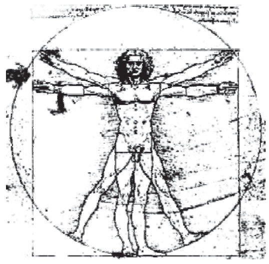
2010 ITA



"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

NOTAÇÕES

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R};\ a \le x \le b\}$

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a \le x < b\}$

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$A \backslash B = \{x;\ x \in A$ e $x \notin B\}$

$\sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_k,\ k \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k,\ k \in \mathbb{N}$

$\mathbb{C}$: conjunto dos números complexos

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$|z|$: módulo do número $z \in \mathbb{C}$

$\bar{z}$: conjugado do número $z \in \mathbb{C}$

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: conjunto das matrizes reais $m \times n$

$\det A$: determinante da matriz A

A^t : transposta da matriz A

A^{-1} : inversa da matriz inversível A

$\mathcal{P}(A)$: conjunto de todos os subconjuntos do conjunto A

$n(A)$: número de elementos do conjunto finito A

$\text{Arg } z$: argumento principal de $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, $\text{Arg } z \in [0, 2\pi[$

$f \circ g$: função composta das funções f e g

$f \cdot g$: produto das funções f e g

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são cartesianos retangulares.

Questão 01

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas I e III.
E) nenhuma.

Resolução:

I. A negação de $x \in (A \cap B)$ é $x \notin (A \cap B)$

$x \notin (A \cap B) \Rightarrow x \in \left(\overline{A \cap B}\right) \Rightarrow x \in \left(\bar{A} \cup \bar{B}\right) \Rightarrow x \in \bar{A}$ ou $x \in \bar{B} \Rightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. Aplicação direta da propriedade distributiva.

III. Se $x \in (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, então $x \in (A \backslash B)$ ou $x \in (B \backslash A)$.

Se $x \in (A \backslash B)$, então $x \in A$ e $x \notin B$, logo $x \in A \backslash (A \cap B)$ (1)

Se $x \in (B \backslash A)$, então $x \in B$ e $x \notin A$, logo $x \in B \backslash (A \cap B)$ (2)

De (1) e (2) conclui-se que $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, o que implica em $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (3)

Se $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, então $x \in (A \cup B)$ e $x \notin (A \cap B)$, logo $x \in A$ e $x \notin (A \cap B)$ ou $x \in B$ e $x \notin (A \cap B)$, o que implica em $x \in A$ e $x \notin B$ ou $x \in B$ e $x \notin A$, ou seja $x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, concluindo que $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (4)

De (3) e (4) temos $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Alternativa E

Questão 02

Considere conjuntos A, $B \subset \mathbb{R}$ e $C \subset (A \cup B)$. Se $A \cup B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ são os domínios das funções reais definidas por $\ln\left(x - \sqrt{\pi}\right)$, $\sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $\sqrt{\dfrac{x - \pi}{5 - x}}$, respectivamente, pode-se afirmar que

A) $C = \left]\sqrt{\pi}, 5\right[$.
B) $C = [2, \pi]$.
C) $C = [2, 5[$.
D) $C = [\pi, 4]$.
E) C não é intervalo.

Resolução:

Sendo $f(x) = \ln\left(x - \sqrt{\pi}\right)$, $g(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$ e $h(x) = \sqrt{\dfrac{x - \pi}{5 - x}}$, temos:

$A \cup B =$ Domínio de f

$A \cup B = \left\{x \in \mathbb{R} / x - \sqrt{\pi} > 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x > \sqrt{\pi}\right\}$

$A \cap C =$ Domínio de g

$A \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} / -x^2 + 6x - 8 \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 4\right\}$

$B \cap C =$ Domínio de h

$B \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x - \pi}{5 - x} \geq 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} / \pi \leq x < 5\right\}$

Como $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, temos:

$(A \cup B) \cap C = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 5\right\} \subset (A \cup B)$, Logo $C = (A \cup B) \cap C$

Portanto $C = \left\{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 5\right\} = [2, 5[$

Alternativa C

Questão 03

Se z é uma solução da equação em $\mathbb{C}$,

$$z - \bar{z} + |z|^2 = -\left[\left(\sqrt{2} + i\right)\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{3} - i\frac{\sqrt{2} + 1}{3}\right)\right]^{12},$$

pode-se afirmar que

A) $i(z - \bar{z}) < 0$.
B) $i(z - \bar{z}) > 0$.
C) $|z| \in [5, 6]$.
D) $|z| \in [6, 7]$.
E) $\left|z + \dfrac{1}{\bar{z}}\right| > 8$.

Resolução:

Sendo $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, temos:

$$z - \bar{z} + |z|^2 = x + yi - x + yi + x^2 + y^2$$
$$= x^2 + y^2 + 2yi$$

$$-\left[\left(\sqrt{2}+i\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - i\frac{\sqrt{2}+1}{3}\right)\right]^{12} = -\left[\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}+1}{3}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{3} - \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)i\right]^{12}$$
$$= -\left[1-i\right]^{12}$$
$$= -\left[\left(1-i\right)^2\right]^6$$
$$= -\left[1-2i+i^2\right]^6$$
$$= -\left(-2i\right)^6$$
$$= 64$$

Portanto

$$\left(x^2+y^2\right) + 2yi = 64$$

$$\left.\begin{array}{l} 2y = 0 \rightarrow y = 0 \\ x^2 = 64 \rightarrow x = \pm 8 \end{array}\right\} \rightarrow z = \pm 8$$

$$\left|z + \frac{1}{\bar{z}}\right| = \left|8 + \frac{1}{8}\right| = \left|-8 - \frac{1}{8}\right| > 8$$

Alternativa E

Questão 04

Os argumentos principais das soluções da equação em z,

$$iz + 3\bar{z} + \left(z + \bar{z}\right)^2 - i = 0,$$

pertencem a

A) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

B) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[$.

C) $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

D) $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right[$.

E) $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right[$.

Resolução:

Sendo $z = x + yi$, com x e y reais, temos:

$$iz + 3\bar{z} + \left(z + \bar{z}\right)^2 - i = 0$$
$$i\left(x + yi\right) + 3\left(x - yi\right) + \left(x + yi + x - yi\right)^2 - i = 0$$
$$xi - y + 3x - 3yi + 4x^2 - i = 0$$
$$\left(4x^2 + 3x - y\right) + \left(x - 3y - 1\right)\cdot i = 0$$

Deste resultado segue que

$$\begin{cases} 4x^2 + 3x - y = 0 & (1) \\ x - 3y - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Isolando x em (2) e substituindo em (1) temos:

$$4(3y+1)^2+3(3y+1)-y=0$$

$$36y^2+32y+7=0$$

$$\Delta=32^2-4\cdot 36\cdot 7=16$$

$$y=\frac{-32\pm 4}{72}$$

$y'=-\frac{28}{72}=-\frac{7}{18}$, que tem como par $x=-\frac{3}{18}$

ou

$y''=-\frac{36}{72}=-\frac{1}{2}$, que tem como par $x=-\frac{1}{2}$

Portanto, $z_1=-\frac{3}{18}-\frac{7}{18}i$ e $z_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ são as soluções da equação.

z_1 e z_2 pertencem ao terceiro quadrante,

$$\mathrm{tg}(\arg z_1)=\frac{7}{3}>1=\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\Rightarrow \arg z_1>\frac{5\pi}{4}\Rightarrow \arg z_1\in\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$$

e

$$\mathrm{tg}(\arg z_2)=1=\mathrm{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right)\Rightarrow \arg z_2=\frac{5\pi}{4}$$

Logo, $\arg z_1$ e $\arg z_2$ pertencem a $\left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right[$

Alternativa C

Questão 05

Considere a progressão aritmética ($a_1, a_2, \ldots, a_{50}$) de razão d. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n=10+25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n=4550$, então $d-a_1$ é igual a

A) 3.
B) 6.
C) 9.
D) 11.
E) 14.

Resolução:

$$\sum_{n=1}^{10} a_n=10+25d$$

$$\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=10+25d$$

$$a_1+a_{10}=2+5d$$

$$2a_1+4d=2 \qquad \text{(I)}$$

$$\sum_{n=1}^{50} a_n=4550$$

$$\frac{(a_1+a_{50})\cdot 50}{2}=4550$$

$$a_1+a_{50}=182$$

$$2a_1+49d=182 \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II):

$$2-4d+49d=182$$

$$d=4$$

Substituindo em (I):

$$2a_1+4\cdot 4=2$$

$$a_1=-7$$

Então: $d-a_1=4-(-7)=11$

Alternativa D

Questão 06

Sejam $f, g : R \to R$ tais que f é par e g é ímpar. Das seguintes afirmações:

I. $f \cdot g$ é ímpar,
II. $f \circ g$ é par,
III. $g \circ f$ é ímpar,

é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.
B) apenas II.
C) apenas III.
D) apenas I e II.
E) todas.

Resolução:

Definições:
Se f é par, então $f(-x) = f(x)$.
Se g é ímpar, então $g(-x) = -g(x)$.

Julgando os itens:

I. $f \cdot g$ é impar. (V)

Seja $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
Então:
$h(-x) = f(-x) \cdot g(-x)$
$h(-x) = f(x) \cdot (-g(x))$
$h(-x) = -f(x) \cdot g(x)$
$\therefore h(-x) = -h(x)$
h é ímpar.

II. $f \circ g$ é par. (V)

Seja $w(x) = f(g(x))$.
Então:
$w(-x) = f(g(-x))$
$w(-x) = f(-g(x))$
$w(-x) = f(g(x))$
$\therefore w(-x) = w(x)$
w é par.

III. $g \circ f$ é ímpar. (F)

Seja $u(x) = g(f(x))$
Então:
$u(-x) = g(f(-x))$
$u(-x) = g(f(x))$
$\therefore u(-x) = u(x)$
u é par.

Alternativa D

Questão 07

A equação em x,

$$\operatorname{arctg}\left(e^x+2\right)-\operatorname{arccotg}\left(\frac{e^x}{e^{2x}-1}\right)=\frac{\pi}{4},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

A) admite infinitas soluções, todas positivas.
B) admite uma única solução, e esta é positiva.
C) admite três soluções que se encontram no intervalo $\left]-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right[$.
D) admite apenas soluções negativas.
E) não admite solução.

Resolução:

Chamando $e^x=y$ e aplicando tangente aos dois lados da equação:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(y+2)-\operatorname{arcotg}\left(\frac{y}{y^2-1}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(y+2)-\operatorname{arcotg}\left(\frac{y^2-1}{y}\right)\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}(y+2)-\operatorname{arcotg}\left(y-\frac{1}{y}\right)\right)=1$$

$$\frac{y+2-y+\frac{1}{y}}{1+(y+2)\left(y-\frac{1}{y}\right)}=1$$

$$2+\frac{1}{y}=1+y^2-1+2y-\frac{2}{y}$$

$$2+\frac{3}{y}=y^2+2y$$

$$\therefore y^3+2y^2-2y-3=0$$

Como $y=-1$ é raiz:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore y^2+y-3=0$$

$$y=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2} \qquad y''=\frac{-1+\sqrt{13}}{2} \qquad y'''=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$$

$y'=-1$ e $y'''=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$ não convém pois são negativas e e^x, com x real, não pode ser negaivo.

Assim $e^x=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$, como $\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}>1$, x é real positivo, solução única.

Alternativa B

Questão 08

Sabe-se que o polinômio $p(x)=x^5-ax^3+ax^2-1$, $a\in\mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p:

I. Quatro das raízes são imaginárias puras.
II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.
III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

A) I.
B) II.
C) III.
D) I e III.
E) II e III.

Resolução:

$p(x)=x^5-ax^3+ax^2-1$

$p(-i)=0$

$(-i)^5-a(-i)^3+a(-i)^2-1=0$

$-i-ai-a-1=0$

$(-a-1)+(-a-1)\cdot i=0$

$-a-1=0 \Rightarrow a=-1$

Portanto:

$p(x)=x^5+x^3-x^2-1$

$p(x)=x^3(x^2+1)-(x^2+1)$

$p(x)=(x^3-1)(x^2+1)$

$p(x)=(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)$

Para obtermos todas as raízes de p, temos:

$p(x)=0$

$(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)=0$

$x-1=0 \quad (1)$

ou

$x^2+x+1=0 \quad (2)$

ou

$x^2+1=0 \quad (3)$

De (1) segue que $x=1$

De (2) segue que $x=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $x=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

De (3) segue que $x=i$ ou $x=-i$

Alternativa C

Questão 09

Um polinômio real $p(x)=\sum_{n=0}^{5} a_n x^n$, com $a_5=4$, tem três raízes reais distintas, a , b e c , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a+2b+5c=0 \\ a+4b+2c=6 \\ 2a+2b+2c=5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais têm multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

A) -4 .
B) -2 .
C) 2 .
D) 4 .
E) 6 .

Resolução:

Resolvendo o sistema: $\begin{cases} a+2b+5c=0 & (1) \\ a+4b+2c=6 & (2) \\ 2a+2b+2c=5 & (3) \end{cases}$

De (1) e (2) temos: $2b-3c=6$

De (2) e (3) temos: $6b+2c+7$

$\begin{cases} 2b-3c=6 \ (4) \\ 6b+2c=7 \ (5) \end{cases}$

De (4) e (5) temos: $11c=-11 \rightarrow c=-1$

Substituindo em (4) temos $b=\frac{3}{2}$ e

substituindo em (1) temos $a=2$

De acordo com o texto $a=2$ têm multiplicidade 1 e as outras duas raízes tem multiplicidade 2, logo

$P(x)=4.\left(x-\frac{3}{2}\right)^2.(x+1)^2.(x-2)$

$P(1)=4\left(-\frac{1}{2}\right)^2.(2)^2(-1)$

$P(1)=-4$

Alternativa A

Questão 10

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0=-1$ e $a_n=1+ia_{n-1}$, $n=1,2,\ldots,15$. Das afirmações:

I. $p(-1)\notin\mathbb{R}$,

II. $|p(x)|\leq 4\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$, $\forall\, x\in[-1,1]$,

III. $a_8=a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

A) I.
B) II.
C) III.
D) I e II.
E) II e III.

Resolução:

Como $a_n=1+i\cdot a_{n-1}$ e $a_0=-1$, podemos calcular alguns coeficientes:

$a_1=1+i(-1)=1-i$

$a_2=1+i\cdot(1-i)=2+i$

$a_3=1+i\cdot(2+i)=2i$

$a_4=1+i\cdot 2i=-1$

Ora, como $a_4=a_0$, teremos $a_5=a_2$, $a_6=a_2$ etc.

Assim $a_{n+4}=a_n$.

O polinômio pode ser reescrito:

$p(x)=a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\cdots+a_{15}x^{15}$ fica

$p(x)=a_0\left(x^0+x^4+x^8+x^{12}\right)+a_1\left(x+x^5+x^9+x^{13}\right)+a_2\left(x^2+x^6+x^{10}+x^{14}\right)+a_3\left(x^3+x^7+x^{11}+x^{15}\right)$

Analisando os itens:

I. F

$p(-1)=a_0(1+1+1+1)+a_1(-1-1-1-1)+a_2(1+1+1+1)+a_3(-1-1-1-1)$

$p(-1)=-1\cdot(4)+(1-i)\cdot(-4)+(2+i)\cdot 4+2i\cdot(-4)$

$p(-1)=-4-4+4i+8+4i-8i$

$\therefore p(-1)=0\in\mathbb{R}$.

II. V

Devemos usar a desigualdade triangular, que garante que $|a+b| \le |a|+|b|$, e, mais especificamente, $|a+b+c+d| \le |a|+|b|+|c|+|d|$.

Assim $|p(x)| \le \left|a_0\left(1+x^4+x^8+x^{12}\right)\right| + \left|a_1\left(x^1+x^5+x^9+x^{13}\right)\right| + \left|a_2\left(x^2+x^6+x^{10}+x^{14}\right)\right| + \left|a_3\left(x^3+x^7+x^{11}+x^{15}\right)\right|$

Para $x \in [-1, 1]$ temos $|x^n| \le 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Ainda, as propriedades de módulo garantem $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

$|p(x)| \le |a_0|\cdot 4 + |a_1|\cdot 4 + |a_2|\cdot 4 + |a_3|\cdot 4$

$|p(x)| \le 4\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\right)$

$|p(x)| \le 4\left(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$.

III. V

$a_8 = a_4$, posto que já sabemos que

$a_{n+4} = a_n$

Alternativa E

Questão 11

A expressão $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5 - \left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5$ é igual a

A) $2630\sqrt{5}$.
B) $2690\sqrt{5}$.
C) $2712\sqrt{5}$.
D) $1584\sqrt{15}$.
E) $1604\sqrt{15}$.

Resolução:

Expandindo a expressão $A = \left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5 - \left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5$, vem

$$A = \left(2\sqrt{3}\right)^5 + 5\left(2\sqrt{3}\right)^4\left(\sqrt{5}\right) + 10\left(2\sqrt{3}\right)^3\left(\sqrt{5}\right)^2 + 10\left(2\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{5}\right)^3 + 5\left(2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}\right)^4 + \left(\sqrt{5}\right)^5$$
$$-\left(2\sqrt{3}\right)^5 + 5\left(2\sqrt{3}\right)^4\left(\sqrt{5}\right) - 10\left(2\sqrt{3}\right)^3\left(\sqrt{5}\right)^2 + 10\left(2\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{5}\right)^3 - 5\left(2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}\right)^4 + \left(\sqrt{5}\right)^5$$
$$A = 10\cdot 144\cdot\sqrt{5} + 20\cdot 12\cdot 5\sqrt{5} + 50\sqrt{5}$$
$$A = 1440\sqrt{5} + 1200\sqrt{5} + 50\sqrt{5}$$
$$\therefore A = 2690\sqrt{5}$$

Alternativa B

Questão 12

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

A) $\frac{16}{27}$.
B) $\frac{49}{81}$.
C) $\frac{151}{243}$.
D) $\frac{479}{729}$.
E) $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$.

Resolução:
Fazendo os dois casos em que se pede, colocando-se "S" para sucesso (lâmpada acesa) e "F" para fracasso (lâmpada apagada), teremos dois casos:

1° caso: colocando-se 4 sucessos e 2 fracassos, a lei de distribuição binomial de probabilidade nos fornece:

$$P_1 = \frac{6!}{4!2!}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{15.16}{729} = \frac{80}{243}\text{, e}$$

2° caso: colocando-se 5 sucessos e 1 fracasso, a lei de distribuição binominal de probabilidade nos fornece:

$$P_2 = \frac{6!}{5!1!}\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{6.32}{729} = \frac{64}{243}$$

A probabilidade pedida será $P = P_1 + P_2 = \frac{144}{243} = \frac{16}{27}$

Alternativa A

Questão 13

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}),$$

em que $a_4 = 10$, $\det A = -1000$ e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão $d > 0$.

Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a

A) -4.
B) -3.
C) -2.
D) -1.
E) 1.

Resolução:

$$\det A = -1000 \Rightarrow 10a_1a_6 = -1000$$
$$a_1 \cdot (a_1 + 5d) = -100$$
$$a_1^2 + 5da_1 = -100 \qquad \text{(I)}$$

$a_4 = 10$

$a_1 + 3d = 10 \Rightarrow d = \frac{10 - a_1}{3}$ (II)

De (I) e (II):

$$a_1^2 + 5 \cdot \frac{(10 - a_1)}{3} a_1 + 100 = 0$$
$$-2a_1^2 + 50a_1 + 300 = 0$$
$$\Delta = 4900$$
$$a_1 = \frac{-50 \pm 70}{-4}$$

$a_1 = 30$ ou $a_1 = -5$

Para $a_1 = 30$:

$d = \frac{10 - 30}{3} = \frac{-20}{3}$, não convém.

Para $a_1 = -5$:

$$d = \frac{10 + 5}{3} = 5$$

$$\therefore \frac{a_1}{d} = \frac{-5}{5} = -1$$

Alternativa D

Questão 14

Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

Sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente. Então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente.

A) $\frac{1}{72}$ e 12.

B) $-\frac{1}{72}$ e -12.

C) $-\frac{1}{72}$ e 12.

D) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

E) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$.

Resolução:

Como (x_i), $i = 1, 2, 3, 4$ é uma P.G. de razão 3 e soma 80, temos: $\frac{x_1(3^4-1)}{3-1} = 80 \Rightarrow x_1 = 2$

Como (y_i), $i = 1, 2, 3, 4$ é uma P.G. de razão 4 e soma 225, temos: $\frac{y_1(4^4-1)}{4-1} = 255 \Rightarrow y_1 = 3$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = -\begin{vmatrix} 6 & 18 \\ 12 & 48 \end{vmatrix} = -(6\cdot 48 - 12\cdot 18) = -72$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = -\frac{1}{72}$$

$$(A^{-1})_{23} = -\frac{1}{72}\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{72}(18\cdot 192 - 54\cdot 48)$$

$$(A^{-1})_{23} = 12$$

Alternativa C

Questão 15

O valor da soma $\sum_{n=1}^{6} \operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, é igual a

A) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha\right]$.

B) $\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{729}\right)\right]$.

C) $\cos\left(\frac{\alpha}{243}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{729}\right)$.

D) $\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{243}\right)\right]$.

E) $\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos\alpha$.

Resolução:

Usando $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$, temos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

$$\sum_{n-1}^{6}\operatorname{sen}\left(\frac{2\alpha}{3^n}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{6}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{6}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^n}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{3^{n-1}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{3^6}\right) - \cos(\alpha)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{729}\right) - \cos(\alpha)\right]$$

Alternativa A

Questão 16

Se os números reais α e β, com a $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$, $0\le\alpha\le\beta$, maximizam a soma $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$, então α é igual a

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$.

B) $\frac{2\pi}{3}$.

C) $\frac{3\pi}{5}$.

D) $\frac{5\pi}{8}$.

E) $\frac{7\pi}{12}$.

Resolução:

Sabe-se que

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (1)$$

Substituindo $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$ em (1), vem:

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \sqrt{3}\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)$$

O máximo de $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta$ ocorre quando:

$$\cos\left(\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)=1$$

Como $0\le\alpha\le\beta$, então:

$$\alpha-\frac{2\pi}{3}=0$$

$$\therefore \alpha=\frac{2\pi}{3}$$

Alternativa B

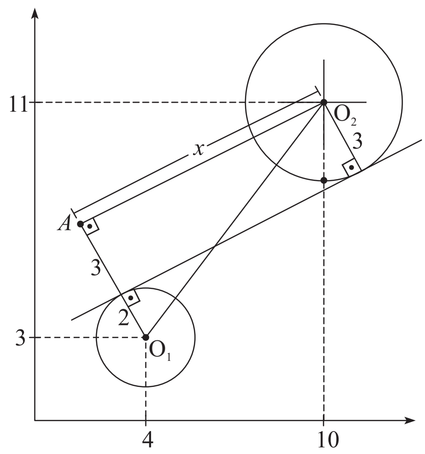
Questão 17

Considere as circunferências $C_1:(x-4)^2+(y-3)^2=4$ e $C_2:(x-10)^2+(y-11)^2=9$. Seja r uma reta tangente interna a C_1 e C_2, isto é, r tangencia C_1 e C_2 e intercepta o segmento de reta $\overline{O_1O_2}$ definido pelos centros O_1 de C_1 e O_2 de C_2. Os pontos de tangência definem um segmento sobre r que mede:

A) $5\sqrt{3}$.
B) $4\sqrt{5}$.
C) $3\sqrt{6}$.
D) $\frac{25}{3}$.
E) 9.

Resolução:

$$C_1:\begin{cases} centro\ (4,3) \\ Raio\ 2 \end{cases} \qquad C_2:\begin{cases} centro\ (10,11) \\ Raio\ 3 \end{cases}$$



A distância entre os centros é

$$d(O_1O_2)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$
$$d(O_1O_2)=\sqrt{6^2+8^2}$$
$$d(O_1O_2)=10$$

Aplicando Pitágoras no ΔAO_1O_2 temos:

$$d^2(O_1O_2)=x^2+5^2 \therefore 100=x^2+25 \therefore x=5\sqrt{3}$$

Alternativa A

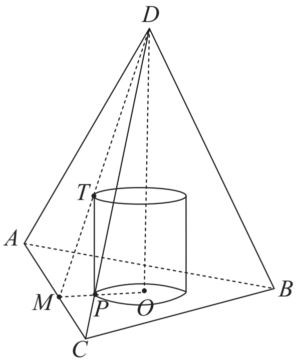
Questão 18

Um cilindro reta de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$.
B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$.
C) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$.
D) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$.
E) $\frac{\pi}{3}$.

Resolução:

Dados $a = 3\text{cm}$ e $PT = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\text{cm}$



$$OD = \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \qquad OM = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta DOM \sim \Delta TPM$$

$$\frac{PM}{OM} = \frac{PT}{OD}$$

$$PM = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{6}}.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$PM = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$OP = OM - PM = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Seja V o volume do cilindro:

$$V = \pi.OP^2.PT = \pi.\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2.\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}\text{cm}^3$$

Alternativa D

Questão 19

Um triângulo equilátero tem os vértices nos pontos A, B e C do plano xOy, sendo $B = (2,1)$ e $C = (5,5)$. Das seguintes afirmações:

I. A se encontra sobre a reta $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{11}{2}$,

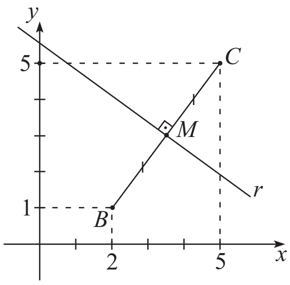
II. A está na intersecção da reta $y = -\dfrac{3}{4}x + \dfrac{45}{8}$ com a circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$,

III. A pertence às circunferências $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ e $\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{75}{4}$,

é (são) verdadeira(s) apenas

A) I.
B) II.
C) III.
D) I e II.
E) II e III.

Resolução:



$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$m_{BC} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3} \Rightarrow m_r = -\frac{3}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_m = \dfrac{5+2}{2} = \dfrac{7}{2} \\ y_m = \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow M = \left(\frac{7}{2}, 3\right)$$

$$r : y - 3 = -\frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$r : y = -\frac{3}{4}x + \frac{45}{8}$$

Como o triângulo ABC é equilátero, $A \in r$.

Seja C_1, a circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$:

$$C_1 : (x-5)^2 + (y-5)^2 = 5^2 = 25$$
$$A \in C_1$$

Seja C_2 a circunferência de centro M e raio $\dfrac{\overline{BC}\sqrt{3}}{2}$:

$$C_2 : \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 + (y-3)^2 = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{75}{4}$$
$$A \in C_2$$

Seja C_3 a circunferência de centro B e raio $\overline{BC}$:

$$C_3 : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5^2 = 25$$
$$A \in C_3$$

Alternativa E

Questão 20

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

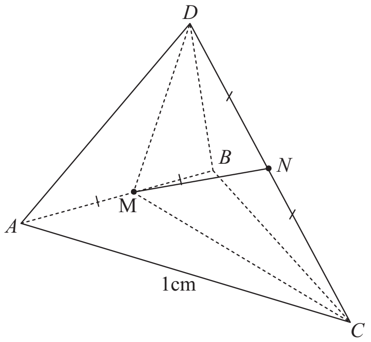
B) $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.

C) $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

D) $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

E) $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$.

Resolução:



$$\overline{MD} = \overline{MC} = \frac{\overline{AC}\sqrt{3}}{2} = \frac{1\sqrt{3}}{2}\text{cm}$$

O triângulo MDC é isósceles de base $\overline{DC}$ e N é ponto médio de $\overline{DC}$, logo $\overline{MN}$ é perpendicular a $\overline{DC}$.

No triângulo MND:

$$\overline{MD}^2 = \overline{MN}^2 + \overline{ND}^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \overline{MN}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{cm}$$

Seja S a área do triângulo MND:

$$S = \frac{\overline{MN}.\overline{ND}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{2}}{8}\text{cm}^2$$

Alternativa B

Questão 21

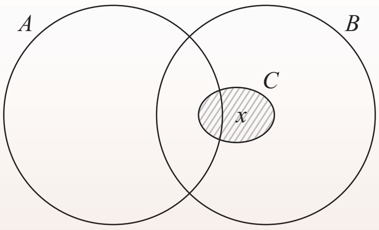
Sejam, A, B, e C conjuntos tais que $C \subset B$, $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$, $n(A \cup B) = 22$ e $(n(C), n(A), n(B))$ é uma progressão geométrica de razão $r > 0$.

A) Determine $n(C)$.

B) Determine $n(P(B \setminus C))$.

Resolução:

A) Notando que $B \supset C$, o diagrama de Venn fica:



Adotemos $n(C) = x$.

É dado que $n(B \setminus C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B)$.

Como $B \cap C = C$, $n(B - C) = 3n(C) = 6n(A \cap B)$.

Daí obtemos:

(I) $n(B - C) = 3x$

(II) $6n(A \cap B) = 3x$

$$n(A \cap B) = \frac{x}{2}$$

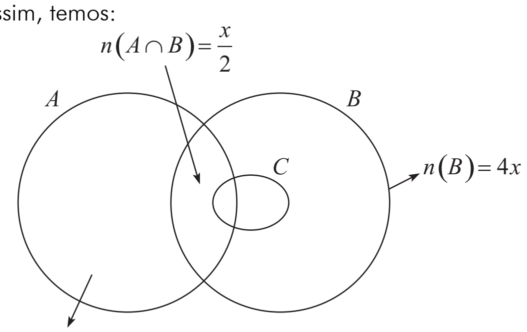
(III) Logo:

$$n(B)=n(B-C)+n(C)$$
$$n(B)=3x+x$$
$$n(B)=4x$$

Como $(n(C),n(A),n(B))=(x,n(A),4x)$ é uma P.G.:

$n(A)=\sqrt{x\cdot 4x}=2x$

Assim, temos:



$$n(A-B)=2x-\frac{x}{2}=\frac{3x}{2}$$

Como $n(A\cup B)=22$,

$$\frac{3x}{2}+4x=22$$

$\therefore n(C)=4$

B) $n(P(B-C))$: $\quad B-C$ tem $3x$ elementos

$n(B-C)=12$.

$\therefore n(P(B-C))=2^{12}=4096$.

Questão 22

A progressão geométrica infinita $(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$ tem razão $r<0$. Sabe-se que a progressão infinita $(a_1,a_6,\ldots,a_{5n+1},\ldots)$ tem soma 8 e a progressão infinita $(a_5,a_{10},\ldots,a_{5n},\ldots)$ tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita $(a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots)$.

Resolução:

$(a_1,a_6,\ldots,a_{5n+1},\ldots)$ é uma P.G. de razão r^5, logo:

$$S=\frac{a_1}{1-r^5}=8\Rightarrow a_1=8\left(1-r^5\right)\qquad (1)$$

$(a_5,a_{10},\ldots,a_{5n},\ldots)$ é uma P.G. de razão r^5, logo:

$$S=\frac{a_5}{1-r^5}=2\Rightarrow a_5=2\left(1-r^5\right)$$

Lembrando que $a_5=a_1\cdot r^4$:

$$2\left(1-r^5\right)=8\left(1-r^5\right)\cdot r^4$$

Como $-1<r<0$, devemos ter $r^4=\frac{1}{4}$, ou seja: $r=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Voltando em (1):

$$a_1=8\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5\right)=8\left(1+\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$a_1=\frac{2\left(4\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}$$

Seja S' a soma pedida:

$$S'=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{2\left(4\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}}}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{2\left(4\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+1}$$

$$S'=2\left(7-3\sqrt{2}\right)$$

Analise se a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$ é bijetora e, em caso afirmativo, determine a função inversa de f^{-1}.

Resolução:

Ao provarmos que a função $f(x)=\dfrac{3^x-3^{-x}}{2}$ é estritamente crescente, fica provado que a função é injetora.

Então notando que $f(x)=\left(3^x-\dfrac{1}{3^x}\right)\cdot\dfrac{1}{2}$, provemos que *f* é crescente.

Sejam *a*, *b* reais, *a* > *b*. A diferença $f(a)-f(b)$ é:

$$2\cdot\big(f(a)-f(b)\big)=3^a-\frac{1}{3^a}-\left(3^b-\frac{1}{3^b}\right)$$

$$2\cdot\big(f(a)-f(b)\big)=3^a-\frac{1}{3^a}-3^b+\frac{1}{3^b}$$

$$2\cdot\big(f(a)-f(b)\big)=3^a-3^b+\frac{1}{3^b}-\frac{1}{3^a}$$

$$2\cdot\big(f(a)-f(b)\big)=3^a-3^b+\frac{3^a-3^b}{3^a3^b}$$

Como $3^a>3^b$, temos $3^a-3^b>0$

$f(a)-f(b)>0$ $\therefore f$ é crescente

$\therefore f$ é injetora

Para provar que é subjetora basta mostrar que:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

De fato, $\lim\limits_{x\to\infty}3^x=\infty$, e $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$

também $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3^x}=0$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3^x}=\infty$

Então quando *x* assume valores "muito grandes", $f(x)$ torna-se "muito grande".

- $\lim\limits_{x\to\infty}3^x-\dfrac{1}{3^x}=\lim\limits_{x\to\infty}3^x-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{3^x}=\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x-\dfrac{1}{3^x}=\lim\limits_{x\to\infty}3^x-\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{3^x}=-\infty$

Logo *f* é sobrejetora

Determinando a inversa: seja $y=f^{-1}(x)$, então, adotando a troca de variáveis para determinação de $f^{-1}(x)$ temos:

$$x=\frac{3^y-3^{-y}}{2}\Rightarrow 2x=3^y-\frac{1}{3^y}$$

Logo: $\left(3^y\right)^2-2x\cdot3^y-1=0$, aplicando Báskara:

$$3^y=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}$$

$$3^y=x\pm\sqrt{x^2+1}$$

Notando que é impossível ter $3^y=x-\sqrt{x^2+1}$, pois $\forall y\in\mathbb{R},\ 3^y>0$ e $\forall x\in\mathbb{R},\ x-\sqrt{x^2+1}<0$.

$\therefore 3^y=x+\sqrt{x^2+1}$

logo, $y=\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

$$f^{-1}(x)=\log_3\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

Questão 24

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijetora e ímpar. Mostre que a função inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também é impar.

Resolução:

Seja $f^{-1}(x)$ a inversa da função *f* dada no enunciado.

Queremos provar que $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como *f* é bijetora, dado $\alpha \in \mathbb{R}$ existe um único $a \in \mathbb{R}$, tal que $f(a) = \alpha$.

Por definição, $f^{-1}(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Assim, $f^{-1}(\alpha) = f^{-1}(f(a)) = a$.

Analisemos $f^{-1}(-\alpha)$.

$f^{-1}(-\alpha) = f^{-1}(-f(a)) = f^{-1}(f(-a)) = -a$ (*f* é ímpar)

Assim,

$f^{-1}(-\alpha) = -a = -f^{-1}(\alpha)$

$\therefore f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$ c.q.d

Questão 25

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^{6} a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p, $-r$ também é raiz de p. Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

I. Se r_1 e r_2, $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p, então r_3 é imaginário puro.

II. Se r é raiz dupla de p, então r é real ou imaginário puro.

III. $a_0 < 0$.

Resolução:

Nas condições do enunciado, se $a_0 \neq 0$ garante-se que $x = 0$ não é raiz. Adicionalmente, como os coeficientes são reais vale o teorema das raízes complexas conjugadas:

I. (V) Como $|r_1| \neq |r_2|$ garante-se $\begin{cases} r_1 \neq r_2 \\ r_1 \neq -r_2 \end{cases}$

Então r_1, $-r_1$, r_2, $-r_2$ são quatro raízes distintas de $p(x)$.

Se $r_3 = a + bi$ é raiz, temos

$\begin{cases} a - bi & \text{é raiz (conjugado)} \\ -a - bi & \text{é raiz } (-r_3) \end{cases}$

Como são 6 raízes, $a = 0$ e $r_3 = bi \neq 0$ (imaginário puro)

II. (F) Suponhamos $r = a + bi$ como uma raiz dupla de p, com $a \neq 0$, $b \neq 0$, a e b reais.

Então $r' = a - bi$ também é raiz dupla.

Nas condições do problema, $r'' = -a - bi$ e $r''' = -a + bi$ também devem ser raízes do polinômio.

Ora, como $\overline{r''} = r'''$, nenhuma condição do problema é violada. Assim é possível r ser raiz dupla de p, sem ser real ou imaginário puro.

Um contra-exemplo adequado seria a escolha de raízes:

$r_1 = 1 + i$ $\quad r_2 = 1 + i$

$r_3 = 1 - i$ $\quad r_4 = 1 - i$

$r_5 = -1 - i$ $\quad r_6 = -1 + i$

Que dá origem a $p(x) = x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 4x^2 - 8x + 8$.

III. (F) Para provar que o item é falso basta um contra-exemplo.

No item anterior obtivemos $a_0 = 8$ o que já nega a afirmação.

Podemos também supor raízes:

r_1, r_2, $-r_1$, $-r_2$ reais e distintas.

$r_3 = i$, $r_4 = -i$. Assim, por relações de Girard,

$$(-r_1^2)(-r_2^2)(-i^2) = \frac{a_0}{a_6}$$

$$r_1^2 r_2^2 \cdot 1 = \frac{a_0}{a_6}$$

Como $a_6 = 1$ temos:

$$a_0 = (r_1 \cdot r_2)^2 > 0$$

Questão 26

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

A) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.
B) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

Resolução:

A) Probabilidade da união de dois eventos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = \frac{\left\lfloor \frac{90}{5} \right\rfloor}{90} + \frac{\left\lfloor \frac{90}{6} \right\rfloor}{90} - \frac{\left\lfloor \frac{90}{30} \right\rfloor}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

B) Temos dois casos, a primeira bola retirada ser um múltiplo de 6 e a segunda não ser (caso 1) ou a primeira não ser e a segunda não ser (caso 2).

Seja P a probabilidade pedida:

$$P = \frac{15}{90} \cdot \frac{75}{89} + \frac{75}{90} \cdot \frac{74}{89} = \frac{6675}{8010}$$

$$P = \frac{5}{6}.$$

Questão 27

Considere as matrizes $A \in M_{4x4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4x1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}; \; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

A) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial $AX = B$ tenha solução única.

B) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^t$, encontre X tal que $AX = B$.

Resolução:

A) $A \cdot X = B$

$$\begin{cases} ax + y + bz + w = b_1 & \times (-1) \\ bx + y + az + 0w = b_2 & \\ 0x + 2y + 0z + 0w = b_3 & \oplus \\ -ax + 2y + bz + w = b_4 & \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + bz + w = b_1 & (1) \\ bx + y + az + 0w = b_2 & (2) \\ 0x + 2y + 0z + 0w = b_3 & (3) \\ -2ax + y + 0z + 0w = b_4 - b_1 & (4) \end{cases}$$

Das linhas 3 e 4 concluímos que $y = \frac{b_3}{2}$ e que $-2ax = b_4 - b_1 - \frac{b_3}{2}$.

Fazendo $a \neq 0$:

$$x = \frac{-2b_4 + 2b_1 + b_3}{4a}$$

Voltando em (1) e (2):

$$az = b_2 - bx - y \Rightarrow z = \frac{b_2 - bx - y}{a}$$

$$w = b_1 - ax - y - bz$$

Do exposto, basta termos $a \neq 0$ para que o sistema admita solução única.