqrt{x+1}} = A$, teremos $A^3 + 44A + 64 = 19A^2$

$A^3 - 19A^2 + 44A + 64 = 0$, pelo teorema das raízes racionais encontramos $A = 4$.

Reduzindo o grau:

4	1	-19	44	64
	1	-15	-16	0

Logo fatorando fica

$(A-4)(A^2-15A-16)=0$

Então $A=-1$ ou $A=4$ ou $A=16$

Regressando à variável original:

$A=-1$	$A=4$	$A=16$
$2^{\sqrt{x+1}}=-1$,	$2^{\sqrt{x+1}}=2^2$,	$2^{\sqrt{x+1}}=2^4$,
$\nexists\, x\in\mathbb{R}$	$\sqrt{x+1}=2$	$\sqrt{x+1}=4$
	$x+1=4$	$x+1=16$
	$x=3$	$x=15$

A soma das soluções é: $3+15=18$

Alternativa D

Questão 05

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$\sqrt{a\sqrt{b}}=\dfrac{1}{2}$ e $\ln\left(a^2+b\right)+\ln 8=\ln 5$,

um possível valor de $\dfrac{a}{b}$ é

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
B) 1.
C) $\sqrt{2}$.
D) 2.
E) $3\sqrt{2}$.

Resolução:

$$\sqrt{a\sqrt{b}}=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2b=\frac{1}{16}$$

$$\ln\left(a^2+b\right)=\ln 5-\ln 8\ \Rightarrow\ \ln\left(a^2+b\right)=\ln\left(\frac{5}{8}\right)\Rightarrow a^2+b=\frac{5}{8}$$

Fazendo a mudança de variáveis $a^2=x$ e $b=y$.

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{8} \\ xy=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema simétrico obtemos:

I) $x=\dfrac{1}{2}$ e $y=\dfrac{1}{8}$

Assim $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $b=\dfrac{1}{8}$

Logo $\dfrac{a}{b}=4\sqrt{2}$

II) $x=\dfrac{1}{8}$ e $y=\dfrac{1}{2}$

$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $b=\dfrac{1}{2}$

Logo $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Alternativa A

Questão 06

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por

$$f(x)=e^{x^2+ax+b} \text{ e } g(x)=\ln\left(\frac{ax}{3b}\right),$$

em que a e b são números reais. Se $f(-1)=1=f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta $g\circ f$ que

A) $g\circ f(1)=\ln 3$.

B) $\nexists\ g\circ f(0)$.

C) $g\circ f$ nunca se anula.

D) $g\circ f$ está definida apenas em $\{x\in\mathbb{R} : x>0\}$.

E) $g\circ f$ admite dois zeros reais distintos.

Resolução:

$f(x)=e^{x^2+ax+b}$

$f(x)=1 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$

Assim, -1 e -2 são raízes de x^2+ax+b

$x^2+ax+b\equiv 1(x+1)(x+2)$

Então $a=3$ e $b=2$

Assim

$f(x)=e^{x^2+3x+2}$ e $g(x)=\ln\left(\frac{x}{2}\right)$

Segue

$$g\circ f(x)=\ln\left(\frac{e^{x^2+3x+2}}{2}\right)$$

$$g\circ f(x)=x^2+3x+2-\ln 2$$

Com domínio real.

Analisando o discriminante:

$\Delta=3^2-4\cdot 1\cdot(2-\ln 2)$

$\Delta=1+4\ln 2$ logo $\Delta>0$

Então $g\circ f$ admite duas raízes reais distintas.

Alternativa E

Questão 07

Considere funções f, g, $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Das afirmações:

I. Se f e g são injetoras, $f+g$ é injetora;

II. Se f e g são sobrejetoras, $f+g$ é sobrejetora;

III. Se f e g não são injetoras, $f+g$ não é injetora;

IV. Se f e g não são sobrejetoras, $f+g$ não é sobrejetora.

é(são) verdadeira(s)

A) nenhuma.

B) apenas I e II.

C) apenas I e III.

D) apenas III e IV.

E) todas.

Resolução:

I Falsa.

Sejam $f(x)=x+1$ e $g(x)=-x+1$

Então $(f+g)$ é constante e não injetora.

II Falsa pelo mesmo contra exemplo.

III Falsa.

Seja $f(x)=x^2+x$ e $g(x)=-x^2+x$

Nem f, nem g são injetoras.

Mas $(f+g)(x)=2x$, assim $(f+g)$ é injetora.

IV Falsa.

Novamente $f(x)=x^2+x$ e $g(x)=-x^2+x$, assim f e g não são sobrejetoras.

Mas $(f+g)(x)=2x$ que é sobrejetora.

Alternativa A

Questão 08

Seja $n>6$ um inteiro positivo não divisível por 6. Se, na divisão de n^2 por 6, o quociente é um número ímpar, então o resto da divisão de n por 6 é

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) 4.
E) 5.

Resolução:

Seja $n=6p+r$ com $1\le r\le 5$

Então $n^2=36p^2+12pr+r^2$

e $\dfrac{n^2}{6}=6p^2+2pr+\dfrac{r^2}{6}$

Como $6p^2+2pr$ é par, mas o quociente de n^2 por 6 é ímpar, segue que o quociente de r^2 por 6 é ímpar.

$r=1\Rightarrow\dfrac{r^2}{6}$ tem quociente 0

$r=2\Rightarrow\dfrac{r^2}{6}$ tem quociente 0

$r=3\Rightarrow\dfrac{r^2}{6}$ tem quociente 1

$r=4\Rightarrow\dfrac{r^2}{6}$ tem quociente 2

$r=5\Rightarrow\dfrac{r^2}{6}$ tem quociente 4

Logo, $r=3$

Alternativa C

Questão 09

Considere a equação $\sum_{n=0}^{5}a_nx^n=0$ em que a soma das raízes é igual a -2 e os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com $a_0=1$. Então $\sum_{n=0}^{5}a_n$ é igual a

A) -21.
B) $-\dfrac{2}{3}$.
C) $\dfrac{21}{32}$.
D) $\dfrac{63}{32}$.
E) 63.

Resolução:

Temos: $a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x_1+a_0=0$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ é uma P.G. e $a_0=1$

Pelas relações de Girard:

$-\dfrac{a_4}{a_5}=-2\ \therefore\ a_4=a_5\cdot 2$, logo $a_0q^4=2a_0q^5\ \therefore\ q=\dfrac{1}{2}$

Assim:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{a_0\left(q^n - 1\right)}{q - 1}$$

$$\sum_{n=0}^{5} a_n = \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{63}{32}$$

Alternativa D

Questão 10

Seja λ solução real da equação $\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17} = 12$. Então a soma das soluções z, com $\mathrm{Re}\, z > 0$, da equação $z^4 = \lambda - 32$, é

A) $\sqrt{2}$.

B) $2\sqrt{2}$.

C) $4\sqrt{2}$.

D) 4.

E) 16.

Resolução:

$$\left(\sqrt{\lambda + 9} + \sqrt{2\lambda + 17}\right)^2 = 12^2$$

$$\left(2\sqrt{(\lambda + 9)(2\lambda + 17)}\right)^2 = (118 - 3\lambda)^2$$

$$\lambda^2 - 848\lambda + 13312 = 0$$

$$\Delta = 816^2$$

$$\lambda = \frac{848 \pm 816}{2} = \begin{cases} \lambda' = 832 \\ \lambda'' = 16 \end{cases}$$

Apenas λ'' é solução real da equação dada.

Assim:

$z^4 = -16 \Rightarrow z = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i$ ou $z = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\, i$

As soluções cuja $\mathrm{Re}\, z > 0$ são

$z_1 = \sqrt{2} + \sqrt{2}\, i$ e $z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\, i$

$z_1 + z_2 = 2\sqrt{2}$

Alternativa B

Questão 11

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

A) $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

B) $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

C) $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

D) $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

E) $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Resolução:

$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(A \setminus B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

$P(A^C \cup B^C) = 1 - P(A \cap B)$

$P(A^C \cup B^C) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Alternativa E

Questão 12

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:
I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.
II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.
III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.
Pode-se afirmar que

A) dos três resultados, I é o mais provável.
B) dos três resultados, II é o mais provável.
C) dos três resultados, III é o mais provável.
D) os resultados I e II são igualmente prováveis.
E) os resultados II e III são igualmente prováveis.

Resolução:

I Probabilidade de duas caras:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

II Probabilidade de 3 caras e 1 coroa:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_{4,3} = \frac{1}{4}$

III Probabilidade de 5 caras e 3 coroas:

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot C_{8,5} = \frac{7}{32}$

Alternativa D

Questão 13

Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A^t AA^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

A) $\frac{1}{6}$.
B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$.
C) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.
D) 1.
E) $\sqrt{216}$.

Resolução:

Por Burt temos:

$\det(\alpha A^t \cdot A \cdot A^t) = \sqrt{6}\ \alpha^2$

$\det(\alpha A^t) \cdot \det A \cdot \det A^t = \sqrt{6}\ \alpha^2$

$\alpha^5 \cdot (\det A)^3 = \sqrt{6}\,\alpha^2$

Com $\alpha \neq 0$, fica

$\alpha^3 \cdot \left(\sqrt{6}\right)^3 = \sqrt{6} \cdot 1$

$\alpha^3 \cdot 6\sqrt{6} = \sqrt{6}$, $\alpha^3 = \dfrac{1}{6}$

$\alpha^3 = \dfrac{36}{6^3}$, $\alpha = \dfrac{\sqrt[3]{36}}{6}$

Alternativa C

Questão 14

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = \dfrac{1}{2}$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$;

é(são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas III.
C) apenas I e III.
D) apenas II e IV.
E) todas.

Resolução:

Primeiro vamos deixar a equação expressa através de uma única função trigonométrica:

$\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a$

$\left(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x\right)\left(\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x\right) + 4 \cdot \operatorname{sen}^6 x = a$

$\left(\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)^2 + \operatorname{sen}^4 x\right)\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right)\left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) + 4 \cdot \operatorname{sen}^6 x = a$

$\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}^4 x\right)\left(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x\right) + 4\operatorname{sen}^6 x = a$

$\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}^4 x\right)\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 x\right) + 4\operatorname{sen}^6 x = a$

$1 - 2\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen}^4 x + 2\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^6 x + 4\operatorname{sen}^6 x = a$

$6\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 1 = a$

(V)I Se $a = 0$, então:

$6\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

que é uma equação biquadrática em "$\operatorname{sen} x$", que não possui raízes reais.

$\therefore \quad n = 0$

(V)II Se $a = \dfrac{1}{2}$, então:

$6\operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x + 1 = \dfrac{1}{2}$

$12\operatorname{sen}^4 x - 8\operatorname{sen}^2 x + 1 = 0$

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{8 \pm \sqrt{16}}{24}$

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{8 \pm 4}{24}$

$\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ou $\operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{6}}$

$\therefore \quad n = 8$

(V)III Se $a = 1$, então:

$6\operatorname{sen}^4 x - 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x + 1 = 1$

$6\operatorname{sen}^4 x - 4 \cdot \operatorname{sen}^2 x = 0$

$$2\text{sen}^2x\left(3\text{sen}^2x-2\right)=0$$

$\text{sen}x=0$ ou $\text{sen}x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$\therefore\ n=7$

(V)IV Se $a=3$, então:

$$6\text{sen}^4-4\cdot\text{sen}^2x+1=3$$
$$6\text{sen}^4x-4\cdot\text{sen}^2x-2=0$$
$$3\text{sen}^4x-2\text{sen}^2x-1=0$$
$$\text{sen}^2x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{6}=\frac{2\pm4}{6}$$
$$\therefore\ \text{sen}^2x=1\Rightarrow\text{sen}x=\pm1$$
$$\therefore\ n=2$$

Alternativa E

Questão 15

Se $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, então um possível valor de $\dfrac{\text{cotg}\,x-1}{\text{cossec}\left(x-\pi\right)-\sec\left(\pi-x\right)}$ é

A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
B) 1.
C) $\sqrt{2}$.
D) $\sqrt{3}$.
E) 2.

Resolução:

Dado que $\cos 2x=\dfrac{1}{2}$, então

$$2x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad\Leftrightarrow\quad x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi$$

Como $\cos x\neq 0$ e $\text{sen}x\neq 0$, temos

$$\cos\sec(x-\pi)=\frac{1}{\text{sen}\left(x-\pi\right)}=\frac{-1}{\text{sen}\left(\pi-x\right)}=\frac{1}{\text{sen}x}$$

$$\sec\left(\pi-x\right)=\frac{1}{\cos\left(\pi-x\right)}=\frac{-1}{\cos x}$$

Assim:

$$\frac{\cot\text{g}\ x-1}{\cos\sec(x-\pi)-\sec\left(\pi-x\right)}=\frac{\dfrac{\cos x}{\text{sen}x}-1}{-\dfrac{1}{\text{sen}x}+\dfrac{1}{\cos x}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos x-\text{sen}x}{\text{sen}x}}{\dfrac{-\cos x+\text{sen}x}{\text{sen}x\cos x}}=-\cos x$$

Dentre as alternativas o único valor possível para $-\cos x$ é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, que ocorre para $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

Alternativa A

Questão 16

Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

A) $\frac{1}{2}A\hat{B}C.$

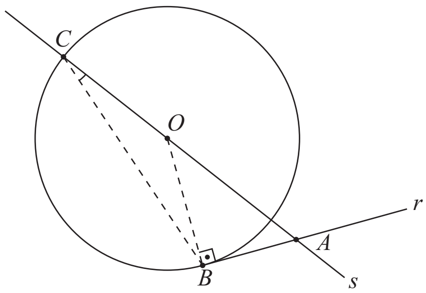
B) $\frac{3}{2}\pi - 2A\hat{B}C.$

C) $\frac{2}{3}A\hat{B}C.$

D) $2\ A\hat{B}C - \pi.$

E) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}.$

Resolução:



O triângulo BOC é isósceles, assim:

$B\hat{C}O \equiv O\hat{B}C$

$$\begin{cases} C\hat{A}B + B\hat{C}O + A\hat{B}C = \pi \\ O\hat{B}C + \frac{\pi}{2} = A\hat{B}C \end{cases}$$

$$C\hat{A}B = \pi - \left(B\hat{C}O + A\hat{B}C\right)$$

$$C\hat{A}B = \pi - \left(A\hat{B}C - \frac{\pi}{2} + A\hat{B}C\right)$$

$$C\hat{A}B = \frac{3\pi}{2} - 2A\hat{B}C$$

Alternativa B

Questão 17

Sobre a parábola definida pela equação $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ pode-se afirmar que

A) ela não admite reta tangente paralela ao eixo Ox.

B) ela admite apenas uma reta tangente paralela ao eixo Ox.

C) ela admite duas retas tangentes paralela ao eixo Ox.

D) a abscissa do vértice da parábola é $x = -1$.

E) a abscissa do vértice da parábola é $x = -\frac{2}{3}$.

Resolução:

Reta paralela ao eixo x será $y = A$

Logo $x^2 + 2xA + A^2 - 2x + 4A + 1 = 0$

$x^2 + (2A - 2)x + A^2 + 4A + 1 = 0$

Como queremos uma reta tangente, essa equação deve ter solução única, portanto:

$\Delta = 0$

$\Delta = 4(A-1)^2 - 4\left(A^2 + 4A + 1\right) = 0$

$\Delta = 4A^2 - 8A + 4 - 4A^2 - 16A - 4 = 0$

$-24A = 0$, $A = 0$

Logo $y = 0$ é a única reta tangente.

Alternativa B

Questão 18

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são correntes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reservas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

A) III.

B) I e III.

C) II e III.

D) III e IV.

E) I e II e IV.

Resolução:

I. Falsa, pois elas podem ser paralelas.

II. Falsa, pois retas paralelas não têm ponto em comum e são coplanares.

III. Verdadeira.

IV. Verdadeira.

Alternativa D

Questão 19

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e $5\,\text{cm}$. O volume, em cm^3, do sólido $VABC$ é

A) 2

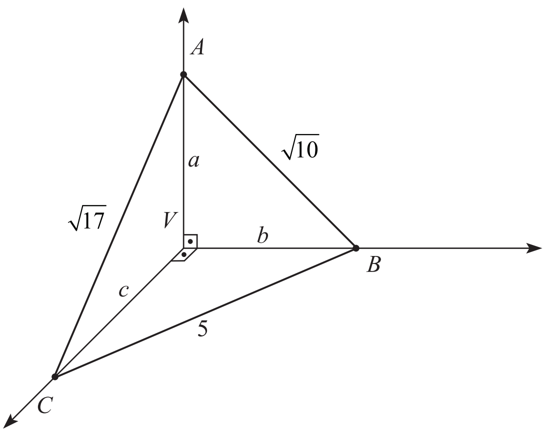
B) 4

C) $\sqrt{17}$

D) 6

E) $5\sqrt{10}$

Resolução:



Como $\begin{cases} a^2+b^2=10 \\ b^2+c^2=25 \\ a^2+c^2=17 \end{cases}$

Somando as equações:

$2\left(a^2+b^2+c^2\right)=52$

$a^2+b^2+c^2=26$

$a^2+25=26 \Rightarrow a=1$

$b^2+17=26 \Rightarrow b=3$

$c^2+10=26 \Rightarrow c=4$

Logo seu volume será $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{bc}{2}\cdot a=\frac{1\cdot 3\cdot 4}{6}$

$V=2\text{cm}^3$

Alternativa A

Questão 20

No sistema xOy os pontos $A=(2,0)$, $B=(2,5)$ e $C=(0,1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, razão $\dfrac{\text{volume}}{\text{área total da superfície}}$, em unidade de comprimento, é igual a

A) 1

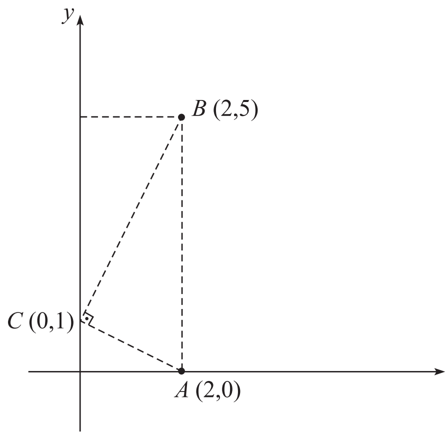
B) $\dfrac{100}{105}$

C) $\dfrac{10}{11}$

D) $\dfrac{100}{115}$

E) $\dfrac{5}{6}$

Resolução:



Como:

$(d_{AB})^2=(d_{AC})^2+(d_{BC})^2$, o triângulo ABC é retângulo em C.

Assim, o raio da base do cilindro é:

$R=\dfrac{d_{AB}}{2}$

$R=\dfrac{5}{2}$

$$\frac{\text{Volume}}{\text{Área total}}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2\cdot 8}{2\pi\cdot\frac{5}{2}\cdot 8+2\pi\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{100}{105}$$

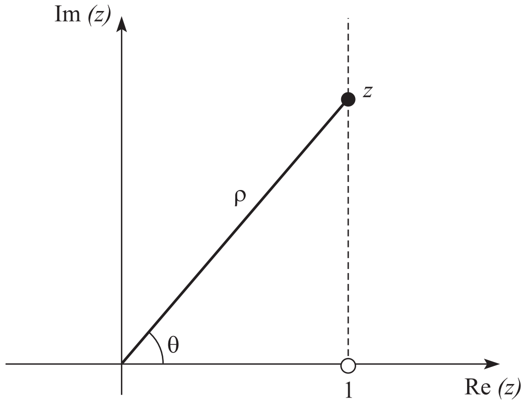
Alternativa B

Questão 21

Para $z=1+iy$, $y>0$, determine todos os pares (a,y), $a>1$, tais que $z^{10}=a$. Escreva a e y em função de $\operatorname{Arg} z$.

Resolução:

Do enunciado, o afixo de z pertence à semi reta tracejada:



Assim, $z = \rho(\cos\theta + i \cdot \text{sen}\,\theta)$, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Segue $z^{10} = \rho^{10}(\cos 10\theta + i\,\text{sen}\,10\theta)$ com $10\theta \in]0, 5\pi[$.

O problema de obter (a, y) tal que $z^{10} = a$, com $a > 1$, deve ser entendido como $\cos(10\theta) = 1$ e $\text{sen}(10\theta) = 0$.

Assim

$10\theta = 2\pi$ ou $10\theta = 4\pi$

$\theta = \frac{\pi}{5}$ ou $\theta = \frac{2\pi}{5}$

Para $\theta = \frac{\pi}{5}$:

$\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1}{\rho_1} \Rightarrow \rho_1 = \sec\frac{\pi}{5}$

$z_1 = \sec\left(\frac{\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{5}\right) \Rightarrow y_1 = \text{tg}\frac{\pi}{5}$

$a_1 = \left(\sec\frac{\pi}{5}\right)^{10}$

Para $\theta = \frac{2\pi}{5}$

$\rho_2 = \sec\frac{2\pi}{5}$

$z_2 = \sec\left(\frac{2\pi}{5}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{5}\right) \Rightarrow y_2 = \text{tg}\frac{2\pi}{5}$

$a_2 = \left(\sec\frac{2\pi}{5}\right)^{10}$

Logo, os pares pedidos são:

$\left(\left(\sec\frac{\pi}{5}\right)^{10}, \text{tg}\frac{\pi}{5}\right)$ e $\left(\left(\sec\frac{2\pi}{5}\right)^{10}, \text{tg}\frac{2\pi}{5}\right)$

Questão 22

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função

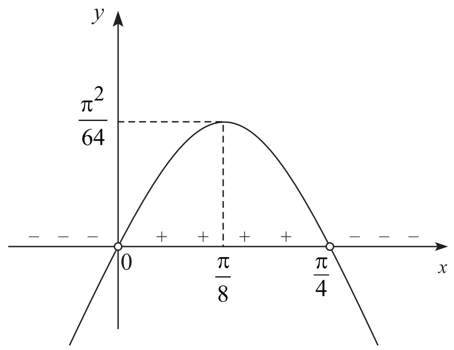
$$f : D \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}(4\,\text{sen}\,x\,\cos x - 1)$$

Resolução:

Logaritmando e base devem ser positivos:

Base: $x \cdot \left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$ e $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1$

Estudo do sinal:



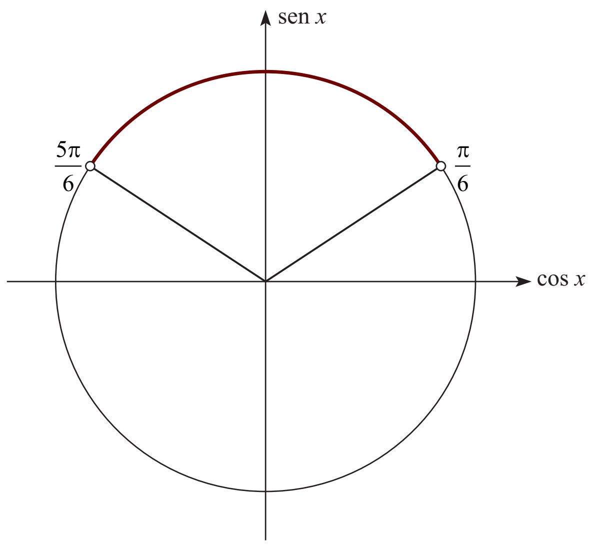
Logo, $x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)>0 \Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{4}$ (I)

Logaritmando: $4\,\text{sen}\,x\cos x-1>0$

$$2\,\text{sen}(2x)-1>0$$

$$\text{sen}(2x)>\frac{1}{2}$$

De (I) basta resolver a inequação na primeira volta.



$\frac{\pi}{6}<2x<\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$ (II)

Obedecendo às condições I e II temos

$$D=\left]\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right[$$

Questão 23

Considere o polinômio $P(m)=am^2-3m-18$, em que $a\in\mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x, $x^3+mx^2+(m+4)x+5=0$, estejam no intervalo $]-2,2[$.

Resolução:

A soma das raízes de P é 3: $\frac{3}{a}=3\Rightarrow a=1$.

Logo $P(m)=m^2-3m-18$

cuja raízes são $m'=-3$ e $m''=6$

Para $m=-3$ a equação dada se reduz a:

$x^3-3x^2+x+5=0$

Seja $L(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$.

Tem-se $L(-2) = -17$ e $L(2) = 3$.

Como $L(-2) < 0$ e $L(2) > 0$, existe um número ímpar de raízes reais no intervalo $[-2, 2]$. (Teorema de Bolzano).

Logo $m = -3$ não convém.

Para $m = 6$ a equação dada se reduz a:

$x^3 + 6x^2 + 10x + 5 = 0$

Por inspeção, $x = -1$ é raiz. Reduzindo o grau:

$$\begin{array}{r|rrr|r} -1 & 1 & 6 & 10 & 5 \\ \hline & 1 & 5 & 5 & 0 \end{array}$$

As outras raízes são raízes de $x^2 + 5x + 5 = 0$

$$x_1 = \frac{-5+\sqrt{5}}{2} \qquad \in \left]-2, 2\right[$$

$$x_2 = \frac{-5-\sqrt{5}}{2} \qquad \notin \left]-2, 2\right[$$

Logo $m = 6$ é a raiz pedida de P.

Questão 24

Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Resolução:

Considerando as cores c_1, c_2, c_3 e c_4.

I) Todas as faces da mesma cor:
4 casos

II) Usando exatamente duas cores:
$$\underbrace{C_{4,2}}_{\substack{\text{Escolha}\\\text{das}\\\text{cores}}} \cdot \underbrace{3 \text{ casos}}_{\substack{\text{2 faces de uma}\\\text{cor e duas faces}\\\text{da outra ou 3}\\\text{faces de uma cor}\\\text{e 1 da outra, sendo}\\\text{que na última opção}\\\text{podemos mudar a cor}\\\text{mais utilizada.}}} = 6 \cdot 3 \text{ casos} = 18 \text{ casos}$$

III) Usando exatamente três cores:
$$\underbrace{C_{4,3}}_{\substack{\text{Escolha}\\\text{das}\\\text{cores}}} \cdot \underbrace{C_{3,1}}_{\substack{\text{Escolha}\\\text{da}\\\text{cor}\\\text{que}\\\text{repete}}} \cdot \underbrace{1 \text{ caso}}_{\substack{\text{uma vez escolhidas}\\\text{escolhidas as cores}\\\text{é única a forma de pintar}}} = 4 \cdot 3 \cdot 1 \text{ casos} = 12 \text{ casos}$$

IV) Usando as quatro cores:
Tomemos a cor c_1 para a base. Nas outras três faces teremos uma permutação circular das três cores restantes.
$PC_3 \ casos = 2 \ casos$.

Do exposto, teremos um total de
$4 + 18 + 12 + 2 \ casos$
$36 \ casos$

Questão 25

Considere o sistema na variável real x:

$$\begin{cases} x^2 - x = \alpha \\ x - x^3 = \beta \end{cases}$$

(a) Determine os números reais α e β para que o sistema admita somente a soluções reais.

(b) Para cada valor de β encontrado em (a), determine todas as soluções da equação $x - x^3 = \beta$

Resolução:
O sistema deve ter solução, e ela deve ser real.
Para $x^2 - x - \alpha = 0$ admitir somente raiz real,

$$\Delta \geq 0$$
$$1 + 4\alpha \geq 0$$
$$\alpha \geq -\frac{1}{4}$$

Dado $\alpha \geq -\frac{1}{4}$, o sistema pode admitir uma ou duas soluções, dentre:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{4\alpha + 1}}{2} \text{ e } x_2 = \frac{1 - \sqrt{4\alpha + 1}}{2}$$

Para cada uma das soluções comuns podemos determinar β em função de α:

$$\beta_1 = x_1 - x_1^3 \qquad \beta_2 = x_2 - x_2^3$$
$$\beta_1 = \frac{-3\alpha - \alpha\sqrt{4\alpha + 1}}{2} \qquad \beta_2 = \frac{-3\alpha + \alpha\sqrt{4\alpha + 1}}{2}$$

Para que todas as soluções da primeira equação sejam soluções da segunda $\beta_1 = \beta_2$:

$$\frac{-3\alpha - \alpha\sqrt{4\alpha + 1}}{2} = \frac{-3\alpha + \alpha\sqrt{4\alpha + 1}}{2}$$
$$\alpha\sqrt{4\alpha + 1} = 0$$
$$\alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{4}$$

Para $\alpha = 0$ segue $\beta = 0$ e o sistema admite a solução $S = \{0, 1\}$.
Para $\alpha = -\frac{1}{4}$ segue $\beta = \frac{3}{8}$ e o sistema admite a solução $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
Com isso (α, β) pode ser $(0,0)$ ou $\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$.
Podemos, ainda, admitir que apenas uma raiz da primeira equação seja raiz da segunda, neste caso, basta tomar $\beta = \beta_1$ ou $\beta = \beta_2$ como definidos acima.
Logo, existem infinitos pares de números reais que fazem o sistema admitir somente soluções reais:

$$(\alpha, \beta) = \left(\alpha, \frac{-3\alpha - \alpha\sqrt{4\alpha + 1}}{2}\right) \text{ ou } (\alpha, \beta) = \left(\alpha, \frac{-3\alpha + \alpha\sqrt{4\alpha + 1}}{2}\right), \text{ com } \alpha \geq -\frac{1}{4}.$$

Sendo que para $\alpha = 0$ ou $\alpha = -\frac{1}{4}$ obtemos os casos particulares $(\alpha, \beta) = (0,0)$ e $(\alpha, \beta) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right)$ descritos anteriormente.

b) Para a solução "x" do sistema, tem-se:

$$x^2 - x = \alpha$$
$$x^2 = \alpha + x$$

Substituindo na segunda equação:

$$x - x(x^2) = \beta$$
$$x - x(\alpha + x) = \beta$$
$$x - \alpha x - x^2 = \beta$$
$$x - \alpha x - (\alpha + x) = \beta$$
$$x = -\frac{(\alpha + \beta)}{\alpha} \text{ é raiz.}$$

Redução de grau:

$$\begin{array}{c|cccc|}
-\frac{\alpha+\beta}{\alpha} & 1 & 0 & -1 & \beta \\
\hline
 & 1 & -\frac{\alpha+\beta}{\alpha} & \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2 - 1 &
\end{array}$$

$$x^2 - \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right)x + \left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha}\right)^2 - 1 = 0$$

Logo as outras raízes são:

$$x=\frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2-4\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2-1\right]}}{2}$$

Logo $x=\dfrac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\pm\sqrt{4-3\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2}}{2}$

$$S=\left\{-\frac{(\alpha+\beta)}{\alpha},\ \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}+\sqrt{4-3\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}-\sqrt{4-3\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right)^2}\right)\right\}$$

Questão 26

Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x\,\text{sen}\,\alpha+3y\cos\alpha=a \\ x\cos\alpha+y\,\text{sen}\,\alpha=b, \end{cases}$$

com $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ e a, $b\in\mathbb{R}$. Analise para que valores α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto solução.

Resolução:

Analisando o determinante do sistema:

$$D=\begin{vmatrix}\text{sen}\alpha & 3\cos\alpha \\ \cos\alpha & \text{sen}\alpha\end{vmatrix}\Rightarrow D=\text{sen}^2\alpha-3\cos^2\alpha$$

$i)$ Para o sistema ser possível e determinado é necessário e suficiente que $D\neq 0$

$\text{sen}^2\alpha-3\cos^2\alpha\neq 0$

$\text{tg}^2\alpha\neq 3\Rightarrow \text{tg}\alpha\neq\sqrt{3}$ e $\text{tg}\alpha\neq-\sqrt{3}$

Como $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ segue $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$

Logo o sistema é possível determinado para $\alpha\neq\frac{\pi}{3}$, $\forall a,b\in IR$.

$ii)$ Para o sistema ser possível e indeterminado é necessário $D=0$:

$D=0\Rightarrow \text{tg}\alpha=\sqrt{3}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$

O sistema se torna:

$$S1\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}y=a \\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=b\end{cases}$$

Como o sistema admite infinitas soluções, as retas descritas pelas duas equações são coincidentes e uma equação é múltipla da outra.

Logo, $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}\Rightarrow a=b\sqrt{3}.$

O sistema será indeterminado para: $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $a=b\sqrt{3}$, $\forall b\in IR$.

$iii)$ Para o sistema ser impossível as equações do sistema $S1$ devem representar retas paralelas distintas.

Assim, $a\neq b\sqrt{3}$, $\forall b\in IR$ e $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Resolvendo para o caso $i)$ pelo Teorema de Cramer:

$Dx=\begin{vmatrix}a & \text{sen}\alpha \\ b & \cos\alpha\end{vmatrix}$ e $Dy=\begin{vmatrix}\text{sen}\alpha & a \\ \cos\alpha & b\end{vmatrix}$

$$x=\frac{Dx}{D}=\frac{a\cos\alpha-b\,\text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha-3\cos^2\alpha}$$

$$y=\frac{Dy}{D}=\frac{b\,\text{sen}\alpha-a\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha-3\cos^2\alpha}$$

$$S=\left\{\left(\frac{a\cos\alpha-b\,\text{sen}\alpha}{\text{sen}^2\alpha-3\cos^2\alpha},\ \frac{b\,\text{sen}\alpha-a\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha-3\cos^2\alpha}\right)\right\}$$

Para o caso $ii)$ despreza-se uma equação de $S1$

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=b\ \Rightarrow\ x=2b-\sqrt{3}y$$

A solução é $S=\left\{\left(2b-\sqrt{3}y,\ y\right),\ y\in IR\right\}$

e nas condições anteriormente estabelecidas para a e b.

Questão 27

Encontre os pares $(\alpha,\ \beta)\in\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[\times\left]0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$$(\text{tg}\,\alpha+\text{cotg}\,\alpha)\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1 \text{ e } \sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}.$$

Resolução:

$$\begin{cases}\sqrt{3}\,\text{sen}(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}\\(\text{tg}\,\alpha+\cot\beta)\cdot\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\beta}\right)\cdot\cos\alpha\cdot\text{sen}\,\beta-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{sen}\frac{\pi}{3}\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)+\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{(\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta+\cos\alpha\cos\beta)}{\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta}\cdot\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(\alpha+\beta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\\\cos(\alpha-\beta)-2\cos^2(\alpha-\beta)=-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi\\2\cos^2(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)+1=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\\cos(\alpha-\beta)=1 \text{ ou } \cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Como $(\alpha,\ \beta)\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

então $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}$ não tem solução, e o sistema se reduz a

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\ \ (\text{I}) \text{ ou } \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}\ \ (\text{II})\\\alpha-\beta=0\ \ (\text{III})\end{cases}$$

De (I) e (III), vem $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$

De (II) e (III), vem $\alpha=\beta=\frac{\pi}{12}$

Assim, as soluções são $(\alpha,\beta)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ e $(\alpha,\beta)=\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right)$

Questão 28

Determine a área da figura plana situada no primeiro quadrante e delimitada pelas curvas $(y-x-2)\left(y+\frac{x}{2}-2\right)=0$ e $x^2-2x+y^2-8=0$.

Resolução:

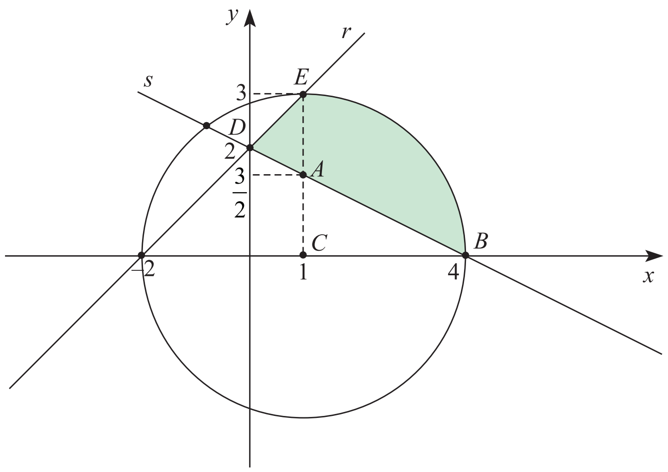
$x^2-2x+y^2-8=0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2=9$

Circunferência de centro $C=(1, 0)$ e raio $R=3$

A equação $(y-x-z)\left(y+\frac{x}{2}-2\right)=0$ conduz ao par de retas

$r: y=x-2$ e $s: y=-\frac{x}{2}+2$

Representando graficamente



$A \in s$

$y_A=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

$\therefore \ A=\left(1, \frac{3}{2}\right)$

Seja S a área hachurada pedida:

$S=A_{setor\,CBE}-A_{\Delta ABC}+A_{\Delta ADE}$

$S=\frac{1}{4}\pi\cdot 3^2-\frac{3\cdot\frac{3}{2}}{2}+\frac{\frac{3}{2}\cdot 1}{2}$

$S=\frac{9\pi}{4}-\frac{9}{4}+\frac{3}{4}$

$S=\frac{9\pi-6}{4}$

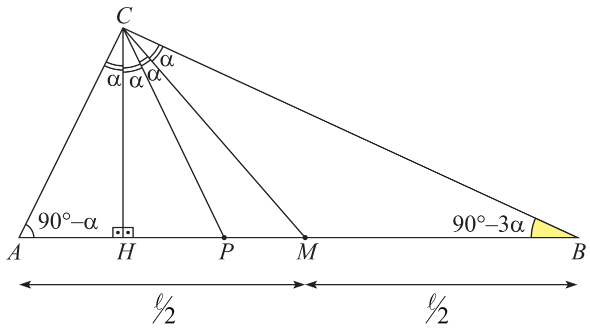
Questão 29

Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se ℓ é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

(a) A medida da mediana em função de ℓ.

(b) Os ângulos $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

Resolução:



Considere a figura acima em que $\overline{CH}$ é altura, $\overline{CP}$ é bissetriz e $\overline{CM}$ é mediana, que dividem o ângulo C e em quatro ângulos iguais.
Aplicando a lei dos senos no ΔACM, temos:

$$\frac{CM}{\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)}=\frac{AM}{\operatorname{sen}3\alpha}$$

Como $AM=\frac{\ell}{2}$ e $\operatorname{sen}(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$, temos:

$$CM=\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha} \qquad \text{(I)}$$

Analogamente, aplicando a lei dos senos no ΔBCM, vem:

$$\frac{CM}{\operatorname{sen}(90^\circ-3\alpha)}=\frac{BM}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$CM=\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\cos3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \qquad \text{(II)}$$

Igualando (I) e (II), temos:

$$\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha}=\frac{\ell}{2}\cdot\frac{\cos3\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha=\operatorname{sen}3\alpha\cdot\cos3\alpha$$

$$\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{2}=\frac{\operatorname{sen}6\alpha}{2}$$

$2\alpha=6\alpha$ ou $2\alpha+6\alpha=180^\circ$

$\alpha=0$ (não convém) ou $\alpha=22{,}5^\circ$

a) $B\hat{C}A=4\alpha=90^\circ$, portanto o ΔABC é retângulo.

Assim, a mediana relativa à hipotenusa mede a metade da hipotenusa, ou seja, $CM=\frac{\ell}{2}$.

b) Os ângulos são:

$B\hat{C}A=4\alpha=90^\circ$, $C\hat{A}B=90^\circ-\alpha=67{,}5^\circ$

e $ABC=90^\circ-3\alpha=22{,}5^\circ$

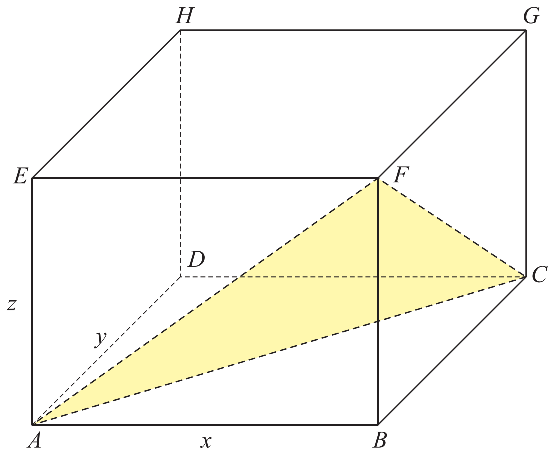
Questão 30

Seja $ABCDEFGH$ um paralelepípedo de bases retangulares $ABCD$ e $EFGH$, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem um progressão aritmética cuja soma é $12\,\text{cm}$. Sabe-se que o volume da pirâmide $ABCF$ é igual a $10\,\text{cm}^3$. Calcule:

(a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

(b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Resolução:



a) Como x, y e z estão em P.A., temos:

$x = y - r$ e $z = y + r$, em que r é a razão da P.A.

A soma dos termos da P.A. é 12, portanto:

$y - r + y + y + r = 12$

$3y = 12$

$y = 4$

O volume da pirâmide $ABCF$ é:

$V = \dfrac{xyz}{6} = 10$, logo

$(4 - r)(4 + r) = 15$

$\therefore r = \pm 1$

As medidas das arestas são:

$\overline{AB} = 3\text{ cm},\quad \overline{AD} = 4\text{ cm}\quad \text{e}\quad \overline{AE} = 5\text{ cm}$

ou

$\overline{AB} = 5\text{ cm},\quad \overline{AD} = 4\text{ cm}\quad \text{e}\quad \overline{AE} = 3\text{ cm}$

b) Volume do paralelepípedo é:

$V = 3 \cdot 4 \cdot 5$

$V = 60\,\text{cm}^3$

e a área total:

$S = 2(3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5)$

$S = 94\,\text{cm}^2$

Matemática

Bruno Fraga
Douglas
Lafayette
Luis Antônio
Marcelo Moraes
Ney Marcondes

Colaboradores
Aline Alkmin
Carolina Chaveiro
Luis Gustavo
Rubem Jade

Digitação e Diagramação
João Paulo de Faria
Márcia Santana
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Leandro Bessa
Luciano Lisboa
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br