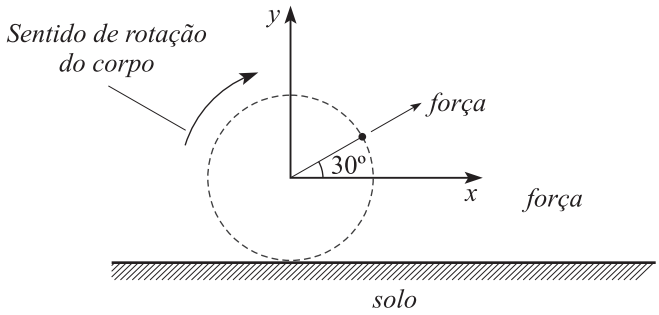
"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

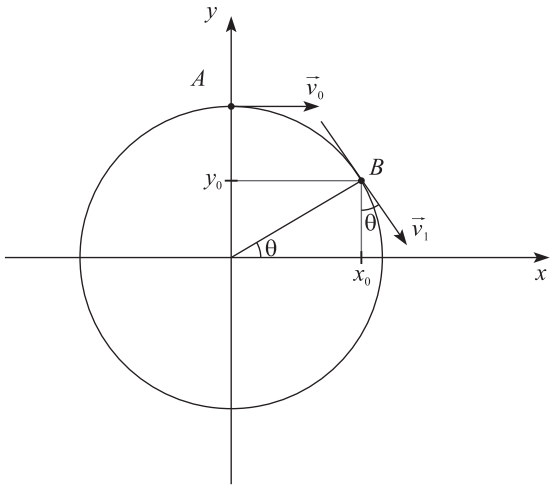


Um corpo de 4 kg está preso a um fio e descreve um movimento circular em um plano perpendicular ao solo. Na posição indicada na figura, ele sofre a ação de uma força, no plano xy, perpendicular ao seu movimento que o libera do fio, sendo o impulso nesta direção igual a $40\sqrt{3}\text{ kg m/s}$. Determine:

A) a variação do vetor momento linear entre o instante em que o corpo é liberado do fio e o instante que atinge o solo;
B) a coordenada x do ponto onde o corpo atinge o solo.

Dados:
- raio do movimento circular: $6{,}4\text{ m}$;
- velocidade do corpo preso no fio no ponto mais alto: 6 m/s;
- aceleração da gravidade: 10 m/s^2.

Resolução:



A partícula passa por A com velocidade $v_0 = 6\text{ m/s}$ e chega ao ponto de lançamento B com velocidade v_1:

$$E_{M_A} = E_{M_B}$$

$$E_{P_A} + E_{c_A} = E_{P_B} + E_{c_B}$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgR = \frac{mv_1^2}{2} + mgy_0$$

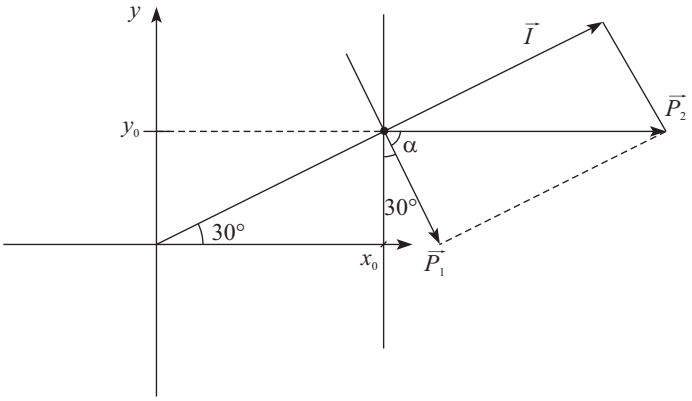
$$\therefore\ \frac{v_0^2}{2} + gR = \frac{v_1^2}{2} + g(R - R\text{sen } 30^\circ)$$

$$\therefore\ \frac{6^2}{2} + 10\cdot 6{,}4 = \frac{v_1^2}{2} + 10\cdot 6{,}4\left(1 - \frac{1}{2}\right)\ \therefore\ v_1 = 10\text{ m/s}$$

Antes do corpo ser liberado seu momento linear $\left(\vec{P}_1\right)$ forma um ângulo de 30° com a vertical que vale:

$$\left|\vec{P}_1\right| = m \cdot v_1 = 40 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Nesse instante, o corpo recebe um impulso $I = 40\sqrt{3} \text{ kg m/s}$ conforme a figura:



Onde tem-se:

$$\vec{I} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 \quad \therefore \quad \vec{P}_2 = \vec{I} + \vec{P}_1$$

Ainda:

$$\therefore \quad P_2^2 = \left(40\sqrt{3}\right)^2 + \left(40\right)^2$$

$$\therefore \quad P_2 = 80 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Sendo que:

$$\text{tg}\alpha = \frac{I}{P_1} = \sqrt{3} \quad \therefore \quad \alpha = 60^\circ$$

Ou seja, a partícula é lançada horizontalmente com velocidade:

$$v_2 = \frac{P_2}{m} \quad \therefore \quad v_2 = \frac{80}{4} = 20 \text{ m/s}$$

E ainda, as coordenadas do ponto de lançamento são:

$$x_0 = R \cdot \cos 30^\circ = 6,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$y_0 = R \cdot \text{sen } 30^\circ = 6,4 \cdot \frac{1}{2} = 3,2 \text{ m}$$

Daí:

a) Entre o instante que é liberado e o instante que atinge o solo a variação do momento linear é igual ao impulso da força peso:

$$I_P = P \cdot \Delta t$$

E, sendo Δt o tempo de queda:

$$y_f = y_0 - g\frac{\Delta t^2}{2} \quad \therefore \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2\left(y_0 + 6,4\right)}{g}}$$

$$\therefore \quad \Delta t = \sqrt{\frac{2 \cdot (9,6)}{10}} = 0,8\sqrt{3} \text{ s}$$

Por fim:

$$I_P = \left(mg\right) \cdot \Delta t = 4 \cdot 10 \cdot 0,8\sqrt{3} = 32\sqrt{3} \text{ kg m/s}$$

$$\therefore \quad \Delta p = I = 32\sqrt{3} \text{ kg m/s}$$

Sendo $\Delta\vec{p} = \vec{I_p}$ vertical e apontado para baixo.

