"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

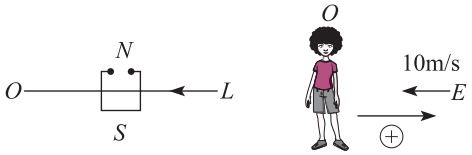
Questão 01

O cérebro humano determina a direção de onde provém um som por meio da diferença de fase entre as ondas sonoras que chegam ao ouvido. Um carro que se aproxima de um pedestre a uma velocidade de $36\ \text{km/h}$ faz soar continuamente a buzina, cuja frequência é $1200\ \text{Hz}$. Calcule a diferença de fase, em graus, entre o som que chega ao ouvido direito e o som que chega ao ouvido esquerdo do pedestre.

Dados:

- velocidade do som no local: $340\ \text{m/s}$;
- distância entre os ouvidos do pedestre: $20\ \text{cm}$;
- o pedestre está voltado para o norte;
- o carro se move no sentido leste-oeste diretamente para o local onde se encontra o pedestre.

Resolução:



$$\frac{f_o}{v \pm v_o} = \frac{f_E}{v \pm v_E} \Rightarrow \frac{f_o}{340 \pm 0} = \frac{1200}{340 - 10}$$

$$f_o = \frac{340}{330} \cdot 1200 = 1236{,}36\ Hz = \frac{34}{33} \cdot 1200\ Hz$$

$$\Delta\varphi = 360° \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} = 360° \cdot \frac{\Delta x}{v} \cdot f_o$$

$$\Delta\varphi = 360° \cdot \frac{0{,}20}{340} \cdot \frac{34}{33} \cdot 1200$$

$$\Delta\varphi \cong 261{,}82° \equiv 261{,}8°$$

Questão 02

Dois músicos com seus respectivos violões afinados participam de um dueto. No início do concerto, é ligado um aparelho de ar condicionado próximo a um deles e, após alguns minutos, percebe-se uma frequência de batimento f_{bat} produzida pela quinta corda dos violões, no modo fundamental. Considerando que ambas as cordas permaneçam com o comprimento inicial L_0, determine a variação de temperatura sofrida pela corda de violão próximo ao ar condicionado.

Dados:

- constante elástica da corda: k;
- massa específica linear da corda: μ;
- coeficiente de dilatação linear: α;
- frequência da quinta corda do violão afinado: f;

Observação:

- despreze o efeito da temperatura no outro violão.

Resolução:

Admitindo que na situação inicial a corda está distendida Δx_1 e que a força tensora inicial T_1 tem mesmo módulo da força elástica $(T_1 = k\Delta x_1)$

$$f = \frac{1v}{2L_o} = \frac{1}{2L_o}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}} \Rightarrow T_1 = (2L_o \cdot f)^2 \cdot \mu \text{ (equação I)}$$

Com o resfriamento da corda ela tenderia a sofrer uma contração Δx_2. Como o comprimento original L_o não se modifica, a corda sofreu uma distenção elástica Δx_2 para compensar a contração térmica Δx_2.

$$\Delta L = L_o \alpha \Delta\theta$$

$$(equação\ II)\ \Delta x_2 = L_o \alpha \Delta\theta,\ \Delta x_2 < 0\ e\ \Delta\theta < 0$$

A corda sofre um aumento de tração:

$$T_2 = T_1 + k\Delta x_2$$

$$f_{bat} = |f_2 - f_1|$$

$$f_{bat} = \frac{1}{2L_o}\sqrt{\frac{T_1 + k\Delta x_2}{\mu}} - \frac{1}{2L_o}\sqrt{\frac{T_1}{\mu}}$$

$$f_{bat} = \frac{1}{2L_o}\sqrt{\frac{T_1 + k\Delta x_2}{\mu}} - f$$

$$(f + f_{bat})^2 = \frac{1}{4L_0^2} \cdot \frac{(T_1 + k\Delta x_2)}{\mu}$$

$$T_1 + k\Delta x_2 = 4\mu L_0^2 (f + f_{bat})^2$$

Substituindo a equação (I):

$$(2L_o f)^2 \mu + k\Delta x_2 = 4\mu L_o^2 (f + f_{bat})^2$$

$$k\Delta x_2 = 4\mu L_o^2 (f_{bat}^2 + 2 \cdot f \cdot f_{bat})$$

Substituindo a equação (II):

$$k \cdot L_o \alpha |\Delta\theta| = 4\mu L_o^2 (f_{bat}^2 + 2f \cdot f_{bat})$$

$$|\Delta\theta| = \frac{4\mu L_o}{k \cdot \alpha} \cdot (f_{bat}^2 + 2 \cdot f \cdot f_{bat})$$

$$\Delta\theta = -\frac{4\mu L_o}{k\alpha}(f_{bat}^2 + 2f \cdot f_{bat})$$

Questão 03

Uma partícula de carga $+Q$ e massa m move-se pelo espaço presa a um carrinho. Esse movimento é regido pelas seguintes equações de posição nos três eixos, para k, ω_1, e ω_2 constantes:

$$x(t) = \frac{k}{\omega_1}\text{sen}(\omega_1 t) - \frac{k}{\omega_2}\text{sen}(\omega_2 t)$$

$$y(t) = \frac{k}{\omega_1}\cos(\omega_1 t) + \frac{k}{\omega_2}\cos(\omega_2 t)$$

$$z(t) = \frac{4k}{\omega_1 + \omega_2}\text{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

Durante todo o movimento, um campo elétrico atua na partícula, o que provoca uma força que tende a arrancá-la do carrinho.

Dado:

coordenadas nos três eixos do campo elétrico: $(0,\ 0,\ E)$.

Portanto:

a) Mostre que a partícula se move com velocidade escalar constante;

b) determine os instantes em que a força provocada pelo campo elétrico na partícula é ortogonal à sua trajetória;

c) determine as equações dos vetores aceleração tangencial e aceleração normal decompostos nos três eixos;

d) supondo que em $t_x = \dfrac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$ a partícula se solte do carrinho, determine as acelerações normal e tangencial da partícula imediatamente após t_x.

Resolução:

a) Derivando-se as coordenadas $\left(x(t),\, y(t),\, z(t)\right)$ em relação ao tempo:

- $$v_x(t) = \frac{k}{\omega_1}\cdot\omega_1\cdot\cos\omega_1 t - \frac{k}{\omega_2}\cdot\omega_2\cos\omega_2 t$$
  $$v_x(t) = k\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right)$$
  $$v_x(t) = -2k\,\mathrm{sen}\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\mathrm{sen}\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]$$
- $$v_y(t) = \frac{-k}{\omega_1}\cdot\omega_1\mathrm{sen}\omega_1 t - \frac{k}{\omega_2}\cdot\omega_2\mathrm{sen}\omega_2 t$$
  $$v_y(t) = -k\left(\mathrm{sen}\omega_1 t + \mathrm{sen}\omega_2 t\right)$$
  $$v_y(t) = -2k\,\mathrm{sen}\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right]$$
- $$v_z(t) = \frac{4k}{\omega_1+\omega_2}\cdot\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$$
  $$v_z(t) = 2k\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]$$

  Então: $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

  $$|v(t)|^2 = 4k^2\mathrm{sen}^2\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\mathrm{sen}^2\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right] +$$
  $$+4k^2\mathrm{sen}^2\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right]\cdot\cos^2\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)t\right] +$$
  $$+4k^2\cos^2\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right] = 4k^2$$
  $$\therefore\ |v(t)| = 2k$$

b) Se $\vec{F}_e \perp \vec{v}$, então: $\vec{F}\cdot\vec{v} = 0$

$$\vec{F}\cdot\vec{v} = (0,\,0,\,QE)\cdot\left(v_x, v_y, v_z\right)$$
$$\vec{F}\cdot\vec{v} = Q\cdot E\cdot v_z(t)$$
$$\vec{F}\cdot\vec{v} = Q\cdot E\cdot 2k\ \cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right] = 0$$
$$\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t\right] = 0$$
$$\therefore\ \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)t = \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow t = \frac{\pi + 2k\pi}{\omega_1+\omega_2}$$

c) Para o instante $t_x = \dfrac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}$:

$$v_x(t_x) = -2k\ \mathrm{sen}\underbrace{\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_1\omega_2}\right)\right]}_{0}\cdot\mathrm{sen}\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\right] = 0$$

$$v_y(t_x) = -2k\ \mathrm{sen}\underbrace{\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega_1\omega_2}\right)\right]}_{0}\cdot\cos\left[\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\right] = 0$$

$$v_z(t_x) = 2k\ \cos\underbrace{\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\cdot\frac{2\pi}{\omega_1\omega_2}\right]}_{0} = -2k$$

d) Quando $t = \dfrac{2\pi}{\omega_1 + \omega_2}$, temos:

$$v_x(t) = k\cos\left(\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\omega_1\right) - k\cos\left(\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\omega_2\right) = 0$$

$$v_x(t) = -2k\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right]\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\right)\right] = 0$$

$$v_y(t) = -k\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\omega_1\right) - k\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\omega_2\right)$$

$$v_y(t) = -2k\,\text{sen}\left[\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right]\cos\left[\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right] = 0$$

$$v_x(t) = 2k\cos\left[\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\frac{2\pi}{\omega_1+\omega_2}\right] = 2k\cos\pi = -2k$$

Então:

$\vec{v} = (0;0;v_z)$ e $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \left(0;0;\dfrac{QE}{m}\right)$

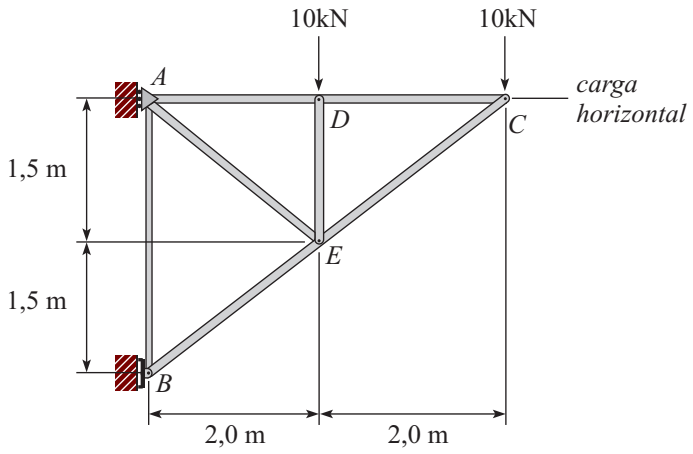
Como $\vec{v} \,//\, \vec{a}$, então:

$\vec{a}_N = \vec{0}$

e

$\vec{a}_T = \vec{a} = \left(0;0;\dfrac{QE}{m}\right)$

Questão 04

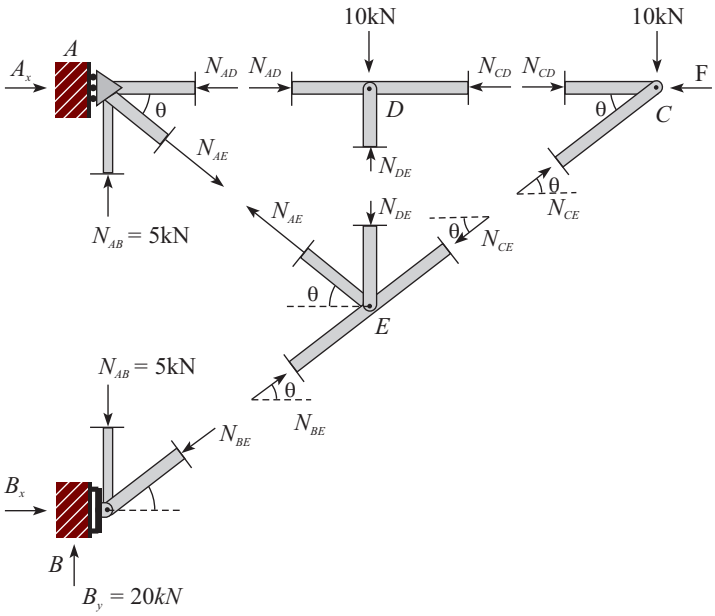


A figura acima mostra uma estrutura em equilíbrio de peso desprezível em relação ao carregamento externo. As barras desta estrutura só resistem aos esforços normais de tração ou de compressão. Sobre o nó D há uma carga vertical concentrada de 10 kN, enquanto no nó C há uma carga vertical concentrada de 10 kN e uma carga horizontal. Sabendo que o apoio A não restringe o deslocamento vertical e a força de compressão na barra AB é 5 kN, determine:

a) a intensidade, em kN, e o sentido da carga horizontal no nó C;
b) as reações de apoio, em kN, nos nós A e B, indicando suas direções e sentidos;
c) as barras que estão tracionadas, indicando suas magnitudes em kN;
d) as barras que estão comprimidas, indicando suas magnitudes em kN.

Resolução:

Para determinarmos a reação vertical para cima aplicada na estrutura pelo apoio B, isolamos a estrutura como um todo e concluímos que: $B_y = 20\text{ kN}$. Isolando-se os nós, um a um:



Analisando a geometria da imagem:

$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$ e $\cos\theta = \frac{4}{5}$

Analisando cada nó:

Nó B:

- $N_{BE} \cdot \text{sen}\,\theta + 5 = 20$

  $N_{BE} \cdot \frac{3}{5} = 15$

  $N_{BE} = 25\text{ kN}$
- $B_x = N_{BE} \cdot \cos\theta$

  $B_x = 25 \cdot \frac{4}{5}$

  $B_x = 20\text{ kN}$

Nó A:

- $N_{AE} \cdot \text{sen}\,\theta = 5$

  $N_{AE} \cdot \frac{3}{5} = 5$

  $N_{AE} = \frac{25}{3}\text{kN}$

Nó D:

- $N_{DE} = 10\text{ kN}$

Nó E:

- $N_{CE} \cdot \cos\theta + N_{AE} \cdot \cos\theta = N_{BE} \cdot \cos\theta$

  $N_{CE} + \frac{25}{3} = 25$

  $N_{CE} = \frac{50}{3}\text{kN}$

Nó C:

- $N_{CE} \cdot \cos\theta + N_{CD} = F$

  $\frac{50}{3} \cdot \frac{4}{5} + N_{CD} = F$

  $N_{CD} = F - \frac{40}{3}$

Entretanto, do nó D: $N_{CD} = N_{AD}$.

Logo, do nó A, temos: $A_x + N_{AE} \cdot \cos\theta = N_{CD}$

$A_x + \frac{25}{3} \cdot \frac{4}{5} = F - \frac{40}{3}$

$F = 20 + A_x$

O valor de F, portanto, depende do valor da reação que o apoio faz na estrutura sobre o nó A. A equação de equilíbrio rotacional nos fornece a mesma equação acima, logo, o problema se torna indeterminado estaticamente.

a) A carga F é dada por: $F = (20 + A_x)\text{kN}$. Valores positivos de F indicam uma força para a esquerda no nó C.

b) Em B, temos $B_x = 20\text{kN}$ (para a direita) e $B_y = 20\text{ kN}$ (para cima)

Em A, temos $A_x = F - 20$, onde valores positivos de A_x indicam uma força para direita.

c) Barra tracionada: AE.

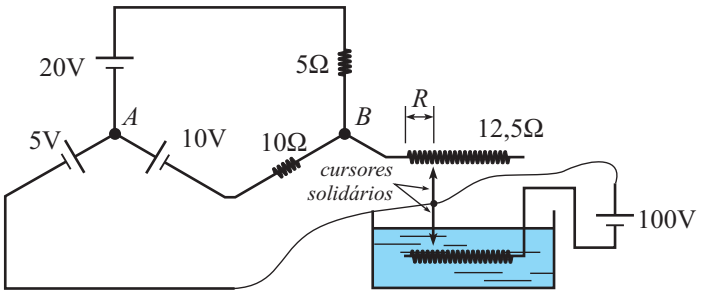
Módulo do esforço de tração: $N_{AE} = \frac{25}{3}\text{kN}$

d) As barras: AB, BE, CE, DE estão comprimidas.
Módulos dos esforços de compressão:

$N_{AB} = 5\text{ kN}$, $N_{BE} = 25\text{ kN}$, $N_{CE} = \frac{50}{3}\text{kN}$, $N_{DE} = 10\text{ kN}$

Observação: A barra AC pode estar tanto comprimida quanto tracionada em função da carga horizontal.

Questão 05



A figura acima apresenta um circuito elétrico composto de quatro baterias, dois resistores fixos e dois resistores variáveis (reostatos) lineares. Os dois reostatos são iguais e os dois cursores (que ajustam os valores das resistências) são solidários. Um dos reostatos é imerso em 100 litros de água a uma temperatura inicial de $20\,°\text{C}$ e um capacitor é conectado entre os nós A e B. Sabendo que o potencial de B é maior que o potencial de A e que o capacitor está com uma carga de $0{,}0625\text{ C}$, determine a temperatura da água após uma hora de funcionamento do circuito.

Dados:

- massa específica da água: $1\frac{\text{kg}}{\text{L}}$;
- capacitor: $1.000\ \mu\text{F}$;
- calor específico da água: $4.000\frac{\text{J}}{\text{kg}\,°\text{C}}$;
- rendimento do processo de aquecimento: 95%;
- resistência total do reostato: $12{,}5\ \Omega$.

Observação:

- despreze o tempo de carga do capacitor.

Resolução:

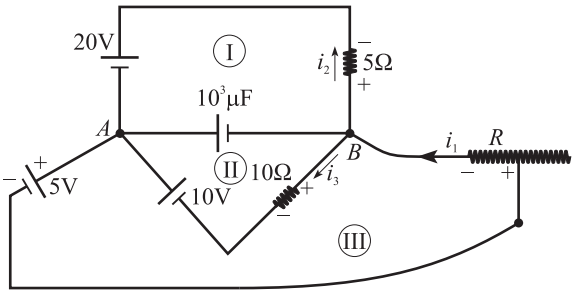
$Q = CU$

$6{,}25 \cdot 10^{-2} = 10^{3} \cdot 10^{-6} \cdot U$

$U_{BA} = 62{,}5\text{ V}$

Utilizando a 2ª Lei de Kirchhoff na malha I:

$+5i_2 + 20 - 62{,}5 = 0 \Rightarrow i_2 = +8{,}5\text{ A}$



Utilizando a 2ª Lei de Kirchhoff na malha II :

$+10i_3 - 10 - 62,5 = 0 \Rightarrow i_3 = 7,25 \text{ A}$

$i_1 = i_2 + i_3 = 8,5 + 7,25 = 15,75 \text{ A}$

Utilizando a 2ª Lei de Kirchhoff na malha III :

$-5 - 62,5 - Ri_1 = 0$

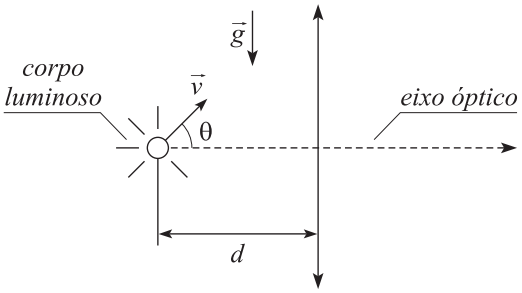
$-R \cdot 15,75 = 67,5$

$R = -4,3\ \Omega$

A questão apresenta dados inconsistentes.

Questão 06

Um corpo luminoso encontra-se posicionado sobre o eixo óptico de uma lente esférica convergente de distância focal f, distando d do vértice da lente. Esse corpo se encontra sob a ação da gravidade e é lançado com velocidade v, formando um ângulo θ com a horizontal.



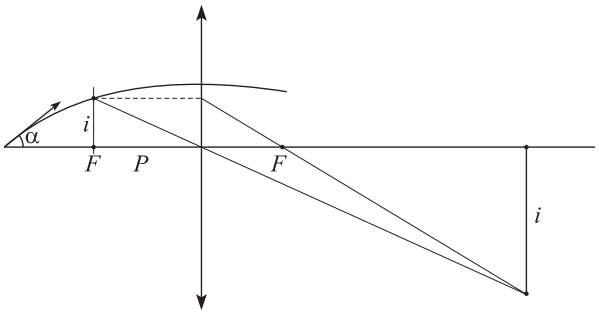
Determine o ângulo de lançamento θ necessário para que a distância entre esse eixo e a imagem do corpo luminoso produzida pela lente varie linearmente com o tempo, até o instante anterior ao de seu retorno ao eixo óptico.

Dados:

- $g = 10 \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$;
- $v = 4 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$;
- $f = 1,2 \text{ m}$;
- $d = 2 \text{ m}$.

Resolução:

Observe a figura:



Para que a distância da imagem até o eixo (i) tenha um aumento linear, devemos escrever:

Equações de Gauss:

$\rho = d - v\cos\theta(t) = 2 - 4\cos\theta(t)$

$$i = o\left(\frac{f}{f-p}\right) = \frac{o \cdot (1,2)}{-0,8 + 4\cos\theta(t)}$$

Sendo que i deve ser da forma:

$i = a(t)$ (linear)

Assim:

$$a(t) \cdot \left[-0,8 - 4\cos\theta(t)\right] = (1,2) \cdot \left(4\,\text{sen}\,\theta - \frac{gt}{2}\right)(t)$$

$\therefore 4a\cos\theta + 6 = 0$

$$\therefore a = \frac{-3}{2\cos\theta}$$

E: $-0,8a - 4,8\,\text{sen}\,\theta = 0$

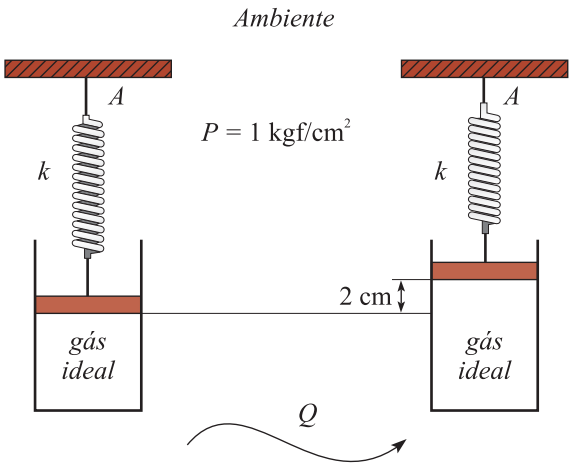
$\therefore 4,8\,\text{sen}\,\theta \cdot 0,8\left(\dfrac{3}{2\cos\theta}\right)$

$\therefore 2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \text{sen}\,2\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \begin{cases} \theta = 15° \\ ou \\ \theta = 75° \end{cases}$

Questão 07



No interior de um ambiente submetido à pressão atmosférica, encontra-se um cilindro que contém $10\,\text{mL}$ de um determinado gás ideal. Esse gás é mantido no interior do cilindro por um êmbolo móvel de área igual a $30\,\text{cm}^2$, conforme apresentado na figura acima. Inicialmente a mola não exerce força sobre o êmbolo. Em seguida, o gás recebe uma quantidade de calor igual a 50% daquele rejeitado por uma máquina térmica, operando em um ciclo termodinâmico, cujas características técnicas se encontram listadas abaixo. Como consequência do processo de expansão, observa-se que a mola foi comprimida em $2\,\text{cm}$. O rótulo de identificação do gás está ilegível, mas sabe-se que existem apenas duas opções – o gás é hélio ou oxigênio. Baseado em uma análise termodinâmica da situação descrita, identifique o gás.

Dados:

- temperaturas da fonte quente e da fonte fria da máquina térmica: $600\,\text{K}$ e $450\,\text{K}$;
- razão entre o rendimento da máquina térmica e o do ciclo de Carnot associado: 0,8;
- quantidade de calor recebido pela máquina térmica: $105\,\text{J}$;
- constante da mola: $3\times10^4\,\dfrac{\text{N}}{\text{m}}$;
- pressão atmosférica: $1\dfrac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$;
- $1\,\text{kgf} = 10\,\text{N}$;
- peso do êmbolo: desprezível.

Resolução:

O calor útil da máquina vale:

$\tau = 0,8\cdot\left(1-\dfrac{450}{600}\right)\cdot 105$

$\tau = 0,2\cdot 105$

Assim, o calor rejeitado vale:

$Q_F = 0,8\cdot 105$

E o gás então recebe:

$Q_{gás} = 0,5\cdot 0,8\cdot 105 = 42\,\text{J}$

O trabalho sobre o sistema externo vale:

$$\tau = P_0 \Delta V + \frac{k\Delta x^2}{2}$$

$$\tau = 10^5\left(60\cdot 10^{-6}\right) + \frac{3\cdot 10^4\left(2\cdot 10^{-2}\right)^2}{2}$$

$$\therefore \tau = 6 + 6 = 12 \text{ J}$$

Escrevendo então a 1ª Lei de Termodinâmica:

$$Q = \tau \times \Delta U$$

$$42 = 12 + \Delta U$$

$$\Delta U = 30 \text{J}$$

Sendo que:

$\Delta U = nC_V \Delta T = 30$ J , ou

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}\cdot \Delta T \approx 30 \text{ J} \qquad (1)$$

Ainda podemos escrever a Equação de Clapeyron no estado inicial da forma:

$$P_0 V_0 = nRT_0$$

$$10^5 \cdot \left(10\cdot 10^{-6}\right) = nRT_0$$

$$\therefore nR = \frac{1}{T_0} \qquad (2)$$

Escrevendo a equação geral:

$$\frac{PV}{T} = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

$$\frac{\left(10^5 \cdot \frac{\lambda \Delta x}{A}\right)\cdot 70\cdot 10^{-6}}{T} = \frac{\left(10^5\right)\cdot 10\cdot 10^{-6}}{T_0}$$

$$\frac{\left(10^5 \cdot \frac{3\cdot 10^4 \cdot 2\cdot 10^{-2}}{30\cdot 10^{-4}}\right)\cdot 70\cdot 10^{-6}}{T} = \frac{\left(10^5\right)\cdot 10\cdot 10^{-6}}{T_0}$$

$$\frac{\left(3\cdot 10^5\right)\cdot 70\cdot 10^{-6}}{T} = \frac{\left(10^5\right)\cdot 10\cdot 10^{-6}}{T_0}$$

$$\therefore T = 21T_0 \qquad (3)$$

Assim, substituindo (3) e (2) em (1):

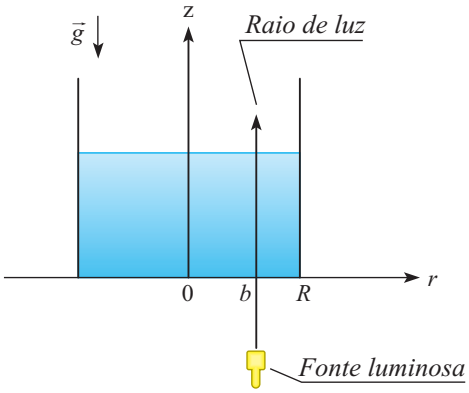
$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1}\cdot \Delta T = 30$$

$$\left(\frac{1}{T_0}\right)\cdot \frac{20\cdot T_0}{\gamma - 1} = 30$$

$$\gamma - 1 = \frac{20}{30}$$

$\therefore \gamma = \frac{5}{3} \approx 1{,}6$ (Gás Monoatômico, He)

Questão 08

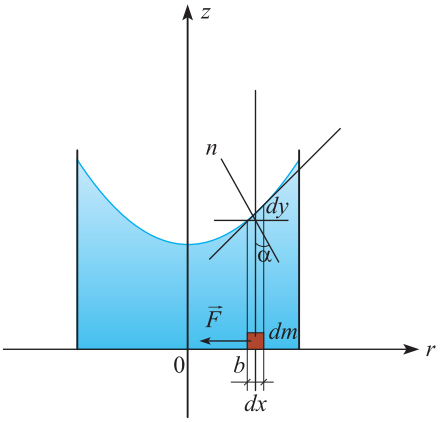


Um raio de luz monocromática incide perpendicularmente no fundo transparente de um balde cilíndrico, inicialmente em repouso. Continuando a sua trajetória, o raio de luz atravessa a água a uma distância b do eixo z (eixo de simetria do balde) até ser transmitido para o ar, de acordo com a figura acima.
Se o balde e a água giram em torno do eixo z a uma velocidade angular constante ω, calcule o menor valor de b para o qual a luz sofre reflexão total.

Dados:

- índice de refração da água: n;
- índice de refração do ar: 1;
- raio do balde: $R > b$.

Resolução:



Observe a figura. Durante a rotação, cada elemento de massa (dm) está submetida a uma força centrípeta devido à diferença de pressão tal que:

$$F_R = m \cdot a_a$$

$$F = dm \cdot a_a$$

$$\Delta p \cdot (a^2) = (\rho \cdot a^2 \cdot d_x) \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$(\rho_g d_y) \cdot (a^2) = (\rho \cdot a^2 \cdot d_x) \cdot \omega^2 \cdot r$$

$$\therefore \frac{d_y}{d_x} = \frac{\omega^2 \cdot r}{g}$$

Por fim,

$$\left(\frac{d_y}{d_x}\right) = \text{tg}\,\alpha = \left(\frac{\omega^2 \cdot b}{g}\right) \qquad (1)$$

Para o menor valor de b, (α) será o ângulo limite de reflexão total:

$$\text{sen}\,\alpha \cdot n = \text{sen}\,90^\circ \cdot 1$$

$$\therefore \text{sen}\,\alpha = \frac{1}{n} \qquad (2)$$

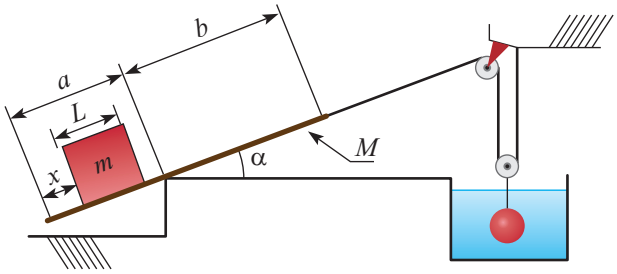
Substituindo (2) em (1), temos:

$$b = \left(\frac{g}{\omega^2}\right) \cdot \text{tg}\,\alpha$$

$$\therefore b = \left(\frac{g}{\omega^2}\right) \sqrt{\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha - 1}}$$

$$\therefore b = \left(\frac{g}{\omega^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2 \cdot 1}}$$

Questão 09



Uma placa rígida e homogênea de massa M e espessura desprezível está apoiada na quina de um degrau sem atrito e em equilíbrio, como mostrado na figura. Sobre a placa, encontra-se fixado um cubo de aresta L e massa m, a uma distância x do extremo esquerdo da placa. O extremo direito da placa está preso por um fio a um conjunto de polias, que sustenta uma esfera totalmente imersa em um líquido. Determine:

a) o valor de x, considerando que tanto o fio quanto a placa fazem um ângulo α com a horizontal;

b) o valor do raio R da esfera.

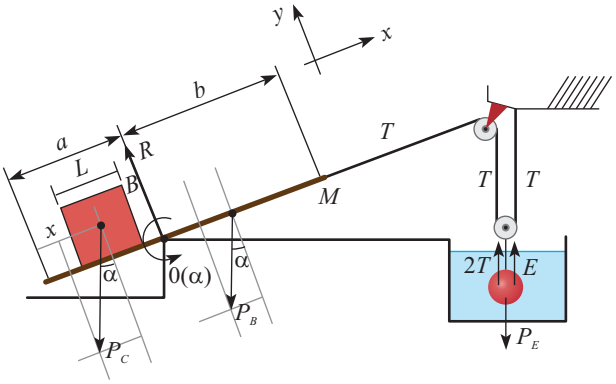
Dados:

- massa específica da esfera: ρ_e;
- massa específica do líquido: ρ_L;
- aceleração da gravidade: g.
- distância da quina ao extremo esquerdo da barra: a;
- distância da quina ao extremo direito da barra: b.

Observação:

- considere o fio ideal e despreze a massa das polias.

Resolução:



a) Para que a barra esteja em equilíbrio e preciso que a soma dos torques seja nula:

$$\sum \tau_0 = 0$$

Em relação a 0:

$$\tau_{P_C} + \tau_{P_B} + \tau_R + \tau_T = 0$$

Assim:

$$P_{C_x} \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + P_{C_y}\left(a - x - \frac{L}{2}\right) + P_{B_x}(0) - P_{B_y}\left[b - \frac{(a+b)}{2}\right] +$$

$$+R_x(0) + R_y(0) + T(0) = 0$$

$$mg\,\text{sen}\,\alpha\left(\frac{L}{2}\right) + mg\cos\alpha\left(a - x - \frac{L}{2}\right) - Mg\cos\alpha\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0$$

$$m\left(\frac{L}{2}\right)\text{sen}\,\alpha + m\left(a - \frac{L}{2}\right)\cos\alpha - mx\cos\alpha - M\cos\alpha\frac{(b-a)}{2} = 0$$

$$\therefore x(m\cos\alpha) = m\left[a\cos\alpha + \left(\frac{L}{2}\right)(\text{sen}\,\alpha - \cos\alpha)\right] - M\frac{(b-a)}{2}\cos\alpha$$

$$\therefore x = a + \left(\frac{L}{2}\right)(\text{tg}\,\alpha - 1) - \frac{M}{m}\left(\frac{b-a}{2}\right)$$

b) No eixo x podemos fazer

$$T - P_{B_x} - P_{C_x} = 0$$

$$\therefore T = P_{B_x} + P_{C_x}$$

$$\therefore T = Mg\,\text{sen}\,\alpha + mg\,\text{sen}\,\alpha$$

$$\therefore T = (M + m)\cdot g \cdot \text{sen}\,\alpha$$

E para o equilíbrio da esfera:

$$2T + E - P = 0$$
$$2T = P - E$$
$$2(M+m)g \cdot \text{sen}\,\alpha = \rho_E \cdot gV - \rho_L \cdot gV$$
$$\therefore V(\rho_E - \rho_L) = 2(M+m)\text{sen}\,\alpha$$
$$(\rho_E - \rho_L)\frac{4}{3}\pi \cdot R^3 = 2(M+m)\text{sen}\,\alpha$$
$$\therefore R = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)\frac{(M+m)\text{sen}\,\alpha}{\pi(\rho_E - \rho_L)}}$$

Questão 10

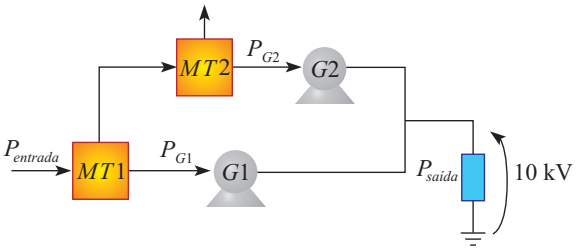


Figura 1

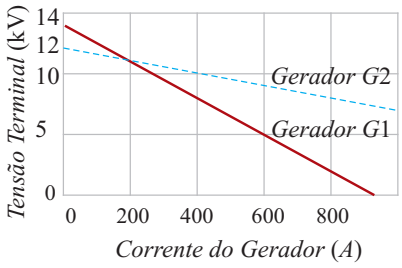


Figura 2

A Figura 1 apresenta a planta de uma usina térmica de ciclo combinado. As saídas das máquinas térmicas 1 e 2 ($MT1$ e $MT2$) alimentam os geradores $G1$ e $G2$, fornecendo-lhes, respectivamente, as potências P_{G1} e P_{G2}. As curvas de **Tensão Terminal** *versus* **Corrente do Gerador** dos dois geradores são apresentadas na Figura 2. Os dois geradores estão conectados em paralelo fornecendo uma potência de saída (P_{saida}) de $\frac{20.000}{3}$ kW, com uma tensão de 10 kV. Determine:

a) a resistência interna de cada gerador;
b) o percentual da carga total fornecida por cada gerador;
c) a perda na resistência de cada gerador;
d) as potências P_{G1} e P_{G2} fornecidas aos geradores;
e) o rendimento do sistema.

Dados:

- a máquina térmica MT_1 opera entre as temperaturas de $800\,°C$ e $300\,°C$ e o seu rendimento é 35% do rendimento máximo do ciclo de Carnot a ela associado;
- a máquina térmica MT_2 opera entre as temperaturas de $500\,°C$ e $50\,°C$ e o seu rendimento é 40% do rendimento máximo do ciclo de Carnot a ela associado.

Observação:

- considere nos geradores somente as perdas em suas resistências internas.

Resolução:

a)

$U = E - ri$

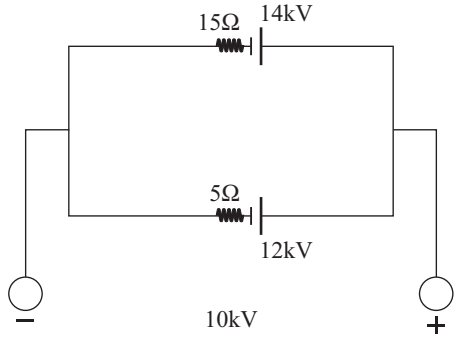
$5_k = 14_k - r \cdot 600$

$r = 15\Omega$

$U = E - ri$

$10 \cdot 10^3 = 12 \cdot 10^3 - r \cdot 400$

$r = \dfrac{2000}{400} = 5\Omega$



$-5i_2 - 12kv + 10kv = 0$

$-5i_2 = 2kv$

$i_2 = -400A$

$-15i_1 - 14kv + 10kv = 0$

$i_1 = \dfrac{4000}{15} = 266,67\ A$

$= \dfrac{800}{3} A$

b) $P_{saída} = \dfrac{20MW}{3} = P_{ot_1} + P_{ot_2}$

$\dfrac{20MW}{3} = U_1 i_1 + U_2 i_2$

$U_1 = E - r_1$

$10kv = 12kv - 5i \Rightarrow i = 400A \quad P_{ot_f} = 4000kW = \dfrac{12000kW}{3}$

$10kv = 14kv - 15i \Rightarrow i = 266,67A \quad P_{ot_f} = 2666,7kW$

$\dfrac{800}{3} A \qquad \dfrac{8000kW}{3}$

60% e 40%

c) $P_{ot} = Ri^2 = 15 \cdot \left(\dfrac{800}{3}\right)^2 = \dfrac{3.200kW}{3}$

$P_{ot} = Ri^2 = 5 \cdot (400)^2 = 800kW$

d) $\eta = \dfrac{v}{E} = \dfrac{10kv}{14kv} = \dfrac{10}{14}$

$\dfrac{8000kW}{3} = \dfrac{10}{14} \cdot P_{G_1} \qquad P_{G_1} = \dfrac{11200}{3} kW$

$\eta = \dfrac{v}{E} = \dfrac{10}{12}$

$4000kW = \dfrac{10}{12} P_{G_2} \qquad P_{G_2} = 4800kW$

e) $\eta_{real_{MT_1}} = 35\% \cdot \left(1 - \dfrac{573}{1073}\right) = \dfrac{175}{1073} \cong 0,163$

$$P_{entrada_1} = \frac{1073}{175} \cdot \frac{11200kW}{3} = \frac{68672kW}{3} \cong 22890kW$$

$$\eta_{real_{MT_2}} = 40\% \cdot \left(1 - \frac{323}{773}\right) = \frac{180}{773} \cong 0,233$$

$$P_{entrada} = -773 \cdot 4800kW = 61840kW$$

A potência de entrada de MT_2 corresponde ao calor rejeitado de MT_1.

Cálculo da porcentagem de calor rejeitado por MT_1 ($PCR1$)

$$PCR1 = 1 - \frac{175}{1073} = \frac{898}{1073}$$

Potência rejeitada $= \frac{1073}{898} \cdot \frac{61840}{3} = 24630kW$

$$P_o = 24630 + 22890 = 47520kW$$

$$\eta_{sistema} = \frac{\frac{20000}{3}kW}{47520kW} = 0,14 = 14\%$$

Professores:

Física
André Villar
Bruno Steger
Moisés Rodrigues
Rodrigo Bernadelli

Colaboradores
Aline Alkmin
Carolina Chaveiro
José Diogo
Moisés Humberto

Digitação e Diagramação
Daniel Alves
Érika Rezende
João Paulo
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Luciano Barros
Rodrigo Ramos
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

Copyright©Olimpo2013

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo