2013 IME

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

Considere $\log_{\sqrt{b}}(a)^2 = 4$, com a e b números reais positivos. Determine o valor de m, número real, para que a equação $x^3 - 18x^2 + \left[\log_b(ab)^m + 8 - m\right]x - \log_b(a)^{2m} = 0$ tenha três raízes reais em progressão aritmética.

Resolução:

Dado que $\log_{\sqrt{b}}(a)^2 = 4$, vem $\left(\sqrt{b}\right)^4 = a^2$ e, como a e b são positivos, temos $a = b$.

Dessa forma $\log_b(ab)^m = \log_b\left(b^2\right)^m = 2m$ e $\log_b a^{2m} = \log_b b^{2m} = 2m$. Portanto a equação dada equivale a

$x^3 - 18x^2 + (m+8)x - 2m = 0$

Como as três raízes estão em PA podemos denominá-las $x_2 - r$, x_2, $x_2 + r$ em que r é a razão de PA.

Pela 1ª relação de Girard, temos

$(x_2 - r) + x_2 + (x_2 + r) = 18 \Leftrightarrow x_2 = 6$

Da 2ª relação de Girard, temos

$(6-r)\cdot 6 + (6-r)(6+r) + 6(6+r) = m + 8$

$36 - 6r + 36 - r^2 + 36 + 6r = m + 8$

$r^2 = 100 - m \quad (\mathrm{I})$

Da 3ª relação de Girard:

$(6-r)\cdot 6\cdot(6+r) = 2m$

$36 - r^2 = \dfrac{m}{3} \Rightarrow r^2 = 36 - \dfrac{m}{3} \quad (\mathrm{II})$

Igualando (I) e (II), vem:

$100 - m = 36 - \dfrac{m}{3} \Rightarrow m = 96$

Questão 02

Considere a, b e c números inteiros e $2 < a < b < c$. Determine o(s) valor(es) de x, y e z, que satisfaçam o sistema de equações

$$\begin{cases} ax - 2by + 3cz = 2abc \\ 3ax - 4by = -abc \\ -by + cz = 0 \\ xyz = 2013^2 \end{cases}$$

Resolução:

Da 3ª equação, temos $by = cz$

Substituindo nas duas primeiras temos:

$$\begin{cases} ax - 2cz + 3cz = 2abc \\ 3ax - 4cz = -abc \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ax + cz = 2abc & (\mathrm{I}) \\ 3ax - 4cz = -abc & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

Fazendo $4(\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$, vem

$7ax = 7abc \overset{a\neq 0}{\Rightarrow} x = bc$

Substituindo em (I), temos:

$$abc + cz = 2abc \overset{c\neq 0}{\Rightarrow} z = ab$$

Finalmente como $by = cz$ temos $by = cab$ ou $y = ac$

Na última equação do sistema tínhamos

$xyz = 2013^2$, que equivale a

$$(bc)\cdot(ac)\cdot(ab) = 2013^2 \Rightarrow abc = 2013$$

Da decomposição em fatores primos de 2013, temos

$abc = 3\cdot 11\cdot 61$ e, como $2 < a < b < c$ com a, b, c inteiros

podemos fazer $a = 3$, $b = 11$ e $c = 61$

Portanto, $x = 671$, $y = 183$ e $z = 33$

Questão 03

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Seja a matriz $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.

Resolução:

Mostremos, por indução, que $A^k = \begin{bmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}$. Isto é verdade para $k = 1$ pois:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 2^1 & 1\cdot 2^0 \\ 0 & 2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Supondo verdadeiro para k temos:

$$A^{k+1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2^k & k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2^k + 1\cdot 0 & 2k\cdot 2^{k-1} + 1\cdot 2^k \\ 0\cdot 2^k + 2\cdot 0 & 0\cdot k\cdot 2^{k-1} + 2\cdot 2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{bmatrix},$$

o que mostra nossa tese.