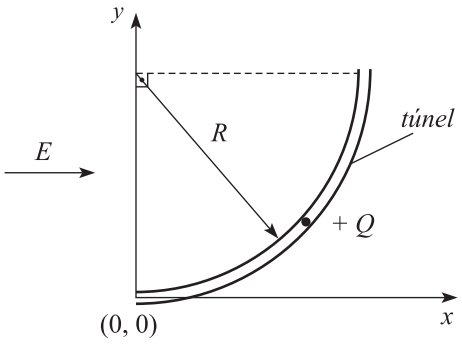
b) Após o lançamento, o espaço percorrido em x vale até atingir o solo:

$$\Delta x = v_2 \cdot \Delta t = 20 \cdot 0,8\sqrt{3} = 16\sqrt{3} \text{ m}$$

Portanto:

$$x_f = x_0 + \Delta x = 3,2\sqrt{3} + 16\sqrt{3} = 19,2 \cdot \sqrt{3} \text{ m}$$

Questão 02



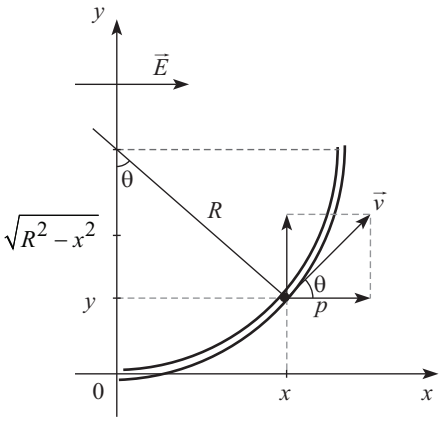
Uma partícula de carga $+Q$ e massa m move-se dentro de um túnel estreito no plano xy, sem atrito, sujeita à força provocada pelo campo elétrico $(E, 0)$. Seguindo a trajetória conforme apresentado na figura acima. Sabe-se que:

- a partícula entra no túnel com velocidade $(v, 0)$ no ponto de coordenadas $(0, 0)$;
- a trajetória da partícula forçada pelo túnel é um quarto de circunferência de raio R;
- não há influência da força da gravidade.

Ao passar por um ponto genérico dentro do túnel, determine, em função da abscissa x:

a) o módulo da velocidade da partícula;
b) as componentes v_x e v_y do vetor velocidade da partícula;
c) o módulo da aceleração tangencial da partícula;
d) o módulo da reação normal exercida pela parede do túnel sobre a partícula;
e) o raio instantâneo da trajetória da partícula imediatamente após deixar o túnel.

Resolução:



a) Enquanto a partícula se move de $0(0, 0)$ até o ponto $P(x, 1)$ sofre o trabalho da força elétrica de um campo uniforme:

$$\tau_E = \Delta E_c$$

$$Q(v_0 - v_1) = \frac{mv_f^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\therefore\ Q \cdot E \cdot x = \frac{m}{2}\left(v_f^2 - v^2\right)$$

$$\therefore\ 2\frac{QE_x}{m} = v_f^2 - v^2 \quad \therefore\ v_f = \sqrt{v^2 + 2\left(\frac{QE}{m}\right)x}$$

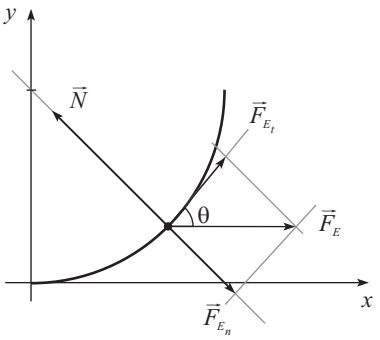
b) Podemos determinar v_x e v_y decompondo v da forma:

$$v_x = v \cdot \cos\theta = v_f \cdot \left(\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R}\right)$$

$$\therefore\ v_x = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}\right) \cdot \sqrt{v^2 + 2\left(\frac{QE}{m}\right)x}$$

$$v_y = v \cdot \text{sen}\theta = v_f \cdot \left(\frac{x}{R}\right) \therefore\ v_y = \left(\frac{x}{R}\right) \cdot \sqrt{v^2 + 2\left(\frac{QE}{m}\right)x}$$

c) Observe o diagrama de forças:



$$F_{E_T} = m \cdot a_t$$

$$\therefore\ F_E \cdot \cos\theta = m \cdot a_t$$

$$\therefore\ a_t = \frac{F_E}{m} \cdot \cos\theta = \left(\frac{QE}{m}\right) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}$$

d) Podemos escrever a resultante centrípeta da forma:

$$F_{ap} = N - F_{E_n}$$

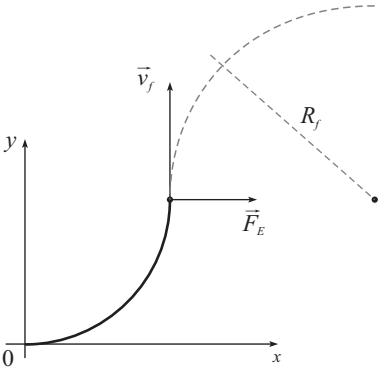
$$\therefore\ N = F_{ap} + F_{En}$$

$$\therefore\ N = \frac{mv_f^2}{R} + F_E \cdot \text{sen}\theta$$

$$\therefore\ N = \frac{m}{R}\left[v^2 + 2\left(\frac{QE}{m}\right)x\right] + QE\left(\frac{x}{R}\right)$$

$$\therefore\ N = \frac{m}{R}\left[v^2 + 3\left(\frac{QE}{m}\right)x\right]$$

e)



Imediatamente após deixar o túnel temos:

$$v_f = \sqrt{v^2 + 2\left(\frac{QE}{m}\right)R}$$

E a força elétrica $\vec{F}_E$ atuando perpendicularmente a $\vec{v}_f$:

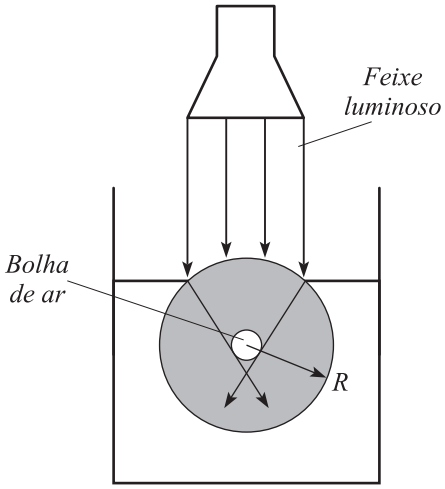
$$F_E = F_{ap}$$

$$QE = \frac{mv_f^2}{R_f}$$

$$\therefore\ R_f = \left(\frac{m}{QE}\right) \cdot v_f^2 = \frac{m}{QE}\left[v^2 + 2\left(\frac{QE}{m}\right)R\right]$$

$$\therefore\ R_f = 2R + \frac{mv^2}{QE}$$

Questão 03

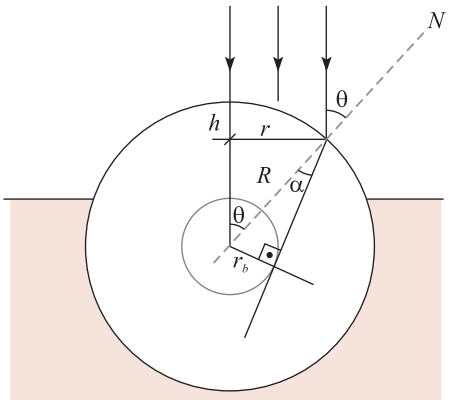


Uma esfera de gelo de raio R flutua parcialmente imersa em um copo com água, como mostra a figura acima. Com a finalidade de iluminar uma bolha de ar, também esférica, localizada no centro da esfera de gelo, utilizou-se um feixe luminoso de seção reta circular de área $\frac{\pi R^2}{100}\,\text{m}^2$ que incide verticalmente na esfera. Considerando que os raios mais externos do feixe refratado tangenciam a bolha conforme a figura, determine a massa específica do gelo.

Dados:
- Índice de refração do ar: $1,0$
- Índice de refração do gelo: $1,3$
- Massa específica do ar: $1,0\ \text{kg/m}^3$
- Massa específica da água: $10^3\ \text{kg/m}^3$
- Volume da calota esférica: $v = 2 \cdot 10^{-2}\ \pi R^3$

Resolução:

Observe a figura:



O feixe incidente possui seção reta circular de área $A = \pi r^2$, portanto:

$$A = \pi r^2 = \frac{\pi R^2}{100}$$

$$\therefore\ r = \frac{R}{10}$$

Então, podemos escrever a Lei de Snell da forma:

$$n_{ar} \cdot \text{sen}\,\theta = n_{gelo} \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$1 \cdot \left(\frac{r}{R}\right) = 1,3 \cdot \text{sen}\,\alpha$$

$$\therefore\ \text{sen}\alpha = \frac{1}{13}$$

E, ainda: $\text{sen}\alpha = \frac{r_b}{R}\ \therefore\ r_b = \frac{R}{13}$

Cálculo dos volumes de Ar e Gelo:

$$V_{ar} = \frac{4}{3}\pi r_b^3 = \left(\frac{1}{13}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{Gelo} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r_b^3 = \left[1 - \left(\frac{1}{13}\right)^3\right] \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

Considerando que o volume de calota esférica dado seja o volume da esfera de gelo emerso, temos para o volume imerso:

$$V_i = \frac{4}{3}\pi R^3 - 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi R^3 = \pi R^3 \left(\frac{4}{3} - 2 \cdot 10^{-2}\right)$$

E assim, para o equilíbrio temos:

$$E = P_G + P_{Ar}$$

$$\rho_{Água} \cdot g \cdot V_i = \rho_{Gelo} \cdot g \cdot V_{Gelo} + \rho_{ar} \cdot g \cdot V_{ar} \qquad (1)$$

$$10^3 \cdot \pi R^3 \left(\frac{4}{3} - 2 \cdot 10^2\right) = \rho_{Gelo} \cdot \frac{4}{4}\pi R^3 \left[1 - \left(\frac{1}{13}\right)^3\right]$$

$$+ 1 \cdot \left(\frac{1}{13}\right)^3 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\therefore \ \rho_{Gelo} = \frac{10^3\left(1 - 1{,}5 \cdot 10^{-2}\right) - \left(\frac{1}{13}\right)^3}{1 - \left(\frac{1}{13}\right)^3}$$

$$\therefore \ \rho_{Gelo} = 0{,}985 \cdot 10^3 \ \text{kg/m}^3$$

Questão 04

Existe um intervalo mínimo de tempo entre dois sons, conhecido como limiar de fusão, para que estes sejam percebidos pelo ouvido humano como sons separados. Um bloco desliza para baixo, a partir do repouso, em um plano inclinado com ressaltos igualmente espaçados que produzem ruídos. Desprezando o atrito do bloco com o plano inclinado e a força exercida pelos ressaltos sobre o bloco, determine o limiar de fusão τ de uma pessoa que escuta um ruído contínuo após o bloco passar pelo enésimo ressalto.

Observação:

- Despreze o tempo de propagação do som.

Dados:

- ângulo do plano inclinado com a horizontal: θ
- aceleração da gravidade: g
- distância entre os ressaltos: d

Resolução:

O bloco desce o plano inclinado em MRUV com aceleração $a = g \operatorname{sen}\theta$. Assim:

1) tempo até a produção do n-ésimo ruído:

$$nd = a\frac{t_n^2}{2}$$

$$\therefore \ t_n = \sqrt{\frac{2dn}{g \operatorname{sen}\theta}}$$

2) tempo até a produção do $(n+1)$-ésimo ruído:

$$(n+1)d = a\frac{t_{n+1}^{\ 2}}{2}$$

$$\therefore \ t_{n+1} = \sqrt{\frac{2d(n+1)}{g \operatorname{sen}\theta}}$$

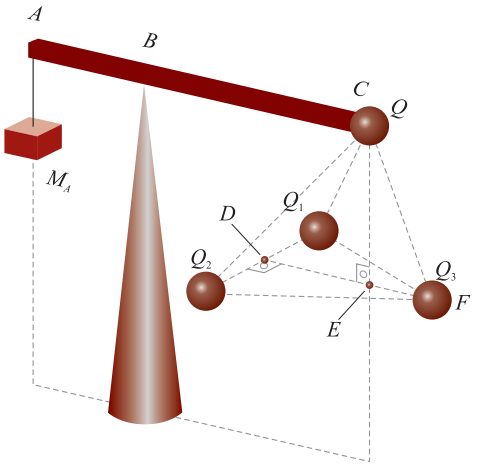
Linear de fusão:

$$\tau = t_{n+1} - t_n$$

$$\therefore \ \tau = \sqrt{\frac{2d(n+1)}{g \operatorname{sen}\theta}} - \sqrt{\frac{2dn}{g \operatorname{sen}\theta}}$$

$$\therefore \ \tau = \sqrt{\frac{2d}{g \operatorname{sen}\theta}} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$$

Questão 05



A figura acima apresenta uma barra ABC apoiada sem atrito em B. Na extremidade A, um corpo de massa M_A é preso por um fio. Na extremidade C existe um corpo com carga elétrica negativa Q e massa desprezível. Abaixo desse corpo se encontram três cargas elétricas positivas, Q_1, Q_2 e Q_3, em um mesmo plano horizontal, formando um triângulo isósceles, onde o lado formado pelas cargas Q_1 e Q_3 é igual ao formado pelas cargas Q_2 e Q_3. Sabe-se, ainda, que o triângulo formado pelas cargas Q, Q_1 e Q_2 é equilátero de lado igual a $2\frac{\sqrt{3}}{3}\,\text{m}$.

Determine a distância EF para que o sistema possa ficar em equilíbrio.

Dados:

- massa específica linear do segmento AB da barra: $1{,}0\ \text{g/cm}$;
- massa específica linear do segmento BC da barra: $1{,}5\ \text{g/cm}$;
- segmento AB barra: $50\ \text{cm}$;
- segmento BC barra: $100\ \text{cm}$;
- segmento DE: $60\ \text{cm}$;
- $M_A = 150\ \text{g}$;
- $|Q| = |Q_1| = |Q_2| = 3^{1/4} \times 10^{-6}\,\text{C}$;
- aceleração da gravidade: $10\ \text{m/s}^2$;
- constante de Coulomb: $9 \times 10^9\ \text{N.m}^2/\text{C}^2$.

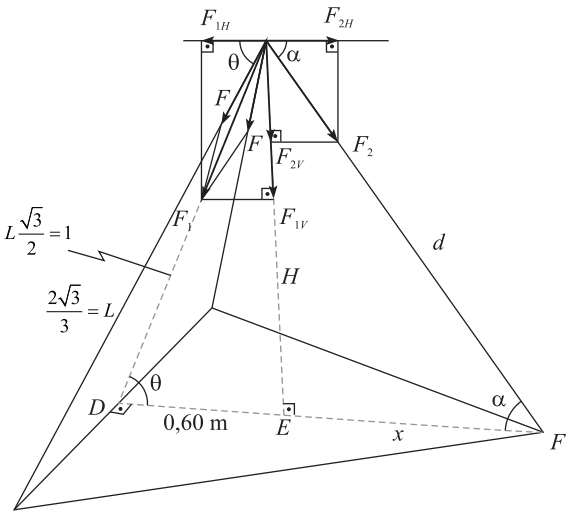
<u>Observação:</u>

- As cargas Q_1 e Q_2 são fixas e a carga Q_3, após o seu posicionamento, também permanecerá fixa.

Resolução:

Seja $EF = x$.

A resultante das forças elétricas em Q deve ser vertical, pois as demais forças que atuam na barra AC também são.



Cálculo de H :

$$\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0,6^2 + H^2$$

$$1 = 0,36 + H^2$$

$$H = 0,80\,\text{m} \Rightarrow \text{sen}\,\theta = 0,8 \text{ e } \cos\theta = 0,6$$

Cálculo de F_1 e suas componentes:

$$F = \frac{K|Q_1||Q|}{L^2} = \frac{9\cdot 10^9 \cdot \left(3^{\frac{1}{4}}\cdot 10^{-6}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

$$F = 6,75\cdot 10^{-3}\sqrt{3}\,\text{N}$$

$$F_1^2 = F^2 + F^2 + 2F\cdot F\cdot\cos 60° = 3F^2$$

$$F_1 = F\sqrt{3} = 6,75\cdot 10^{-3}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$$

$$F_1 = 20,25\cdot 10^{-3}\,\text{N}$$

$$F_{1H} = F_1\cdot\cos\theta = 20,25\cdot 10^{-3}\cdot 0,6$$

$$F_{1H} = 12,15\cdot 10^{-3}\,\text{N}$$

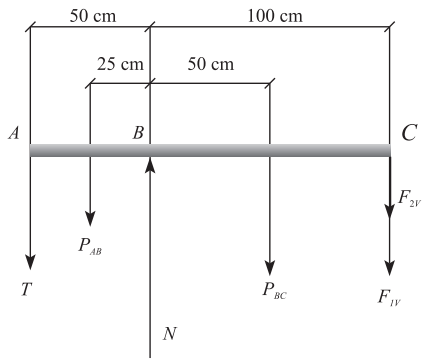
$$F_{1V} = F_1\cdot\text{sen}\,\theta = 20,25\cdot 10^{-3}\cdot 0,8$$

$$F_{1V} = 16,2\cdot 10^{-3}\,\text{N}$$

Daí:

$$F_{2H} = F_{1H} = 12,15\cdot 10^{-3}\,\text{N}$$

Marcando as forças verticais na barra AC :



$$T = M_A\cdot g = 0,150\cdot 10\,\text{N} = 1,5\,\text{N}$$

$$P_{AB} = M_{AB}\cdot g = 0,001\cdot 50\cdot 10\,\text{N} = 0,5\,\text{N}$$

$$\text{P}_{BC} = M_{BC}\cdot g = 0,0015\cdot 100\cdot 10\,\text{N} = 1,5\,\text{N}$$

$$\Sigma M_B = 0$$

$$T\cdot 50 + P_{AB}\cdot 25 = P_{BC}\cdot 50 + \left(F_{2V} + F_{1V}\right)\cdot 100$$

$$1,5\cdot 50 + 0,5\cdot 25 = 1,5\cdot 50 + \left(F_{2V} + 16,2\cdot 10^{-3}\right)\cdot 100$$

$$F_{2V} = 10,88\cdot 10^{-2}\,\text{N}$$

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{F_{2V}}{F_{2H}} = \frac{10,88\cdot 10^{-2}}{12,15\cdot 10^{-3}} = 8,955$$

Por fim:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{H}{x}$$

$$x = \frac{H}{\text{tg}\,\alpha} = \frac{0,80\,\text{m}}{8,955} = 0,089\,\text{m}$$

$$x = 8,9\,\text{cm}$$

Questão 06

Um industrial deseja lançar no mercado uma máquina térmica que opere entre dois reservatórios térmicos cujas temperaturas são 900 K e 300 K, com rendimento térmico de 40% do máximo teoricamente admissível. Ele adquire os direitos de um engenheiro que depositou uma patente de uma máquina térmica operando em um ciclo termodinâmico composto por quatro processos descritos a seguir:

Processo 1 – 2: processo isovolumétrico com aumento de pressão: $(V_i, p_i) \rightarrow (V_i, p_f)$.

Processo 2 – 3: processo isobárico com aumento de volume: $(V_i, p_f) \rightarrow (V_f, p_f)$.

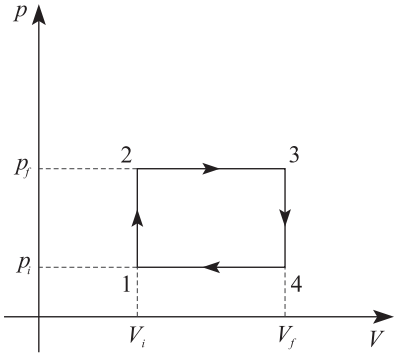
Processo 3 – 4: processo isovolumétrico com redução de pressão: $(V_f, p_f) \rightarrow (V_f, p_i)$.

Processo 4 – 1: processo isobárico com redução de volume: $(V_f, p_i) \rightarrow (V_i, p_i)$.

O engenheiro afirma que o rendimento desejado é obtido para qualquer valor de $\frac{p_f}{p_i} > 1$ desde que a razão entre os volumes $\frac{V_f}{V_i}$ seja igual a 2. Porém, testes exaustivos do protótipo da máquina indicam que o rendimento é inferior ao desejado. Ao ser questionado sobre o assunto, o engenheiro argumenta que os testes não foram conduzidos de forma correta e mantém sua afirmação original. Supondo que a substância de trabalho que percorre o ciclo 1-2-3-4-1 seja um gás ideal monoatômico e baseado em uma análise termodinâmica do problema, verifique se o rendimento desejado pode ser atingido.

Resolução:

Graficamente temos:



Processo 1-2:

$$\tau_{12} = 0$$

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}\Delta p \cdot V_i = \frac{3}{2}(p_f - p_i)\cdot V_i$$

$$Q_{12} = \tau_{12} + \Delta U_{12} = \frac{3}{2}(p_f - p_i)V_i > 0$$

Processo 2-3:

$$\tau_{23} = p_f \Delta V = p_f (V_f - V_i)$$

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\tau_{23} = \frac{3}{2} p_f (V_f - V_i)$$

$$Q_{23} = \tau_{23} + \Delta U_{23} = \frac{5}{2} p_f (V_f - V_i) > 0$$

Processo 3-4:

$$\tau_{34} = 0$$

$$\Delta U_{34} = \frac{3}{2}\Delta p V_f = \frac{3}{2}(p_i - p_f)V_f$$

$$Q_{34} = \tau_{34} + \Delta U_{34} = \frac{3}{2}(p_i - p_f)V_f < 0$$

Processo 4-1

$$\tau_{41} = p_i \Delta V = p_i (V_i - V_f)$$

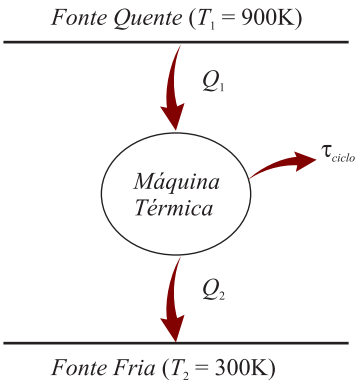
$$\Delta U_{41} = \frac{3}{2}\tau_{41} = \frac{3}{2} p_i (V_i - V_f)$$

$$Q_{41} = \tau_{41} + \Delta U_{41} = \frac{5}{2} p_i (V_i - V_f) < 0$$

$$Q_1 = Q_{12} + Q_{23} = \frac{3}{2}(p_f - p_i)V_i + \frac{5}{2} p_f (V_f - V_i)$$

$$Q_2 = |Q_{14}| + |Q_{41}| = \frac{3}{2}(p_f - p_i)V_f + \frac{5}{2} p_i (V_f - V_i)$$

$$\tau_{ciclo} = Q_1 - Q_2$$



Por hipótese $\frac{V_f}{V_i} = 2$, ou seja, $V_f = 2V_i$, daí:

$$Q_1 = \frac{3}{2}(p_f - p_i)V_i + \frac{5}{2} p_f \cdot V_i = \left(\frac{8}{2} p_f - \frac{3}{2} p_i\right)V_i$$

$$Q_2 = \frac{3}{2}(p_f - p_i)2V_i + \frac{5}{2} p_i V_i = \left(\frac{6}{2} p_f - \frac{1}{2} p_i\right)V_i$$

Seja η o rendimento:

$$\eta = \frac{\tau}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$\eta = 1 - \frac{\left(\frac{6}{2}p_f - \frac{1}{2}p_i\right)V_i}{\left(\frac{8}{2}p_f - \frac{3}{2}p_i\right)V_i} = 1 - \frac{6p_f - p_i}{8p_f - 3p_i}$$

Calculo do máximo rendimento (η_{carnot}) teoricamente admissível:

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{300}{900} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

A máquina térmica a ser lançada deve satisfazer a seguinte relação:

$$\eta = \frac{40}{100}\eta_{carnot}$$

$$1 - \frac{6p_f - p_i}{8p_f - 3p_i} = \frac{40}{100} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

$$1 - \frac{4}{15} = \frac{6p_f - p_i}{8p_f - 3p_i}$$

$$\frac{11}{15} = \frac{6p_f - p_i}{8p_f - 3p_i}$$

$$90p_f - 15p_i = 88p_f - 33p_i$$

$$2p_f = -18p_i$$

$$p_f = -9p_i$$

Relação que nunca será satisfeita, pois $P_f > 0$ e $P_i > 0$.

Do exposto, concluímos que o ciclo termodinâmico apresentado, com a hipótese $\frac{V_f}{V_i} = 2$ jamais atenderá às exigências de rendimento da máquina térmica a ser lançada.

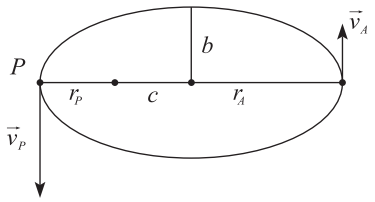
Questão 07

Um planeta desloca-se em torno de uma estrela de massa M, em uma órbita elíptica de semi-eixos a e $b(a > b)$. Considere a estrela fixa em um dos focos. Determine as velocidades mínima e máxima do planeta.

Dados:

- constante gravitacional: G;
- distância entre os focos: $2c$.

Resolução:



Conservando energia mecânica entre ofélio (A) e periélio (P) temos:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_P + Ep_P$$

$$\frac{mv_A^2}{2} - \frac{GMm}{r_A} = \frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_P}$$

$$\therefore v_A^2 - v_p^2 = 2GMm\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_P}\right)$$

Em que,

$r_p = (a - c)$, e

$r_A = (a + c)$

$$\therefore v_A^2 - v_P^2 = 2GM\left(\frac{1}{a+c} - \frac{1}{a-c}\right)$$

$$\therefore v_A^2 - v_P^2 = -\frac{4GMc}{a^2 - c^2} \qquad (1)$$

Conservando a quantidade de movimento angular do planeta temos:

$$L_A = L_p$$

$$mr_A v_A \operatorname{sen}\theta_A = mr_P \cdot v_P \cdot \operatorname{sen}\theta_P$$

$$\therefore (a+c)\cdot v_A = (a-c)\cdot v_P \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos:

Velocidade Mínima

$$v_A^2 - \left(\frac{(a+c)}{(a-c)}\cdot v_A\right)^2 = -\frac{4GMc}{(a^2-c^2)}$$

$$\therefore v_A^2\left(1 - \frac{(a+c)^2}{(a-c)^2}\right) = -\frac{4GMc}{(a^2-c^2)}$$

$$\therefore v_A^2\left(\frac{-4ac}{(a-c)^2}\right) = -\frac{4GMc}{(a^2-c^2)}$$

$$\therefore v_A = \sqrt{\frac{GM(a-c)^2}{a(a^2-c^2)}} = (a-c)\sqrt{\frac{GM}{a(a^2-c^2)}}$$

Velocidade Máxima:

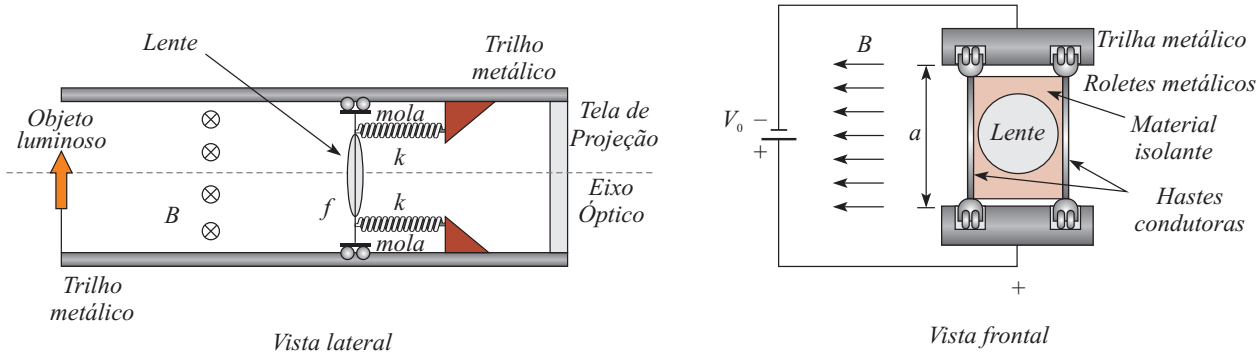
$$\left(\frac{(a-c)}{(a+c)}\cdot v_P\right)^2 - v_P^2 = -\frac{4GMc}{(a^2-c^2)}$$

$$v_P^2\left(\frac{(a-c)^2}{(a+c)^2} - 1\right) = -\frac{4GMc}{(a^2-c^2)}$$

$$v_P^2\left(\frac{-4ac}{(a+c)^2}\right) = -\frac{4GMc}{(a^2-c^2)}$$

$$\therefore v_P = \sqrt{\frac{GM(a+c)^2}{a(a^2-c^2)}} = (a+c)\sqrt{\frac{GM}{a(a^2-c^2)}}$$

Questão 08



Um aparato óptico é constituído de uma tela de projeção e uma lente delgada convergente móvel guiada por trilhos e fixada em um dos lados por duas molas, conforme ilustrado na figura. O aparato encontra-se imerso em um campo magnético uniforme B, ortogonal ao eixo óptico e às duas hastes condutoras de suporte da lente. Ao dispor-se um objeto luminoso na extremidade do aparato, com as molas relaxadas, verifica-se a formação de uma imagem nítida na tela de projeção de tamanho L_1.

Aplicando-se uma diferença de potencial constante entre as extremidades das hastes de suporte da lente através dos trilhos, observa-se a mudança na posição da lente, formando-se na tela de projeção uma nova imagem nítida, de tamanho L_2, sendo $L_2 > L_1$. Determine:

a) o tamanho do objeto luminoso;
b) a distância entre o objeto luminoso e a lente quando os trilhos não estão energizados;
c) o valor da ddp que faz formar a nova imagem nítida.

Dados:

- Intensidade do campo magnético: B
- Constante elástica de cada mola: k
- Distância focal da lente: f
- Comprimento de cada haste condutora: a
- Resistência elétrica de cada haste condutora: R

Observações:

- Desconsidere a resistência elétrica do trilho e da fonte elétrica.
- Desconsidere a massa do conjunto móvel da lente e os atritos nos roletes.

Resolução:

A distância entre o objeto e a tela é constante e será chamada de D.
No 1° caso (trilho não energizado):
$P_1 + P_1' = D$
No 2° caso (trilho energizado):
$P_2 + P_2' = D$
Δx é o deslocamento da lente entre os dois casos (veja a figura)

a) $\frac{i_1}{o} = \frac{-P_1'}{P_1} \Rightarrow \frac{-L_1}{o} = \frac{-P_1'}{P_1} \Rightarrow \frac{L_1}{o} = \frac{P_1'}{P_1} \; (I)$

De forma análoga: $\frac{L_2}{o} = \frac{P_2'}{P_2} \; (II)$

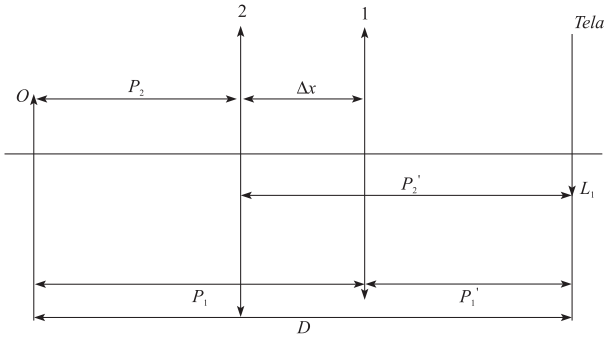
$\frac{L_1}{o} \cdot \frac{L_2}{o} = \frac{P_1' \cdot P_2'}{P_1 \cdot P_2} \quad (III)$

$\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_1'} = \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_2'} \Rightarrow \frac{1}{P_1} - \frac{1}{P_2} = \frac{1}{P_2'} - \frac{1}{P_1'} \Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{P_1 \cdot P_2} = \frac{P_1' - P_2'}{P_1' \cdot P_2'} \Rightarrow \frac{-\Delta x}{P_1 \cdot P_2} = \frac{-\Delta x}{P_1' \cdot P_2'} \Rightarrow \frac{P_1' \cdot P_2'}{P_1 \cdot P_2} = 1 \quad (IV)$

Substituindo (IV) em (III):

$\frac{L_1 \cdot L_2}{o^2} = 1$

$o = \sqrt{L_1 \cdot L_2}$



$P_1 - P_2 = \Delta x$
$P_1 = P_2 + \Delta x$

b) $\frac{L_1}{o} = \frac{f}{f - P_1} \Rightarrow \frac{o}{L_1} = \frac{f - P_1}{f}$

$\frac{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L_1} = 1 - \frac{P_1}{f} \Rightarrow P_1 = f \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L_1}\right)$

De maneira análoga: $P_2 = f \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}{L_2}\right)$

c) determinando o deslocamento da lente (Δx) em função de V_0:

$i = \frac{V_0}{R}$ (em cada haste)

$F = B\,i\,L = B \cdot \frac{V_0}{R} - a$

Equilíbrio: $F_R = 0$

$2F_{MAG} = 2F_{elástica}$

$$\frac{BV_0 a}{R} = K\Delta x$$

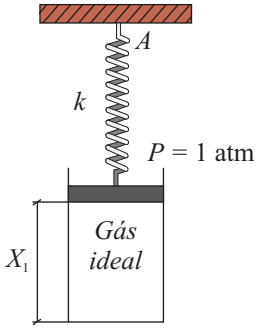
$$\Delta x = \frac{BV_0\, a}{K\, R}$$

$$|P_2 - P_1| = \Delta x = f\sqrt{L_1 \cdot L_2} \cdot \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right)$$

$$\frac{Bv_0 a}{K\, R} = f\sqrt{L_1 \cdot L_2}\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right)$$

$$v_0 = \frac{KRf}{Ba} \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} \cdot \left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{L_2}\right)$$

Questão 09



A figura acima representa um sistema, inicialmente em equilíbrio mecânico e termodinâmico, constituído por um recipiente cilíndrico com um gás ideal, um êmbolo e uma mola. O êmbolo confina o gás dentro do recipiente. Na condição inicial, a mola, conectada ao êmbolo e ao ponto fixo A, não exerce força sobre o êmbolo. Após $3520\,\text{J}$ de calor serem fornecidos ao gás, o sistema atinge um novo estado de equilíbrio mecânico e termodinâmico, ficando o êmbolo a uma altura de $1{,}2\,\text{m}$ em relação à base do cilindro. Determine a pressão e a temperatura do gás ideal:

a) na condição inicial;
b) no novo estado de equilíbrio.

Observação:

- Considere que não existe atrito entre o cilindro e o êmbolo.

Dados:

- Massa do gás ideal: $0{,}01\,\text{kg}$;
- Calor específico a volume constante do gás ideal: $1.000\,\text{J/kg}\cdot\text{K}$;
- Altura inicial do êmbolo em relação à base do cilindro: $X_1 = 1\,\text{m}$;
- Área da base do êmbolo: $0{,}01\,\text{m}^2$;
- Constante elástica da mola: $4.000\,\text{N/m}$;
- Massa do êmbolo: $20\,\text{kg}$;
- Aceleração da gravidade: $10\,\text{m/s}^2$; e
- Pressão atmosférica: $100.000\,\text{Pa}$.

Resolução:

Na situação inicial a pressão do gás equilibra a pressão atmosférica e a pressão devido ao peso do êmbolo:

$$p_0 = p_{atm} + \frac{P}{A}$$

$$\therefore p_0 = 10^5 + \frac{20 \cdot 10}{10^{-2}} = 1{,}2 \cdot 10^5\, Pa$$

Na situação final há também a força elástica:

$$p_f = p_{atm} + \frac{P}{A} + \frac{F}{A}$$

$$\therefore p_f = 10^5 + \frac{20 \cdot 10}{10^{-2}} + \frac{(0{,}2) \cdot 4 \cdot 10^3}{10^{-2}}$$

$$\therefore p_f = 2 \cdot 10^5\, Pa$$

Sendo que:

$$v_0 = (1) \cdot A$$

$$v_f = (1{,}2) \cdot A$$

Assim temos:

$$\frac{p_0 v_0}{T_0} = \frac{p_f \cdot v_f}{T_f}$$

$$\therefore \frac{(1{,}2\cdot 10^5)\cdot 1\cdot A}{T_0} = \frac{(2\cdot 10^5)\cdot(1{,}2)A}{T_f}$$

$$\therefore T_f = 2T_0 \qquad (1)$$

Escrevendo a 1ª Lei da Termodinâmica para o gás:

$$Q = \tau + \Delta U \qquad (2)$$

O trabalho do gás pode ser calculado sobre o sistema externo da forma:

$$\tau = \frac{K\Delta x^2}{2} + P_{atm}\cdot\Delta V + mg\,H = \frac{4\cdot 10^3(0{,}2)^2}{2}$$

$$+10^5\cdot(0{,}2)\cdot 10^{-2} + 20\cdot 10\cdot 0{,}2$$

$$\therefore \tau = 320\,\text{J}$$

Substituindo em (2):

$$3520 = 320 + \Delta U$$

$$\therefore \Delta U = 3200\,\text{J}$$

Podemos escrever ainda ΔU da forma:

$$\Delta U = Q_v = nC_v\Delta T = m\cdot c_v\cdot\Delta T$$

$$\therefore \Delta T = \frac{\Delta U}{m c_v} = \frac{3200}{10^{-2}\cdot 10^3} = 324\,K$$

$$\therefore (T_f - T_0) = 320\,K \qquad (3)$$

Substituindo (2) em (3) temos:

$$2T_0 - T_0 = 320$$

$$\therefore T_0 = 320\,K,\ \text{e}$$

$$T_f = 640\,K$$

Então:

$$Início\begin{cases} P_0 = 1{,}2\cdot 10^5\,P_a \\ T_0 = 320\,K \end{cases}$$

$$Fim\begin{cases} P_f = 2\cdot 10^5\,P_a \\ T_f = 640\,K \end{cases}$$

Questão 10

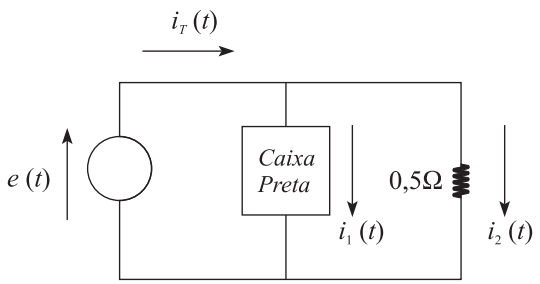


Figura 1a

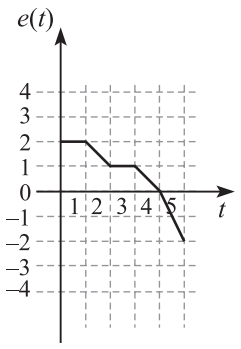


Figura 1b

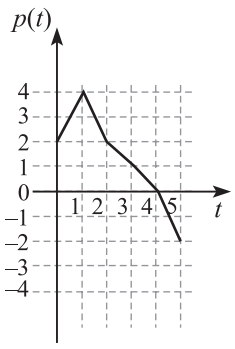


Figura 1c

A Figura 1a apresenta um circuito composto por uma fonte de tensão alimentando um elemento desconhecido, denominado *CAIXA PRETA*, em paralelo com uma resistência de $0{,}5\,\Omega$. As formas de onda da tensão fornecida pela fonte e da potência solicitada pelo circuito são apresentadas nas figuras $1b$ e $1c$, respectivamente. Pede-se:

a) o esboço dos gráficos das correntes $i_T(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$;

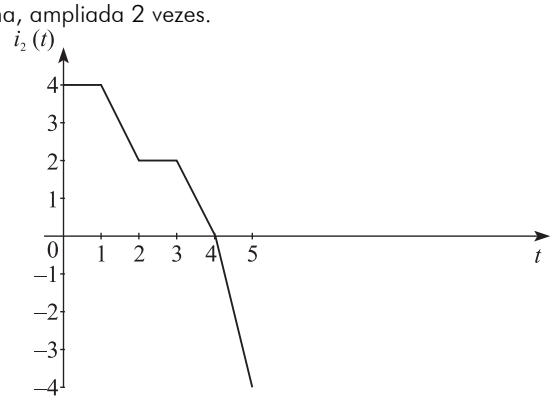
b) o esboço do gráfico da potência dissipada no resistor de $0{,}5\,\Omega$;

c) a energia consumida pelo circuito no intervalo de tempo entre 0 e $5\,\text{s}$.

Resolução:

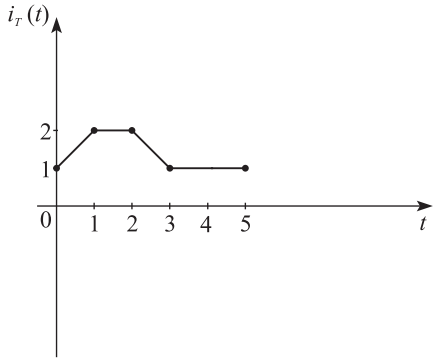
a) A corrente $i_2(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{e(t)}{0,5} = 2 \cdot e(t)$.

O gráfico terá a mesma forma, ampliada 2 vezes.

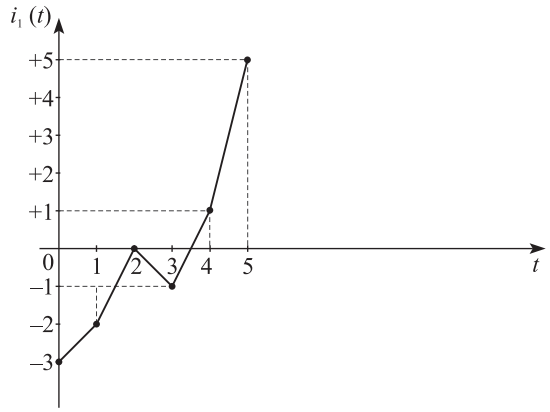


A corrente $i_T(t)$ obedece a relação:

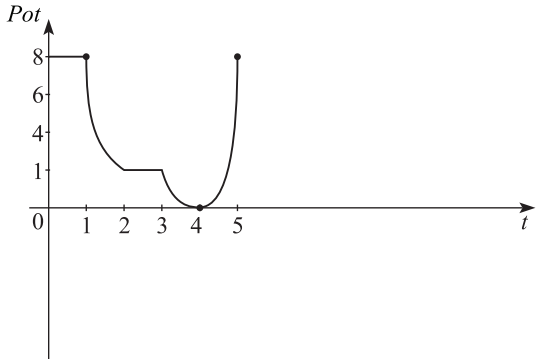
$P(t) = e(t) \cdot i_T(t)$ em cada intervalo. Dividindo a função a função $\frac{P(t)}{e(t)}$, em cada intervalo, vamos obter o gráfico a seguir:



O gráfico de $i_1(t) = I_T(t) - i_2(t)$, ou seja, devemos realizar a subtração, em cada intervalo, das respectivas funções de $I_T(t)$ e $i_2(t)$.



b) $Pot = R\left[i_2(t)\right]^2 = 0,5 \cdot i_2^2(t)$



c) A área sobre o gráfico $p(t)$ nos dá o valor numérico da energia consumida:

$$E_N \overset{N}{=} 2 \times \frac{(4+2) \cdot 1}{2} + \frac{2 \times 2}{2} - \frac{1 \times 2}{2} = 7\,\text{J}$$

Professores

André Villar
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

Colaboradores
Aline Alkmin
Carolina Chaveiro
José Diogo
Lilian Resende
Rubem Fraga

Digitação e Diagramação
Daniel Alves
João Paulo de Faria
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Luciano Lisboa
Rodrigo Ramos
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

Copyright©Olimpo2012

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo