"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: conjunto dos números naturais

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^+$: conjunto dos números reais não-negativos

i : unidade imaginária; $i^2 = -1$

$\arg z$: argumento do número complexo z

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}$

$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\}$

A^C : complementar do conjunto A

$P(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjuntos finito A

$\overline{AB}$: segmento de reta unindo os pontos A e B

$\widehat{AB}$: arco de circunferência de extremidades A e B

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\ n \in \mathbb{N}$$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

A) 6
B) 8
C) 10
D) 12
E) 14

Resolução:

Sejam u, c e d o número de moedas de 1, 5 e 10 centavos respectivamente. Devemos encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $u + 5c + 10d = 25 \quad (1)$.

Para $d = 2$, podemos ter $c = 1$ e $u = 0$ ou $c = 0$ e $u = 5$, portanto duas soluções.

Para $d = 1$, temos $c = \dfrac{15-u}{5}$, que tem 4 soluções, a saber:

$u = 0 \text{ e } c = 3$
$u = 5 \text{ e } c = 2$
$u = 10 \text{ e } c = 1$
$u = 15 \text{ e } c = 0$

Para $d = 0$, temos $c = \dfrac{25-u}{5}$, quem tem 6 soluções:

$u = 0 \text{ e } c = 5$
$u = 5 \text{ e } c = 4$
$u = 10 \text{ e } c = 3$
$u = 15 \text{ e } c = 2$
$u = 20 \text{ e } c = 1$
$u = 25 \text{ e } c = 0$

Assim, o total de soluções de (1) é $2 + 4 + 6 = 12$

Alternativa D

Questão 02

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

A) $\frac{2}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{9}$ D) $\frac{5}{9}$ E) $\frac{2}{3}$

Resolução:

A probabilidade de cada atirador não atingir o alvo é $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. Supondo que cada atirador atingir o alvo sejam eventos independentes, ao dispararem simultaneamente, a probabilidade do alvo não ser atingido é $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$. Assim, a probabilidade do alvo ser atingindo (ao menos uma vez) é igual a $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

Alternativa D

Questão 03

Sejam $z=n^2\left(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ\right)$ e $w=n\left(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen}15^\circ\right)$, em que n é o menor inteiro positivo tal que $(1+i)^n$ é real. Então $\frac{z}{w}$ é igual a

A) $\sqrt{3}+i$

B) $2\left(\sqrt{3}+i\right)$

C) $2\left(\sqrt{2}+i\right)$

D) $2\left(\sqrt{2}-i\right)$

E) $2\left(\sqrt{3}-i\right)$

Resolução:

Temos: $(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ\right)\right]^n=$

$=\left(\sqrt{2}\right)^n\cdot\left[\cos\left(n\cdot 45^\circ\right)+i\operatorname{sen}\left(n\cdot 45^\circ\right)\right]$.

Para que esse número seja real, devemos ter:

$n\cdot 45^\circ=180^\circ\cdot k,\ k\in Z \Leftrightarrow n=4k,\ k\in Z$.

O menor inteiro positivo que satisfaz essa condição é $n=4\cdot 1=4$.

Assim, para $n=4$:

$$\frac{z}{w}=\frac{4^2\left(\cos 45^\circ+i\operatorname{sen}45^\circ\right)}{4\left(\cos 15^\circ+i\operatorname{sen}15^\circ\right)}=4\left(\cos 30^\circ+i\operatorname{sen}30^\circ\right)$$

$$\Rightarrow\frac{z}{w}=2\left(\sqrt{3}+i\right)$$

Alternativa B

Questão 04

Se $\arg z=\frac{\pi}{4}$, então um valor para $\arg(-2iz)$ é

A) $-\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\frac{3\pi}{4}$ E) $\frac{7\pi}{4}$

Resolução:

Temos $z = |z| \operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$.

Então:

$$-2iz = (2\operatorname{cis}\pi)\left(\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)\left(|z|\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}\right) = 2|z|\operatorname{cis}\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 2|z|\operatorname{cis}\frac{7\pi}{4}$$

Logo $\arg(-2iz) = \frac{7\pi}{4}$

Alternativa E

Questão 05

Sejam r_1, r_2 e r_3 números reais tais que $r_1 - r_2$ e $r_1 + r_2 + r_3$ são racionais. Das afirmações:

I. Se r_1 é racional ou r_2 é racional, então r_3 é racional;

II. Se r_3 é racional, então $r_1 + r_2$ é racional;

III. Se r_3 é racional, então r_1 e r_2 são racionais,

é (são) sempre verdadeira(s)

A) apenas I.

B) apenas II.

C) apenas III

D) apenas I e II.

E) I, II e III.

Resolução:

Temos que $(r_1 - r_2) \in Q$ e $(r_1 + r_2 + r_3) \in Q$.

Assim:

(I) Se $r_1 \in Q$ então $(r_1 + r_2 + r_3) - r_1 = r_2 + r_3 \in Q$.
Logo $(r_2 + r_3) + (r_1 - r_2) = r_1 + r_3 \in Q$ e $(r_1 + r_3) - r_1 = r_3 \in Q$.

Se $r_2 \in Q$ então $(r_1 + r_2 + r_3) - r_2 = r_1 + r_3 \in Q$.
Logo $(r_1 + r_3) - (r_1 - r_2) = r_2 + r_3 \in Q$ e $(r_2 + r_3) - r_2 = r_3 \in Q$.
Portanto a afirmação (I) é verdadeira.

(II) Se $r_3 \in Q$ então $(r_1 + r_2 + r_3) - r_3 = r_1 + r_2 \in Q$.
A afirmação (II) é verdadeira.

(III) Já vimos que, se $r_3 \in Q$, então $r_1 + r_2 \in Q$.
Nesse caso:
$\frac{1}{2}\left[(r_1 + r_2) + (r_1 - r_2)\right] = r_1 \in Q$ e $\frac{1}{2}\left[(r_1 + r_2) - (r_1 - r_2)\right] = r_2 \in Q$.
A afirmação III é, portanto, verdadeira.
As três afirmações são sempre verdadeiras.

Alternativa E

Questão 06

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - \left(4 + \sqrt{2}\right)x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

A) $2\left(1 - \sqrt{2}\right)$.

B) $2\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

C) $4\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

D) $4 + \sqrt{2}$.

E) $\sqrt{2} - 4$.

Resolução:

$p(x) = x^3 - \left(4+\sqrt{2}\right)x^2 + ax + 16$

Relação de Girard: $x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2}$

$$\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 + 2x_2 + \dfrac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_2 - \dfrac{x_3}{2} = -2 - \sqrt{2} \\ \left(\dfrac{-5}{2} - \sqrt{2}\right)x_3 = -10 - 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Donde: $x_3 = 4$, $x_2 = -\sqrt{2}$ e $x_1 = 2\sqrt{2}$

Finalmente, $p(4) = 0$

$$64 - 16\left(4+\sqrt{2}\right) + 4a + 16 = 0$$

$$\therefore a = 4\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Alternativa C

Questão 07

Sabe-se que $(x+2y,\ 3x-5y,\ 8x-2y,\ 11x-7y+2z)$ é uma progressão aritmética com o último tempo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

A) -60

B) -30

C) 0

D) 30

E) 60

Resolução:

Temos:

$(3x-5y)-(x+2y) = (8x-2y)-(3x-5y) \Rightarrow y = \dfrac{-3}{10}x$

$(11x-7y+2z)-(8x-2y) = (8x-2y)-(3x-5y) \Rightarrow$

$z = x + 4y \Rightarrow z = x + 4\left(-\dfrac{3}{10}x\right) = -\dfrac{2}{10}x$

Como $11x - 7y + 2z = -127$ temos:

$11x - 7\left(-\dfrac{3}{10}x\right) + 2\left(-\dfrac{2}{10}x\right) = -127 \Rightarrow \dfrac{127}{10}x = -127 \Rightarrow$

$x = -10$

Assim $y = -\dfrac{3}{10}\cdot(-10) = 3$, $z = -\dfrac{2}{10}(-10) = 2$ e $x \cdot y \cdot z = (-10)(2)\ (3) = -60$

Alternativa A

Questão 08

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i-\sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x)=x-5$ obtém-se resto zero e que $p(1)=20\left(5+2\sqrt{3}\right)$. Então, $p(-1)$ é igual a

A) $5\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

B) $15\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

C) $30\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

D) $45\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

E) $50\left(5-2\sqrt{3}\right)$.

Resolução:

Como os coeficientes do polinômio são reais, $p(x)$ também admite como raízes $2i$ e $-\sqrt{3}-i$. Também temos que 5 é raiz, pois $p(x)=(x-5)\cdot Q(x)$.

Em sua forma fatorada, $p(x)$ é dado por:

$$p(x)=a(x-5)(x-2i)(x+2i)\left(x+\sqrt{3}-i\right)\left(x+\sqrt{3}+i\right),\ a\in R^*$$

$$\Leftrightarrow p(x)=a(x-5)\left(x^2+4\right)\left(x^2+2\sqrt{3}x+4\right),\ a\in R^*$$

De $p(1)=20\left(5+2\sqrt{3}\right)$ segue que:

$$a(1-5)\left(1^2+4\right)\left(1^2+2\sqrt{3}\cdot 1+4\right)=20\left(5+2\sqrt{3}\right)\Rightarrow$$

$$a(-20)\left(5+2\sqrt{3}\right)=20\left(5+2\sqrt{3}\right)\Rightarrow a=-1.$$

Portanto

$$p(-1)=-1\cdot\left[(-1)-5\right]\left[(-1)^2+4\right]\left[(-1)^2+2\sqrt{3}(-1)+4\right]$$

$$p(-1)=30\left(5-2\sqrt{3}\right)$$

Alternativa C

Questão 09

Um triângulo ABC tem lados com medidas $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{cm}$, $b=1\text{cm}$ e $c=\dfrac{1}{2}\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado a e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm é igual a

A) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

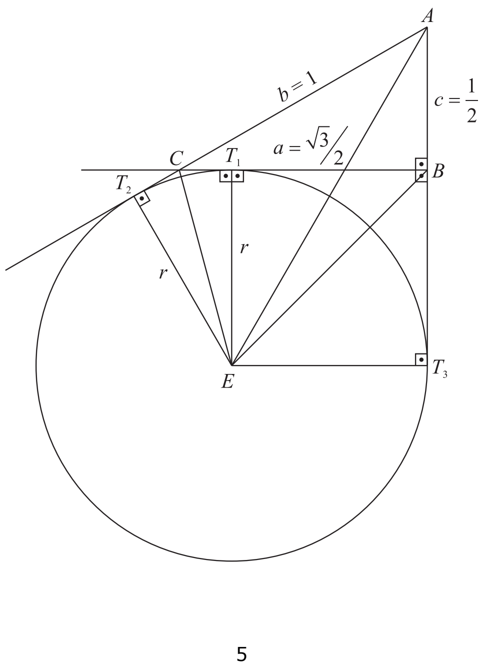
B) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

C) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{3}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

E) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{4}$

Resolução:



Como $1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$, o triângulo ABC é retângulo em B. Seja E o centro da ex-inscrita e r seu raio; sejam T_1, T_2 e T_3 os pontos de tangência, conforme a figura.

Temos

$$S_{\Delta ACE} + S_{\Delta ABE} - S_{\Delta BCE} = S_{\Delta ABC} \Leftrightarrow \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} - \frac{a \cdot r}{2} = \frac{a \cdot c}{2} \Leftrightarrow$$

$$r = \frac{a \cdot c}{b + c - a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6 - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{\left(6 + 2\sqrt{3}\right)}{\left(6 + 2\sqrt{3}\right)} \Rightarrow r = \frac{6\sqrt{3} + 6}{24} = \frac{\sqrt{3} + 1}{4}$$

Alternativa A

Questão 10

Sejam $A = (0,0)$, $B = (0,6)$ e $C = (4,3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{\sqrt{97}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{109}}{3}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ E) $\frac{10}{3}$

Resolução:
O baricentro G tem coordenadas dadas por:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{4}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3$$

$$G = \left(\frac{4}{3}, 3\right)$$

A distância de G a A é:

$$d = \sqrt{\left(x_G - x_A\right)^2 + \left(y_G - y_A\right)^2}$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 0\right)^2 + \left(3 - 0\right)^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

Alternativa B

Questão 11

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

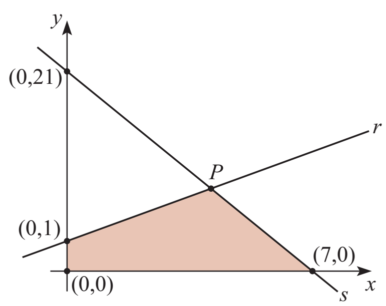
A) $\frac{19}{2}$. B) 10. C) $\frac{25}{2}$. D) $\frac{27}{2}$. E) $\frac{29}{2}$.

Resolução:

$$r: x - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$$

$$s: 3x + y - 21 = 0 \Rightarrow y = -3x + 21$$

Fazendo um esboço:



Para obter as coordenadas de P, resolve-se o sistema:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x + 1 \\ y = -3x + 21 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3}x + 1 = -3x + 21$$

$\therefore x = 6$ e $y = 3$

$P(6, 3)$

Calculando a área S pedida:

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 6 & 3 \\ 7 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 21$$

$\therefore D = -27$

$$S = \frac{|D|}{2} = \frac{27}{2} \text{ u.a.}$$

Alternativa D

Questão 12

Dados os pontos $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ e $C = (1, 1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

A) $r_{1,2} : \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0.$

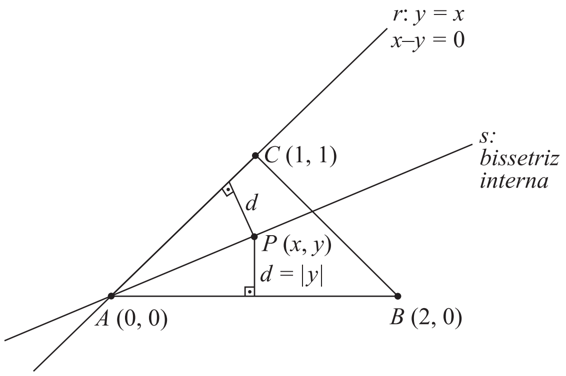
B) $r_{1,2} : \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0.$

C) $r_{1,2} : 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0.$

D) $r_{1,2} : \left(\sqrt{2} + 1\right)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$

E) $r_{1,2} : \left(\sqrt{2} + 1\right)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0.$

Resolução:



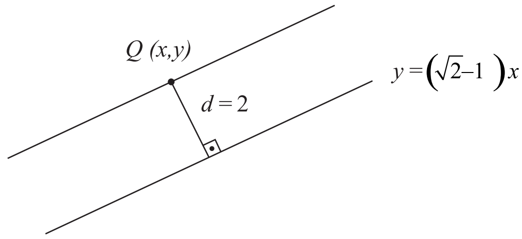
Usando da propriedade de acordo com a qual todo ponto da bissetriz é equidistante dos lados, tem-se:

$$d_{P,r} = |y|$$

$$\frac{|x - y|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = |y| \Rightarrow |x - y| = \sqrt{2}|y|$$

$$x - y = \pm\sqrt{2}y$$

$\therefore y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$ ou $y = -\left(\sqrt{2} + 1\right)x$



Considerando-se a bissetriz interna, sua equação é $y=\left(\sqrt{2}-1\right)x$. O L.G. procurado é o conjunto dos pontos cuja distância a esta bissetriz vale 2. Tomando-se um ponto $Q(x,\, y)$ pertencente a este L.G., temos:

$$\frac{\left|\left(\sqrt{2}-1\right)x-y\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+(-1)^2}}=2$$

$$\left|\left(\sqrt{2}-1\right)x-y\right|=2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

$$\left(\sqrt{2}-1\right)x-y=\pm 2\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Um importante algebrismo: multiplicar ambos os lados por $\left(\sqrt{2}+1\right)$. À direita, usar do fato que

$$\sqrt{2}+1=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$x-\left(\sqrt{2}+1\right)y=\pm 2\cdot\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \left(\sqrt{2}+1\right)y-x\pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}}=0$$

Alternativa E

Questão 13

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $\left(A\setminus B^C\right)\setminus C^C=A\cap\left(B\cup C\right)$;

II. $\left(A\setminus B^C\right)\setminus C=A\cup\left(B\cap C^C\right)^C$;

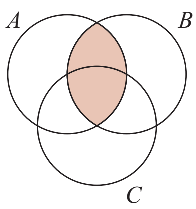
III. $B^C\cup C^C=\left(B\cap C\right)^C$,

é (são) sempre verdadeira(s) apenas

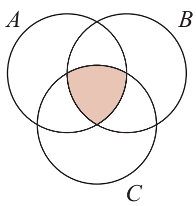
A) I. B) II. C) III. D) I e III. E) II e III.

Resolução:

$\left(A-B^C\right)\rightarrow$

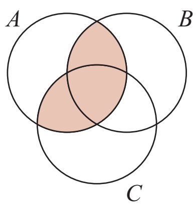


$\left(A-B^C\right)-C^C\rightarrow$



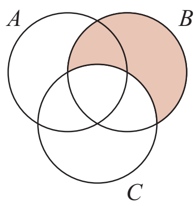
$=\left(A\cap B\cap C\right)$

$A\cap\left(B\cup C\right)\rightarrow$

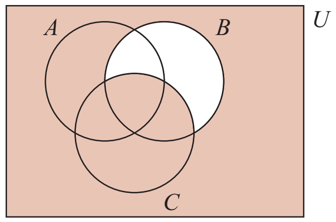


Portanto o item I é falso.

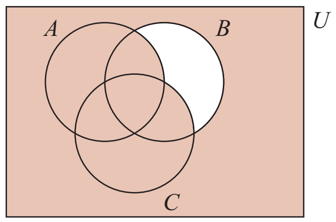
$\left(B\cap C^C\right)\rightarrow$



$\left(B-C^C\right)^C\rightarrow$



$A\cup\left(B\cap C^C\right)^C\rightarrow$



Logo o item II é falso.

Finalmente,
$B^C\cup C^C=U-\left(B\cap C\right)=\left(B\cap C\right)^C$
Logo o item III é verdadeiro.

Alternativa C

Questão 14

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não-vizinhos, tais que $n\left(P\left(A\right)\cup P\left(B\right)\right)+1=n\left(P(A\cup B)\right)$. Então, a diferença $n\left(A\right)-n\left(B\right)$ pode assumir

A) um único valor.
B) apenas dois valores distintos.
C) apenas três valores distintos.
D) apenas quatro valores distintos.
E) mais do que quatro valores distintos.

Resolução:

Seja A com m elementos e B com n elementos.
$P\left(A\right)$ é o conjunto das partes de A e possui 2^m elementos, incluindo o conjunto vazio, $\varnothing$.
$P\left(B\right)$ é o conjunto das partes de B e possui 2^n elementos, incluindo o conjunto vazio, $\varnothing$.
Se A e B são disjuntos, o único elemento da interseção de $P\left(A\right)$ e $P\left(B\right)$ é o conjunto vazio.

Daí: $n\left(P\left(A\right)\cup P\left(B\right)\right)+1=n\left(P\left(A\cup B\right)\right)$
$2^m+2^n-1+1=2^{m+n}$
$2^m+2^n=2^m\cdot 2^n$, dividindo por $2^m\cdot 2^n$
$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^m}=1$
Que só ocorre para $m=n=1$.

Alternativa A

Questão 15

Considere um número real $a \neq 1$ positivo, fixado, e a equação em x

$a^{2x} + 2\beta a^x - \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$

Das afirmações:

I. Se $\beta < 0$, então existem duas soluções reais distintas;

II. Se $\beta = -1$, então existe apenas uma solução real;

III. Se $\beta = 0$, então não existem soluções reais;

IV. Se $\beta > 0$, então existem duas soluções reais distintas,

é (são) sempre verdadeiras(s) apenas

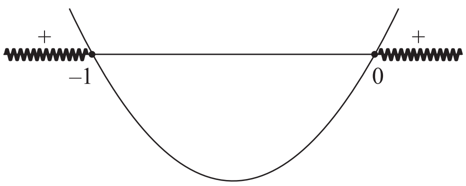
A) I.
B) I e III.
C) II e III.
D) II e IV.
E) I, III e IV.

Resolução:

$(a^x)^2 + 2\beta(a^x) - \beta = 0$

Condição de existência: $(2\beta)^2 + 4\beta \geq 0$

$\Rightarrow \beta^2 + \beta \geq 0$



$\beta \leq -1$ ou $\beta \geq 0$

I. (Falso). Não basta $\beta < 0$. A condição acima determina $\beta \leq -1$ ou $\beta \geq 0$, para que a^x possa assumir valor real.

II. (Verdadeiro) Se $\beta = -1$, a equação fica:

$(a^x)^2 - 2a^x + 1 = 0$

$(a^x - 1)^2 = 0$

$a^x = 1$

$\therefore x = 0$

III. (Verdadeiro) Se $\beta = 0$, a equação fica

$a^{2x} = 0$

$S = \varnothing$

IV. (Falso) Se $\beta > 0$, obtém-se

$$a^x = \frac{-2\beta \pm 2\sqrt{\beta^2 + \beta}}{2}$$

$a^x = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \beta}$

Se $\beta > 0$, a equação $a^x = -\beta - \sqrt{\beta^2 + \beta}$ não admite solução real.

Portanto, $a^x = -\beta + \sqrt{\beta^2 + \beta}$ e a solução é única.

Alternativa C

Questão 16

Seja $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{e^{-x} - e^x}{2}\right) + \arccos\left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} \right\}$. Então,

A) $S = \varnothing$.
B) $S = \{0\}$.
C) $S = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$.
D) $S = \mathbb{R}^+$.
E) $S = \mathbb{R}$.

Resolução:

Seja $\alpha = \text{arcsen}\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{2}\right)$ e $\beta = \text{arccos}\left(\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)$.

Logo $\text{sen}\,\alpha = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2}$ e $\cos\beta = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$ e $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$.

Como α e β são complementares, $\text{sen}\,\alpha = \cos\beta \Rightarrow \frac{e^{-x}-e^{x}}{2} = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \Rightarrow$

$2e^{x} = 2e^{-x} \Rightarrow e^{x} = \frac{1}{e^{x}} \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0\}$

Alternativa B

Questão 17

Seja $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\text{sen}(x)\cos(x) = \frac{2}{5}$. Então, o produto e a soma de todos os possíveis valores de $\text{tg}(x)$ são, respectivamente

A) 1 e 0.

B) 1 e $\frac{5}{2}$.

C) -1 e 0.

D) 1 e 5.

E) -1 e $-\frac{5}{2}$.

Resolução:

Como $(\text{sen}\,x)(\cos x) = \frac{2}{5}$,

nota-se que $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$

$\text{sen}(x)\cdot\cos(x) = \frac{2}{5} \quad \div(\cos^2 x)$

$\text{tg}\,x = \frac{2}{5}\sec^2(x) \Rightarrow 5\,\text{tg}\,x = 2(\text{tg}^2 x + 1)$

$2\,\text{tg}^2 x - 5\,\text{tg}\,x + 2 = 0$

Seja P o produto e S a soma,

usando relações de Girard:

$P = \frac{2}{2} = 1$

$S = \frac{5}{2}$

Alternativa B

Questão 18

A soma $\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha + k\pi)$, para todo $\alpha \in [0, 2\pi]$, vale

A) $-\cos(\alpha)$ quando n é par.

B) $-\text{sen}(\alpha)$ quando n é ímpar.

C) $\cos(\alpha)$ quando n é ímpar.

D) $\text{sen}(\alpha)$ quando n é par.

E) zero quando n é ímpar.

Resolução:

Seja $S=\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\pi)$, para todo $\alpha\in[0,2\pi]$.

$$S=\cos\alpha+\cos(\alpha+\pi)+\cos(\alpha+2\pi)+\cos(\alpha+3\pi)+\ldots+\cos(\alpha+n\pi)$$

Sabemos que $\cos(\alpha+n\pi)=\begin{cases}\cos\alpha,\ \text{se } n \text{ é par}\\ -\cos\alpha,\ \text{se } n \text{ é ímpar}\end{cases}$

Logo,

$$S=\begin{cases}0,\ \text{se } n \text{ é ímpar}\\ \cos\alpha,\ \text{se } n \text{ é par}\end{cases}$$

Alternativa E

Questão 19

Um cone circular reto de altura $1\ \text{cm}$ e geratriz $\frac{2\sqrt{3}}{3}\text{cm}$ é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}\text{cm}$, necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

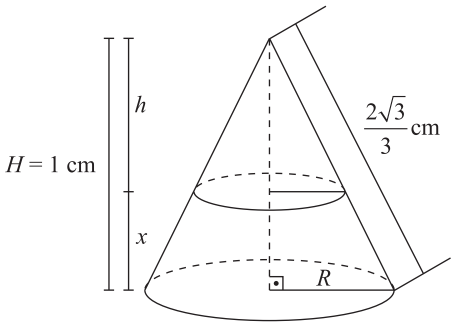
A) $\frac{1}{4}$.
B) $\frac{1}{3}$.
C) $\frac{1}{2}$.
D) $\frac{2}{3}$.
E) $\frac{3}{4}$.

Resolução:

Calculando o raio da base do cone

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=1^2+R^2$$

$$R=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



Seja V o volume do cubo:

$$V=\left[\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3=\frac{\pi}{243}\text{cm}^3$$

Seja V' o volume do novo cone:

$$\frac{V'}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R^2\cdot H}=\left(\frac{h}{H}\right)^3$$

Como $V'=V$ temos:

$$\frac{\frac{\pi}{243}}{\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot 1}=\left(\frac{h}{1}\right)^3$$

$$\frac{1}{27}=h^3$$

$$h=\frac{1}{3}\text{cm}$$

A distância x pedida e dada por:

$$x=H-h=\left(1-\frac{1}{3}\right)\text{cm}$$

$$x=\frac{2}{3}\text{cm}$$

Alternativa D

Questão 20

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de 120º e área igual a $3\pi\ \text{cm}^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

A) 4π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

B) 4π e $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{3}$.

C) 4π e $\pi\sqrt{2}$.

D) 3π e $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}$.

E) π e $2\pi\sqrt{2}$.

Resolução:

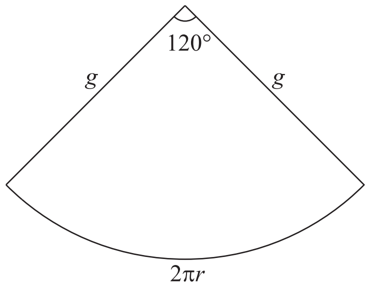
$A_{lateral} = 3\pi\ \text{cm}^2$

$\pi \cdot r \cdot g = 3 \cdot \pi$

$r \cdot g = 3 \qquad (1)$

$2\pi r = \dfrac{120°}{360°} \cdot 2\pi g$

$r = \dfrac{1}{3} g \Rightarrow g = 3r$



Voltando em (1) temos:

$r \cdot 3r = 3$

$r^2 = 1 \Rightarrow r = 1\ \text{cm}$ e $g = 3\ \text{cm}$

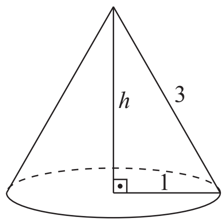
$\acute{A}rea\ total = \pi r^2 + \pi r g = \pi \cdot 1^2 + \pi \cdot 1 \cdot 3 = 4\pi\ \text{cm}^2$.

$Volume = \dfrac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot h = \dfrac{\pi h}{3} \qquad (2)$

Calculando h:

$3^2 = 1^2 + h^2$

$h = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ \text{cm}$



Voltando em (2) temos:

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{2}$

$V = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$

Alternativa A

Questão 21

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Resolução:

Denominemos grupo A e grupo B os dois conjuntos de 5 cartões.

Seja T o número total de distribuições dos cartões nos grupos A e B

$T = C_{10,5} . C_{5,5} = \dfrac{10!}{5!5!} = 252$

Seja n o número de casos em que os números 9 e 10 aparecem juntos.

$$n = \underbrace{C_{2,1}}_{\text{escolha do grupo}} \cdot \underbrace{C_{8,3}}_{\text{escolha dos 3 cartões que ficarão juntos com o 9 e o 10}} \cdot \underbrace{C_{5,5}}_{\text{5 cartões que formam o outro grupo}} = 2.\frac{8.7.6}{3.2.1}.1 = 112$$

Seja P a probabilidade pedida:

$P = \dfrac{n}{T} = \dfrac{112}{252} = \dfrac{4}{9}$

Questão 22

Determine os valores reais de x de modo que $\operatorname{sen}(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Resolução:

Seja $f(x)=\operatorname{sen}(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)$

$$f(x)=2\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right)$$

$$f(x)=2\left(\operatorname{sen}(2x)\cos\frac{\pi}{3}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos(2x)\right)$$

$$f(x)=2\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Como $\operatorname{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ tem máximo igual a 1, o máximo da função $f(x)$ é 2, que ocorre para $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.

$$\therefore S=\left\{x\in\mathbb{R}\mid x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\forall k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Questão 23

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1+x_1, 1+x_2,\ldots, 1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Resolução:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 1+x_2 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{vmatrix}$$

$\det A=x_1x_2\ldots x_n=x_1.x_1.q.\ldots x_1.q^{n-1}$, em que q é a razão de PG.

$$\det A=x_1^n.q^{1+2+\ldots+(n-1)}=x_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}=256$$

Substituído $x_1=\frac{1}{2}$ e $q=4$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n.4^{\frac{n(n-1)}{2}}=256$$

$$2^{-n}\left(2^2\right)^{\frac{n^2-n}{2}}=2^8$$

$$2^{n^2-2n}=2^8$$

$$n^2-2n=8$$

$$n=4$$

A ordem da matriz A é $n+1=5$.

Questão 24

Seja n um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A=\begin{bmatrix}n & \log_2 2 & -\log_2\frac{1}{2}\\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243\\ -5 & \log_5\frac{1}{125} & -\log_5 25\end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine n e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

Resolução:

$$A=\begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2 \frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5 \frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} n & 1 & 1 \\ n+5 & n & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -2n^2 - 25 - 3(n+5) + 5n + 2(n+5) + 15n$$

$$\det A = -2n^2 + 19n - 30 = 9$$

$$2n^2 - 19n + 39 = 0$$

$$n = 3$$

$$\therefore A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Obtendo a inversa de A:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a+b+c=1 \\ 8a+3b+5c=0 \\ -5a-3b-2c=0 \end{cases}$$

Donde $a=1, b=-1, c=-1$.

A soma pedida é -1.

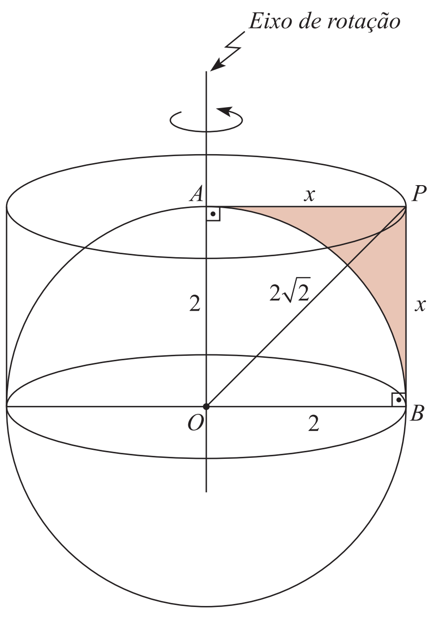
Questão 25

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio $2\,\text{cm}$ e um ponto P que dista $2\sqrt{2}\,\text{cm}$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor $\overset{\frown}{AB}$ em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Resolução:



Pelo teorema das tangentes, $PA = PB = x$.

$$\left(2\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 + x^2$$

$$x = 2\,\text{cm}$$

O quadrilátero $OBPA$ é um quadrado de lado $2\,\text{cm}$

a) Seja S a área pedida:

$$S = \frac{1}{2}4\pi R^2 + 2\pi R.R + \pi R^2$$

$$S = 5\pi R^2 = 5\pi\left(2\text{cm}\right)^2$$

$$S = 20\pi\,\text{cm}^2$$

b) Seja V o volume pedido:

$$V = \pi R^2.R - \frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi\left(2\,\text{cm}\right)^3$$

$$V = \frac{8}{3}\pi\,\text{cm}^3$$

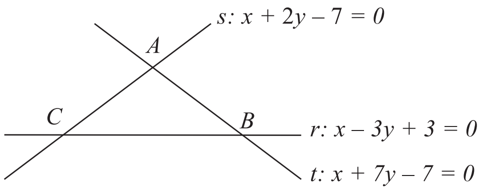
Questão 26

As interseções das retas $r: x - 3y + 3 = 0$, $s: x + 2y - 7 = 0$ e $t: x + 7y - 7 = 0$, duas a duas, respectivamente, definem os vértices de um triângulo que é a base de um prisma reto de altura igual a 2 unidades de comprimentos. Determine:

a) A área total da superfície do prisma.

b) O volume do prisma.

Resolução:



$$r \cap s$$

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 2y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$x = 3 \text{ e } y = 2$$

$$\therefore A = (3,2)$$

$$r \cap t$$

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$x = 0 \text{ e } y = 1$$

$$\therefore B = (0,1)$$

$$s \cap t$$

$$\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ x + 7y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$x = 7 \text{ e } y = 0$$

$$\therefore C = (7,0)$$

$$d_{AB} = \sqrt{(3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}$$

$$d_{AC} = \sqrt{(7-3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{20}$$

$$d_{BC} = \sqrt{(7-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{50}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}\left|3 + 14 + 0 - 7 - 0 - 0\right| = 5$$

a) Seja A_T a área pedida:

$$A_T = (d_{AB} + d_{AC} + d_{BC}).h + 2.S_{ABC}$$

$$A_T = \left(\sqrt{10} + \sqrt{20} + \sqrt{50}\right)2 + 2.5$$

$$A_T = \left(2\sqrt{10} + 4\sqrt{5} + 10\sqrt{2} + 10\right)\text{u.a.}$$

b) Seja V o volume pedido:

$$V = S_{ABC}.h$$

$$V = 5.2$$

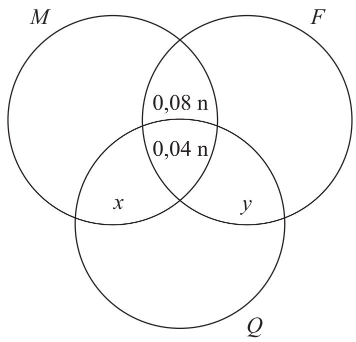
$$V = 10\text{u.v.}$$

Questão 27

Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Resolução:

Organizando os dados em um Diagrama de Venn:



Como $n(M \cup F \cup Q) = n(M) + n(F) + n(Q) - n(M \cap F) - \; -n(M \cap Q) - n(F \cap Q) + n(M \cap F \cap Q)$

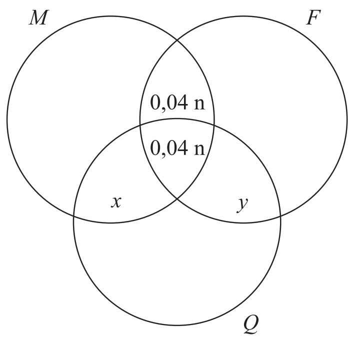
$$n = 0{,}48n + 0{,}36n + 0{,}32n - 0{,}12n - (0{,}04n + x) \; -(0{,}04n + y) + 0{,}04n$$

$$n = 1{,}16n - 0{,}2n - (x + y) + 0{,}04n$$

$n = n - 63$ Absurdo!

Assim, a questão apresentou erro que a tornou inconsistente.

<u>NOTA</u> Retirando-se a primeira ocorrência da palavra "apenas", obteríamos " 8% dos alunos estudam Física e Matemática".
Neste caso, o problema teria a solução:



$$n(M \cup F \cup Q) = n(M) + n(F) + n(Q) - n(M \cap F) \; -n(M \cap Q) - n(F \cap Q) + n(m \cap F \cap Q)$$

$$n = 0{,}48n + 0{,}36n + 0{,}32n - 0{,}08n - (x + 0{,}04n) \; -(y + 0{,}04n) + 0{,}04n$$

$$\therefore 0{,}04n = 63$$

$$n = 1575 \text{ alunos}$$

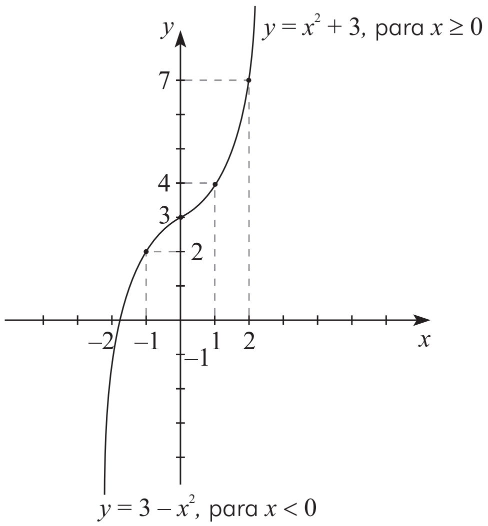
Questão para ser anulada.

Questão 28

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 3+x^2, & x \geq 0 \\ 3-x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Resolução:

Analisando o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esboçado abaixo notamos que ela é estritamente crescente, continua e não limitada, portanto bijetora.



Prova-se que f é crescente.

Para $x_1, x_2 \geq 0$: $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow x_1^2 + 3 > x_2^2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Para $x_1, x_2 < 0$: $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 3 - x_1^2 > 3 - x_2^2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Para a inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ teríamos as seguintes leis de formação:

i) $x = y^2 + 3$, para $y \geq 0$ e $x \geq 3$.

$\therefore y = \sqrt{x-3},\ x \geq 3$.

ii) $x = 3 - y^2$ para $y < 0$ e $x < 3$.

$\therefore y = -\sqrt{3-x},\ x < 3$.

De i e ii:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-3}, & x \geq 3 \\ -\sqrt{3-x}, & x < 3 \end{cases}$$

Questão 29

Determine os valores de $\theta \in [0, 2\pi]$ tais que $\log_{\text{tg}(\theta)} e^{\text{sen}(\theta)} \geq 0$.

Resolução:

$\log_{\text{tg}\,\theta} e^{\text{sen}\,\theta} \geq 0$

$\text{sen}\,\theta . \log_{\text{tg}\,\theta} e \geq 0$

Tomando $1 \neq \text{tg}\,\theta > 0$ vem:

$\text{sen}\,\theta \dfrac{\log_e e}{\log \text{tg}\theta} \geq 0$

$\dfrac{\text{sen}\,\theta}{\log_e \text{tg}\theta} \geq 0$

Caso 1:

$\text{sen}\,\theta \geq 0$ e $\log_e \text{tg}\theta > 0$

$\text{sen}\,\theta \geq 0$ e $\text{tg}\,\theta > 1$

$\therefore \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

Caso 2:

$\text{sen}\,\theta \le 0$ e $0 < \text{tg}\,\theta < 1$

$\therefore \pi < \theta < \dfrac{5\pi}{4}$

Dos casos 1 e 2 temos:

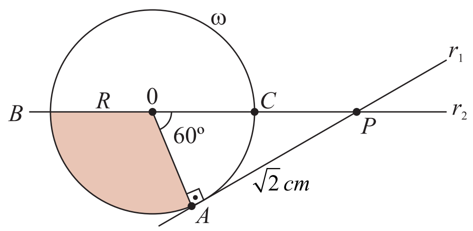
$S = \left\{\theta \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \pi < \theta < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

Questão 30

As retas r_1 e r_2 são concorrentes no ponto P, exterior a um círculo ω. A reta r_1 tangencia ω no ponto A e a reta r_2 intercepta ω nos pontos B e C diametralmente opostos. A medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é 60° e $\overline{PA}$ mede $\sqrt{2}\,\text{cm}$. Determine a área do setor menor de ω definido pelo arco $\overset{\frown}{AB}$.

Resolução:

O é o centro de ω.



Se a medida do arco $\overset{\frown}{AC}$ é 60°, então $\text{med}\left(A\hat{O}C\right) = 60^\circ$ e $\text{med}\left(A\hat{O}B\right) = 120^\circ$

A área haclunada S pedida é $\dfrac{1}{3}$ da área do círculo ω.

$S = \dfrac{1}{3}\pi R^2 \quad (1)$

Cálculo de R:

$\text{tg}\,60^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{R}$

$\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{R}$

$R = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\text{cm}$

Voltando em (1):

$S = \dfrac{1}{3}\pi.\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2 \text{cm}^2$

$S = \dfrac{2}{9}\pi\,\text{cm}^2$

Professores:

Bruno Fraga

Lafayette

Manim

Marcelo Moraes

Marcos Miola

Colaboradores

Aline Alkmin e Carolina Chaveiro

Digitação e Diagramação

Daniel Alves

Érika Rezende

João Paulo

Valdivina Pinheiro

Desenhistas

Leandro Bessa

Luciano Barros

Vinícius Eduardo

Projeto Gráfico

Leandro Bessa

Vinícius Eduardo

Supervisão Editorial

José Diogo

Valdivina Pinheiro

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.cursoolimpo.com.br

opirus EDITORA

olimpo