Assim:

$$B = \sum_{k=1}^{n} A^k = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \text{ com:}$$

$$b_{11} = b_{22} = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{2(2^n - 1)}{2-1} = 2^{n+1} - 2$$

$$b_{21} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$$

$b_{12} = \sum_{k=}^{n} (k)2^{k-1}$, que forma a soma dos termos de uma "PAG". Temos:

$$2b_{12} - b_{12} = 2\left(1 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n2^{n-1}\right) - \left(1 + 2\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + \ldots + n2^{n-1}\right)$$

$$b_{12} = -1 + \left[\left(2 - 2\cdot 2^1\right) + \left(2\cdot 2^2 - 3\cdot 2^2\right) + \left(3\cdot 2^3 - 4\cdot 2^3\right) + \ldots + \left((n-1)2^{n-1} - n\cdot 2^{n-1}\right)\right] + 2n\cdot 2^{n-1}$$

$$b_{12} = -1 - \left[2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{n-1}\right] + n\cdot 2^n$$

$$b_{12} = -1 - \left[\frac{2(2^{n-1} - 1)}{2-1}\right] + n\cdot 2^n$$

$$b_{12} = (n-1)2^n + 1$$

Portanto a soma dos elementos de B é:

$$b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 2^{n+1} - 2 + (n-1)2^n + 1 + 0 + 2^{n+1} - 2$$

$$= 2^{n+2} + (n-1)2^n - 3 = (n+3)2^n - 3$$

Questão 04

Considere $P=\prod_{k=0}^{45}\left[1+\text{tg}\left(\frac{k\pi}{180}\right)\right]$, com $\prod_{k=0}^{n}$ representando o produto dos termos desde $k=0$ até $k=n$, sendo k e n números inteiros. Determine o(s) valor(es) de m, número real, que satisfaça(m) a equação $P=2^m$.

Resolução:

$$P=\prod_{k=0}^{45}\left[\frac{\cos\left(k\pi/180\right)+\text{sen}\left(k\pi/180\right)}{\cos\left(k\pi/180\right)}\right]$$

Como o cosseno de um ângulo é o seno do complementar e $\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{180}=\frac{(90-k)\pi}{180}$, temos:

$$P=\prod_{k=0}^{45}\left[\frac{\text{sen}\left[(90-k)\pi/180\right]+\text{sen}\left(k\pi/180\right)}{\cos\left(k\pi/180\right)}\right]$$

Pela fórmula de prostaférese, temos:

$$P=\prod_{k=0}^{45}\left[\frac{2\cdot\text{sen}\left(\pi/4\right)\cdot\cos\left[(45-k)\pi/180\right]}{\cos\left(k\pi/180\right)}\right]=$$

$$=\left[2\text{sen}\left(\pi/4\right)\right]^{46}\cdot\frac{\cos\left(45\pi/180\right)}{\cos 0}\cdot\frac{\cos\left(44\pi/180\right)}{\cos\left(\pi/180\right)}\cdots\frac{\cos\left(\pi/180\right)}{\cos\left(44\pi/180\right)}\cdot\frac{\cos 0}{\cos\left(45\pi/180\right)}$$

Simplificando:

$$P=\left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{46}=2^{23}$$

Assim na igualdade $P=2^m$ temos $m=23$

Questão 05

Considere, Z_1 e Z_2, complexos que satisfazem a equação $x^2+px+q=0$, onde p e q são números reais diferentes de zero. Sabe-se que os módulos de Z_1 e Z_2 são iguais e que a diferença entre os seus argumentos vale α, onde α é diferente de zero. Determine o valor de $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ em função de p e q.

Resolução:

Como Z_1 e Z_2 são raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes reais, temos que um é conjugado do outro, daí podemos escrever $Z_1=r(\cos\theta+i\cdot\text{sen}\,\theta)$ e $Z_2=r\left(\cos(360^\circ-\theta)+i\cdot\text{sen}(360^\circ-\theta)\right)$, em que, sem perda de generalidade, $\theta\le 360^\circ-\theta$.

Desta forma temos:

$$\alpha=(360^\circ-\theta)-\theta\Rightarrow\alpha=360^\circ-2\theta$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{360^\circ-2\theta}{2}\right)=\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

Como $Z_1+Z_2=2r\cdot\cos\theta$ e $Z_1\cdot Z_2=r^2$, segue que:

$$r^2=q\Rightarrow r=\sqrt{q}$$

e

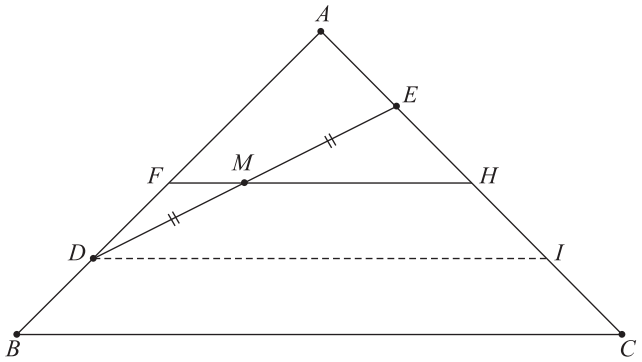
$$2r\cos\theta=p\Rightarrow\cos\theta=\frac{p}{2\sqrt{q}}$$

Portanto $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\frac{p}{2\sqrt{q}}$, logo $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{p^2}{4q}$.

Questão 06

Considere um triângulo ABC com lado BC igual a L. São dados um ponto D sobre o lado AB e um ponto E sobre o lado AC, de modo que sejam válidas as relações $\frac{DA}{DB}=\frac{EC}{EA}=m$, com $m>1$. Pelo ponto médio do segmento DE, denominado M, traça-se uma reta paralela ao lado BC, interceptando o lado AB no ponto F e o lado AC no ponto H. Calcule o comprimento do segmento MH, em função m e L.

Resolução:



Traçando uma paralela à BC passando por D que intercepta o lado AC no ponto I, temos a formação do triângulo ADI que é semelhante ao triângulo ABC, daí:

$$\frac{DI}{BC}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{DI}{BC}=\frac{AD}{AD+BD}\Rightarrow\frac{DI}{BC}=\frac{mBD}{mBD+BD}\Rightarrow\frac{DI}{L}=\frac{m}{m+1}\Rightarrow DI=\frac{Lm}{m+1}$$

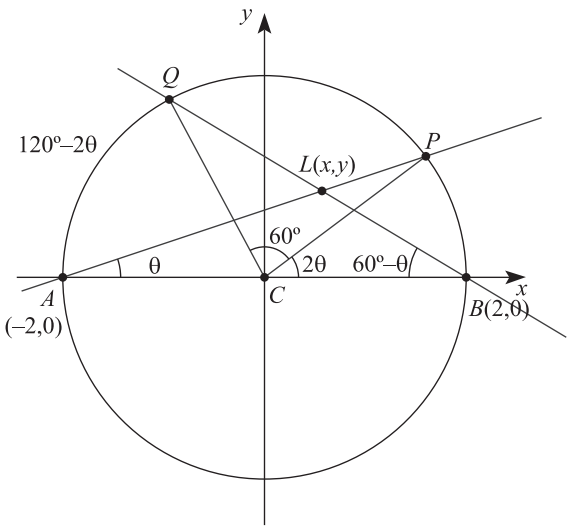
Como o segmento MH é base média do triângulo EDI, temos:

$$MH=\frac{Lm}{2(m+1)}$$

Questão 07

Considere um círculo com centro C, na origem, e o raio 2. Esse círculo intercepta o eixo das abscissas nos pontos A e B, sendo a abscissa de A menor do que a abscissa de B. Considere P e Q, dois pontos desse círculo, com ordenadas maiores ou iguais a zero. O ângulo formado entre o segmento CP e CQ vale $\frac{\pi}{3}\text{rd}$. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto de interseção dos segmentos AP e BQ internos ao círculo.

Resolução:



$0 \le \theta \le 60^\circ$

$0 \le \operatorname{tg}\theta \le \sqrt{3}$

Seja $t = \operatorname{tg}\theta$

Reta $\overleftrightarrow{AP}$

$m = \operatorname{tg}\theta$

$y - 0 = \operatorname{tg}\theta \cdot (x+2)$

$y = (\operatorname{tg}\theta)(x+2)$

$y = t \cdot (x+2)$

$t = \dfrac{y}{x+2}$

Reta $\overleftrightarrow{BQ}$

$m = -\operatorname{tg}(60^\circ - \theta)$

$y - 0 = -\left(\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\theta}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}\right)(x-2)$

$y = -\left(\dfrac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}\theta}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}\theta}\right)(x-2)$

$y = \left(\dfrac{t - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}t}\right)(x-2)$

Eliminando o parâmetro:

$$y = \frac{\dfrac{y}{x+2} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \cdot \dfrac{y}{x+2}} \cdot (x-2)$$

$$y = \left(\frac{y - \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}}{x + 2 + \sqrt{3y}}\right)(x-2)$$

$$xy + 2y + \sqrt{3}y^2 = xy - 2y - \sqrt{3}x^2 + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$$

$$2y + \sqrt{3}y^2 = -2y - \sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}y^2 + 4y = 4\sqrt{3}$$

$$x^2 + y^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}y = 4$$

$$\therefore x^2 + \left(y + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{16}{3}$$

Circunferência de centro $C\left(0, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e raio $R = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

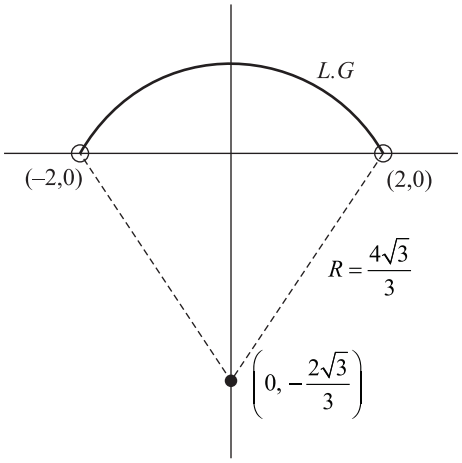
Considere os limites para o parâmetro t:

$t = 0$, tem-se interseção em $(2, 0)$

$t = \sqrt{3}$, tem-se interseção em $(-2, 0)$.

Logo, o lugar geométrico descrito é o arco de circunferência de centro $\left(0, -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ e raio $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$, do ponto $(2,0)$ ao $(-2,0)$ no sentido anti-horário.

Como o enunciado se refere a pontos internos ao círculo os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$ não participam do L.G.



Questão 08

São dadas duas matrizes A e B tais que $A.B=\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}$ e $B.A=\begin{bmatrix}x & 14\\ 14 & y\end{bmatrix}$, com x e y reais e $x>y$.

Determine:

A) o(s) valore(s) de x e y;

B) as matrizes A e B que satisfazem as equações apresentadas.

Resolução:

a) i) Lembremos que $\det(AB)=\det(BA)$:

$$\begin{vmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 14\\ 14 & y\end{vmatrix}$$

$$125-121=x\cdot y-196$$

$$x\cdot y=200$$

ii) Sabemos ainda que

$tr(BA)=tr(AB)$, em que:

$tr\,x$ é o traço da matriz x.

Assim:

$x+y=30$

De i e ii vem:

$$\begin{cases}x\cdot y=200\\ x+y=30\end{cases}$$

Como $x>y$ temos:

$x=20$ e $y=10$.

b) Multiplicando por A pela direita a primeira relação vem

$$ABA=\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}A$$

Como $BA=\begin{bmatrix}20 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}$, temos:

$$A\cdot\begin{bmatrix}20 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}\cdot A$$

Fazendo $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$, vem

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}20 & 14\\ 14 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

Que equivale ao sistema

$$\begin{cases}20a+14b=5a+11c\\ 14a+10b=5b+11d\\ 20c+14d=11a+25c\\ 14c+10d=11b+25d\end{cases}$$

$$\begin{cases}15a+14b-11c=0\\ 14a+5b-11d=0\\ 11a+5c-14d=0\\ 11b-14c+15d=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}15a+14b-11c=0\\ -121b+154c-165d=0\\ -154b+196c-210d=0\\ 11b-14c+15d=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 15a+14b-11c=0 \\ 11b-14c+15d=0 \\ 11b-14c+15d=0 \\ 11b-14c+15d=0 \end{cases}$$

Eliminando as duas últimas equações e fazendo $c=\alpha$ e $d=\beta$, com $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ e $\alpha\cdot\beta\neq 0$ vem

$b=\dfrac{14\alpha-15\beta}{11}$ e $a=\dfrac{-5\alpha+14\beta}{11}$

Assim: $A=\begin{bmatrix} \dfrac{-5\alpha+14\beta}{11} & \dfrac{14\alpha-15\beta}{11} \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$

Calculando a inversa de A:

$$A^{-1}=\frac{11}{-14\alpha^2+10\alpha\beta+14\beta^2}\begin{bmatrix} \beta & \dfrac{-14\alpha+15\beta}{11} \\ -\alpha & \dfrac{-5\alpha+14\beta}{11} \end{bmatrix}$$

Voltando no produto $BA=\begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}$ e multiplicando a direita por A^{-1} temos:

$$B=\begin{bmatrix} 20 & 14 \\ 14 & 10 \end{bmatrix}\cdot A^{-1}$$

$$B=\frac{11}{-14\alpha^2+10\alpha\beta+14\beta^2}\cdot\begin{bmatrix} 20\beta-14\alpha & \dfrac{-350\alpha+496\beta}{11} \\ 14\beta-10\alpha & \dfrac{-246\alpha+350\beta}{11} \end{bmatrix}$$

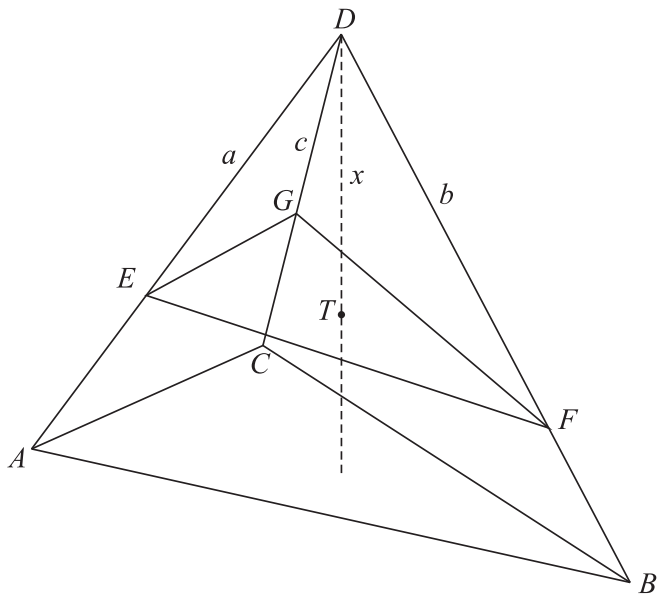
Questão 09

Considere um tetraedro regular $ABCD$ e um plano π, oblíquo à base ABC. As arestas DA, DB e DC, desse tetraedro são seccionadas, por este plano, nos pontos E, F e G, respectivamente. O ponto T é a interseção da altura do tetraedro, correspondente ao vértice D, com o plano π. Determine o valor de DT sabendo que $\dfrac{1}{DE}+\dfrac{1}{DF}+\dfrac{1}{DG}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Resolução:

Sejam $DE=a$, $DF=b$, $DG=c$, $DT=x$ e $AB=L$:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\frac{abc}{bc+ac+ab}=\sqrt{6}$$

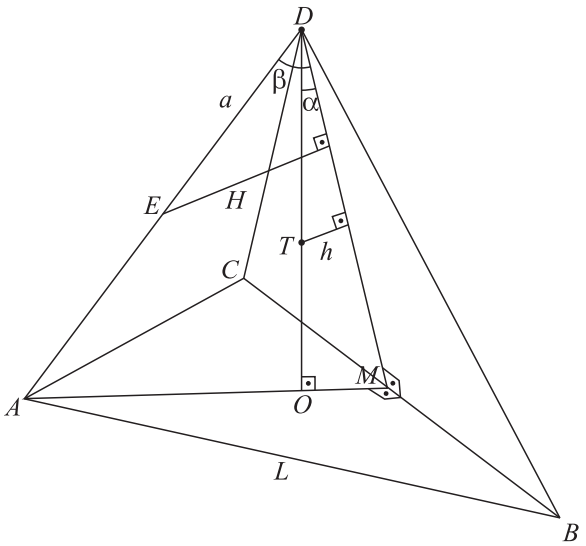


O volume da pirâmide $EFGD$ é igual à soma dos volumes das pirâmides de bases DEF, DFG e DGE com vértices em T, ou seja:

$$\frac{1}{3}\frac{bc\,\text{sen}\,60^o}{2}\cdot H=\frac{1}{3}\frac{ab\,\text{sen}\,60^o}{2}\cdot h+\frac{1}{3}\frac{ac\,\text{sen}\,60^o}{2}\cdot h+\frac{1}{3}\frac{bc\,\text{sen}\,60^o}{2}\cdot h$$

$bc\cdot H=(ab+ac+bc)h\ \ (1)$, em que H é a distância de E até a base DFG e h é a distância de T até as bases das pirâmides menores, em particular tomemos também a base DFG.

Cálculo de H e h:



$$AM=DM=\frac{L\sqrt{3}}{2}$$

$$OM=\frac{1}{3}AM=\frac{L\sqrt{3}}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen}\,\alpha=\dfrac{OM}{DM}=\dfrac{\frac{L\sqrt{3}}{6}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{1}{3}\\[2ex]\text{sen}\,\alpha=\dfrac{h}{x}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{h}{x}=\frac{1}{3}\Rightarrow h=\frac{x}{3}$$

No triângulo isósceles DAM temos $\cos\beta=\dfrac{\frac{1}{2}DA}{DM}=\dfrac{\frac{L}{2}}{\frac{L\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Da relação fundamental:

$$\text{sen}^2\beta+\cos^2\beta=1\Rightarrow\text{sen}^2\beta+\frac{3}{9}=1\Rightarrow\text{sen}^2\beta=\frac{6}{9}$$

Como β é agudo temos:

$$\text{sen}\,\beta=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

No triângulo retângulo de hipotenusa DE da figura:

$$\text{sen}\,\beta=\frac{H}{a}\Rightarrow H=a\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Voltando em (1):

$$bc\,H=(ab+ac+bc)\cdot h$$

$$bc\,a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}=(ab+ac+bc)\cdot\frac{x}{3}$$

$$x=\sqrt{6}\cdot\frac{abc}{ab+ac+bc}$$

Lembrando que $\dfrac{abc}{ab+ac+bc}=\sqrt{6}$ vem

$$x=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$$

$$x=6$$

Questão 10

Considere a seguinte definição:

"dois pontos P e Q, de coordenadas (x_P, y_P) e (x_q, y_q), respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se $x_p = x_q$ ou $y_p = y_q$ "

Dado o conjunto $S=\{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)\}$. Determine quantas funções bijetoras $f: S \to S$ existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto $S, f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuem coordenadas em comum.

Resolução:

Consideremos inicialmente os conjuntos:

$A=\{(0,0),(0,1),(0,2)\}$

$B=\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$

$C=\{(2,0),(2,1),(2,2)\}$

Notemos que eles têm as seguintes propriedades:

P_1 : quaisquer dois elementos de um mesmo conjunto têm coordenadas em comum.

P_2 : quaisquer dois elementos de conjuntos distintos têm, no máximo, uma coordenada comum.

Como quaisquer dois elementos de A têm coordenadas comuns, suas imagens também devem ter coordenadas comuns. Assim a imagem de A, $f(A)$, também deve gozar da propriedade P_1. Outros três conjuntos são adequados:

$D=\{(0,0),(1,0),(2,0)\}$

$E=\{(0,1),(1,1),(2,1)\}$

$F=\{(0,2),(1,2),(2,2)\}$

Assim uma primeira etapa é associar a cada A,B,C um conjunto imagem distinto dentre A,B,C ou dentre D,E,F. Há $3!+3!=12$ maneiras de fazê-lo.

Já escolhida a ordem dos conjuntos acima, existem $3!=6$ ordens para associar os 3 elementos de $f(A)$ aos elementos $(0,0),(0,1),(0,2)$:

$$\underset{\substack{imagem\\ do(0,0)}}{\underline{3}}\ \underset{\substack{imagem\\ do(0,1)}}{\underline{2}}\ \underset{\substack{imagem\\ do(0,2)}}{\underline{1}}=6$$

Finalmente, considere a associação de exemplo, sem perda de generalidade:

$(0,0)\longrightarrow(k,a)$

$(0,1)\longrightarrow(k,b)$

$(0,2)\longrightarrow(k,c)$

$(1,0)\longrightarrow(w,\alpha)$

$(1,1)\longrightarrow(w,\beta)$

$(1,2)\longrightarrow(w,\gamma)$

Em que $k \neq w$.

Note que a ordem das ordenadas (a,b,c) deve ser exatamente a mesma de (α,β,γ).

Pois se assim não fosse, seria possível obter P e Q violando as condições do enunciado.

Desta forma, escolhida a ordem das imagens $f(A),f(B),f(C)$ e a função que associa A a $f(A)$, não há mais possibilidade de escolha.

A quantidade n de funções é:

$n=12\times 6=72$ funções.

Professores

Bruno Fraga
Douglas
Lafayette
Marcelo Moraes
Marco Miola
Ney Marcondes

Colaboradores
Aline Alkmin
Fernanda Silva
José Diogo
Lilian Resende

Digitação e Diagramação
Daniel Alves
João Paulo de Faria
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Luciano Lisboa
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

Copyright©Olimpo2012

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo