Questão 01

Os lados a, b e c de um triângulo estão em PA nesta ordem, sendo opostos aos ângulos internos $\widehat{A}, \widehat{B}$ e $\widehat{C}$, respectivamente. Determine o valor da expressão:

$$\frac{\cos\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}}{\cos\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}}$$

A) $\sqrt{2}$
B) 2
C) $2\sqrt{2}$
D) 3
E) 4

Resolução:

Seja r a razão da PA (a,b,c) formada pelos lados do triângulo. Assim podemos fazer $a=b-r$ e $c=b+r$. Da lei dos senos e das propriedades de proporções vem:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}}=\frac{b-r}{sen\,\widehat{A}}=\frac{b+r}{sen\,\widehat{C}}=\frac{(b-r)+(b+r)}{sen\,\widehat{A}+sen\,\widehat{C}},$$

de onde:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}}=\frac{2b}{sen\,\widehat{A}+sen\,\widehat{C}}$$

Simplificando e observando que $\operatorname{sen}\widehat{B}=2\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{B}}{2}.\cos\dfrac{\widehat{B}}{2}$ e que $\operatorname{sen}\widehat{A}+\operatorname{sen}\widehat{C}=2.\operatorname{sen}\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)$, vem

$$\frac{1}{2\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{B}}{2}\cos\dfrac{\widehat{B}}{2}}=\frac{2}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)}$$

Como $\hat{A}+\widehat{C}=180^\circ-\widehat{B}$, vem $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(90^\circ-\dfrac{\widehat{B}}{2}\right)=\cos\dfrac{\widehat{B}}{2}$. Portanto:

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{B}}{2}\cos\dfrac{\widehat{B}}{2}}=\frac{2}{\cos\dfrac{\widehat{B}}{2}.\cos\left(\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)}$$

Simplificando e observando que $\operatorname{sen}\dfrac{\widehat{B}}{2}=\operatorname{sen}\left(\dfrac{180^\circ-\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(90^\circ-\dfrac{\left(\widehat{A}+\widehat{C}\right)}{2}\right)=\cos\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)$, temos:

$$\frac{1}{\cos\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)}=\frac{2}{\cos\left(\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\cos\left(\dfrac{\widehat{A}-\widehat{C}}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\widehat{A}+\widehat{C}}{2}\right)}=2$$

Alternativa B

Questão 02

Sejam x e y números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi-1}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e-1}} = b \end{cases}$$

O valor de $\dfrac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

A) 1

B) $\sqrt{\dfrac{\pi}{e}}$

C) $\sqrt{\dfrac{a.e}{b.\pi}}$

D) $a-b$

E) $\dfrac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}$

Resolução:

Da segunda equação:

$\dfrac{\pi}{\log y^{x}} - \dfrac{e}{\log {}_x y} = b$

$\therefore \pi \log_x y - e \log_y x = b$

Resolvendo o sistema:

$\begin{cases} \pi \log_x y + e \log_y x = a \\ \pi \log_x y - e \log_y x = b \end{cases}$

Segue: $2\pi \log_x y = a + b \Rightarrow x^{a+b} = y^{2\pi}$

Analogamente $2e \log_y x = a - b \Rightarrow y^{a-b} = x^{2e}$

Assim,

$\dfrac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}} = \dfrac{x^{a+b}.x^{2e}}{y^{a-b}.y^{2\pi}} = \dfrac{y^{2\pi}.x^{2e}}{x^{2e}.y^{2\pi}} = 1$

Alternativa A

Questão 03

A função $f : \Re \to \Re$ é definida por:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3\,\text{sen}\,x - \text{sen}\,3x}{8 - 4\,\text{sen}\,x + 2\,\text{sen}\,2x \cos x}$$

Marque a opção verdadeira:

A) f não tem raízes reais

B) f é uma função ímpar

C) f é uma função par

D) $|f(x)| \le 1$

E) f é sobrejetora

Resolução:

Lembrando que $\text{sen}(3x) = 3\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3 x$

Desenvolve-se a lei de f:

$$f(x)=\ln\left(\frac{8+3\operatorname{sen}x-3\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}^3x}{8-4\operatorname{sen}x+2\cdot 2\operatorname{sen}x\cos x\cdot\cos x}\right)$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{8+4\operatorname{sen}^3x}{8-4\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}x\cdot\left(1-\operatorname{sen}^2x\right)}\right)$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{8+4\operatorname{sen}^3x}{8-4\operatorname{sen}^3x}\right)=\ln\left(\frac{2+\operatorname{sen}^3x}{2-\operatorname{sen}^3x}\right)$$

$$f(x)=\ln\left(2+\operatorname{sen}^3x\right)-\ln\left(2-\operatorname{sen}^3x\right)$$

Analisemos $f(-x)$, lembrando que $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$.

$$f(-x)=\ln\left(2-\operatorname{sen}^3x\right)-\ln\left(2+\operatorname{sen}^3x\right)$$

Assim, $f(-x)=-f(x)$.

Logo f é ímpar.

Alternativa B

Questão 04

A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

Resolução:

Se o primeiro termo (a_1), a razão (r) e o número de termo (n) formam uma PA de razão 1, então $a_1=r-1$ e $n=r+1$.

A soma dos termos da PA é 244, portanto:

$$\frac{(a_1+a_n).n}{2}=244\Leftrightarrow$$

$$\frac{(r-1+a_n).(r+1)}{2}=244$$

Dado que $a_n=a_1+(n-1).r=r-1+r^2$, temos:

$$\left(r-1+r-1+r^2\right)(r+1)=488\Leftrightarrow$$

$$\left(r^2+2r-2\right).(r+1)=488$$

Como $r^2+2r-2=(r+1)^2-3$ e $488=61\cdot 8$, vem:

$$\left[(r+1)^2-3\right].(r+1)=61\cdot 8$$

Onde, por inspeção, obtermos a solução com $r+1=8$, ou seja, $r=7$.

Alternativa A

Questão 05

Determine o produto dos valores máximo e mínimo de y que satisfazem às inequações dadas para algum valor de x.

$$2x^2-12x+10\le 5y\le 10-2x$$

A) $-3,2$
B) $-1,6$
C) 0
D) $1,6$
E) $3,2$

Resolução:

A região dos pontos (x,y) do plano procurada obedece simultaneamente ás inequações:

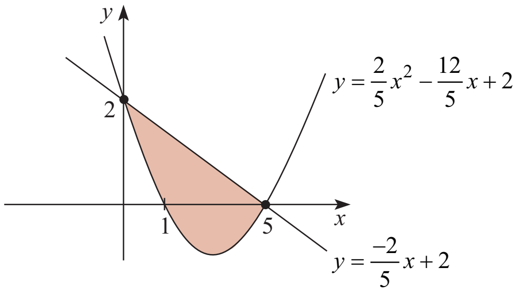
1) $5y \geq 2x^2 - 12x + 10$

$y \geq \frac{2}{5}x^2 - \frac{12}{5}x + 2$ (Parábola e região superior)

2) $5y \leq 10 - 2x$

$y \leq -\frac{2}{5}x + 2$ (reta e região inferior)

Graficamente:



Pontos $(0,2)$ e $(5,0)$ comuns ás duas curvas.

O máximo valor de y é $y = 2$.

O mínimo valor de y é obtido no vértice da parábola: $y_v = -1,6$

O produto pedido é $-3,2$.

Alternativa A

Questão 06

Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

A) $x^2 + x - 2$

B) $6x^2 - 4x + 3$

C) $3x - 9$

D) $6x^2 - 17x - 3$

E) $6x + 1$

Resolução:

1) Estudando o divisor $D(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, nota-se que $x = 1$ é raiz. Briot-Ruffini segue:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

Donde $x^2 - 2x - 3 = 0$

E as outras raízes são $x = -1$ e $x = 3$.

2) Sendo $P(x) = x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$, note-se que $P(x) = x^{24}.(x^2 - x - 6) + x^2.(5x^2 - 16x + 3)$,

o que evidencia que 3 é raiz de $P(x)$.

3) O resto pedido é da forma $R(x) = ax^2 + bx + c$.

Assim, $P(x) = (x^3 - 3x^2 - x + 3) \cdot Q(x) + ax^2 + bx + c$.

$x = 1 \Rightarrow a + b + c = -14$

$x = -1 \Rightarrow a - b + c = 20$

$x = 3 \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$

Resolvendo o sistema obtêm-se

$a = 6, b = -17, c = -3$

Assim, $R(x) = 6x^2 - 17x - 3$

Alternativa D

Questão 07

Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n^2 por 11, sendo n um número natural?

A) 3
B) 4
C) 5
D) 6
E) 7

Resolução:

Existem apenas 11 classes de congruência módulo 11, e qualquer número inteiro pertence exatamente a uma delas.

Assim bastará analisar os restos para cada uma das 11 classes.

- $n \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 0 \pmod{11}$
- $n \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{11}$
- $n \equiv 2 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 4 \pmod{11}$
- $n \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 9 \pmod{11}$
- $n \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 16 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 5 \pmod{11}$
- $n \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 25 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 3 \pmod{11}$
- $n \equiv 6 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 36 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 3 \pmod{11}$
- $n \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 49 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 5 \pmod{11}$
- $n \equiv 8 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 64 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 9 \pmod{11}$
- $n \equiv 9 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 81 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 4 \pmod{11}$
- $n \equiv 10 \pmod{11} \Rightarrow n^2 \equiv 100 \pmod{11}$
  $\therefore n^2 \equiv 1 \pmod{11}$

Assim, existem apenas 6 restos possíveis, que são: $0, 1, 3, 4, 5$ e 9.

Alternativa D

Questão 08

O número de soluções da equação $\cos(8x) = \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi)$ é:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 4
E) 8

Resolução:

Com a desigualdade das médias geométrica e aritmética, $\operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x) \geq 2$. Considerando que $-1 \leq \operatorname{sen}(2x) \leq 1$, tem-se que $1 \leq \operatorname{sen}(2x) + \operatorname{tg}^2(x) + \operatorname{cotg}^2(x)$. Com isso, $1 \leq \cos(8x)$ (1). Por outro lado, $-1 \leq \cos(8x) \leq 1\,(2)$.

De (1) e (2), conclui-se que $\cos(8x)=1$ e, consequentemente, $\operatorname{sen}(2x)=-1$ e $\operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{cotg}^2(x)=2$. Em $[0,2\pi)$, as soluções da equação $\operatorname{sen}(2x)=-1$ são $x=\frac{3\pi}{4}$ e $x=\frac{7\pi}{4}$. Assim, estas são as únicas soluções possíveis. Por inspeção, verifica-se que $x=\frac{3\pi}{4}$ e $x=\frac{7\pi}{4}$ satisfazem $\cos(8x)=1$ e $\operatorname{tg}^2(x)+\operatorname{cotg}^2(x)=2$ e, portanto, o número de soluções da equação dada é 2.

Alternativa C

Questão 09

Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10
E) 11

Resolução:

Desenvolvendo $\det A$ de acordo com o Teorema de Laplace pela última coluna

$$\det A = 2.(-1)^{2+4}.\begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 1 & x+4 & 0 \\ x & -1 & 1 \end{vmatrix} + (x-2).(-1)^{4+4}.\begin{vmatrix} 1 & 2x & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 \\ 1 & x+4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 2.(x+4-2x)+(x-2).(2x(x-1)-(x+4)(x-1))$$

$$\det A = x^3-7x^2+12x$$

$$\det A = x.(x^2-7x+12)$$

Assim as raízes são $x=0, x=3, x=4$.

A soma pedida é 7.

Alternativa A

Questão 10

Sejam Γ a circunferência que passa pelos pontos $(6,7)$, $(4,1)$ e $(8,5)$ e t a reta tangente à Γ, que passa por $(0,-1)$ e o ponto de tangência tem ordenada 5. A menor distância do ponto P $(-1,4)$ à reta t é:

A) $3\sqrt{2}$
B) 4
C) $2\sqrt{3}$
D) 3
E) $4\sqrt{10}/5$

Resolução:

O centro $C(x,y)$ da circunferência é equidistante dos pontos dados:

$$\begin{cases} (x-6)^2+(y-7)^2=(x-4)^2+(y-1)^2 \\ (x-4)^2+(y-1)^2=(x-8)^2+(y-5)^2 \end{cases}$$

Desenvolvendo as equações, temos.

$$\begin{cases} x+3y=17 \\ x+y=9 \end{cases}$$

Daí, segue que o centro da circunferência é o ponto $C=(5,4)$ e o raio é $R=\sqrt{(5-6)^2+(4-7)^2}=\sqrt{10}$. Seja $T=(p,5)$ o ponto de tangência da reta que passa por $A=(0,-1)$ com a circunferência de centro $C=(5,4)$.

Como as retas $\overline{AT}$ e $\overline{CT}$ são perpendiculares e a distância de T à C e $\sqrt{10}$, vem:

$$\begin{cases}(p-5)^2+(5-4)^2=10\\ m_{AT}.m_{CT}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(p-5)^2=9\\ \dfrac{6}{p}.\dfrac{1}{p-5}=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}p=8 \text{ ou } p=2\\ p=2 \text{ ou } p=3\end{cases}$$

O único valor que satisfaz as duas condições é $p=2$ e, portanto, o ponto de tangência é $T=(2,5)$

A equação da reta t é

$$y+1=\frac{5-(-1)}{2-0}.(x-0)$$

$$\Leftrightarrow 3x-y-1=0$$

A distância do ponto $P=(-1,4)$ à reta t é:

$$d=\frac{|3.(-1)-4-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$$

Alternativa E

Questão 11

O lugar geométrico no plano complexo de $w=z+1/z$, sendo z número complexo tal que $|z|=k$ e $k>1$, é um(a):

A) segmento de reta
B) circunferência
C) hipérbole
D) elipse
E) parábola

Resolução:

Seja $z=k(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)$.

Assim, sendo $w=x+yi$ segue que:

$$x+yi=k(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)+\frac{1}{k(\cos\theta+i\,\text{sen}\,\theta)}$$

$$x+yi=\frac{k^2\cos\theta+(k^2\,\text{sen}\,\theta)i+\cos\theta-i\,\text{sen}\,\theta}{k}$$

$$x+yi=\left(\frac{k^2+1}{k}\right)\cos\theta+\frac{(k^2-1)}{k}(\text{sen}\,\theta)\cdot i$$

Segue: $x=\left(\dfrac{k^2+1}{k}\right)\cos\theta$ e $y=\left(\dfrac{k^2-1}{k}\right)\text{sen}\,\theta$

Da identidade trigonométrica fundamental estabelece-se a relação entre x e y:

$$(\text{sen}\,\theta)^2+(\cos\theta)^2=1$$

$$\frac{y^2}{\left(\dfrac{k^2-1}{k}\right)^2}+\frac{x^2}{\left(\dfrac{k^2+1}{k}\right)^2}=1$$

Que representa uma elipse.

Alternativa D

Questão 12

O time de futebol "X" irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, "X" é o favorito. A probabilidade de "X" ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é 0,9. Quando "X" não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é 0,02. Em um determinado jogo de "X" contra "Y", o time "X" foi o vencedor. Qual a probabilidade de "X" ter sido o favorito nesse jogo?

A) 0,80
B) 0,98
C) 180/181
D) 179/181
E) 170/181

Resolução:

Se o time "X" é favorito em 80% dos jogos, então ele não é favorito em 20% dos jogos.
A probabilidade do time "X" vencer sendo favorito é $0,8\times 0,9=0,72$. Por outro lado, a probabilidade do time "X" vencer não sendo favorito é $0,2\times 0,02=0,004$. Com isso, a probabilidade do time "X" vencer um jogo é 0,72 + 0,004 = 0,724.
Assim, considerando que o time "X" venceu o jogo contra o time "Y", a probabilidade de ele ter sido o favorito nesse jogo é $\frac{0,72}{0,724}=\frac{180}{181}$.

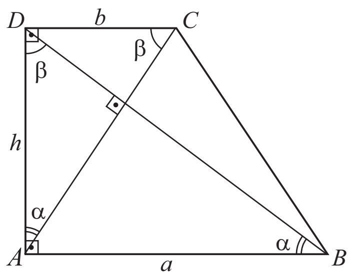
Alternativa C

Questão 13

Seja um trapézio retângulo de bases a e b com diagonais perpendiculares. Determine a área do trapézio.

A) $\frac{ab}{2}$
B) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
C) $\left(\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$
D) $\left(\frac{2a+b}{2}\right)\sqrt{ab}$
E) $\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)a^2b}$

Resolução:
Considere o trapézio retângulo $ABCD$, com bases $AB=a$ e $CD=b$.



Dado que as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são perpendiculares, os triângulos ACD e ABD são semelhantes, de onde:

$$\frac{h}{a}=\frac{b}{h}\Leftrightarrow h^2=ab \therefore h=\sqrt{ab}$$

Assim, a área do trapézio é

$$S=\frac{(a+b)\cdot\sqrt{ab}}{2}$$

Alternativa C

Questão 14

Em um prisma oblíquo $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$, cuja base $ABCDEF$ é um hexágono regular de lado a, a face lateral $EFF'E'$ está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta $F'E'$ sobre a base $ABCDEF$ coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

A) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

B) $\frac{9}{4}a^3$

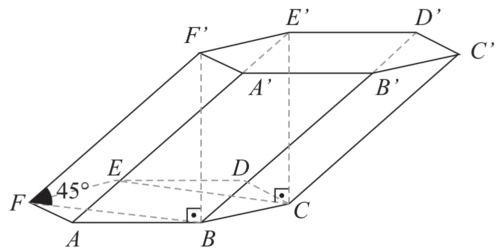
C) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

D) $\frac{9}{2}a^3$

E) $\frac{5}{2}a^3$

Resolução:

Considere a figura.



No hexágono $ABCDEF$, a diagonal FB mede $a\sqrt{3}$. Considerando que o triângulo FBF' é retângulo e isósceles, o segmento BF' mede $a\sqrt{3}$. Com isso, a altura do prisma é $a\sqrt{3}$ e o volume V é $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{9}{2}a^3$.

Alternativa D

Questão 15

Seja um tetraedro regular $ABCD$ de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

A) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

B) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

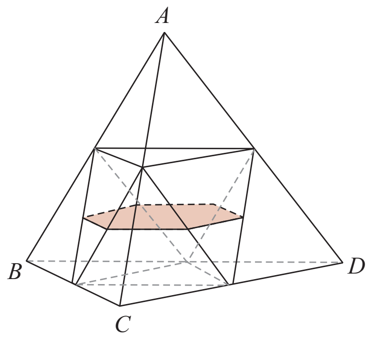
C) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

E) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

Resolução:

Considere a figura.

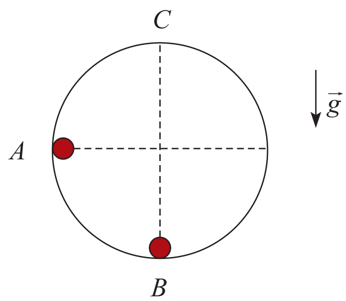


A secção é um hexágono regular em que cada lado tem metade da medida da aresta do octaedro. Se cada aresta do octaedro tem metade da medida das arestas do tetraedro, então cada lado do hexágono mede $\frac{a}{4}$. Portanto, a área S da secção é

$$S = 6 \cdot \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{32} a^2 .$$

Alternativa C

Questão 16



Um corpo puntiforme de massa m_A parte de ponto A, percorrendo a rampa circular representada na figura acima, sem atrito, colide com outro corpo puntiforme de massa m_B, que se encontrava inicialmente em repouso no ponto B. Sabendo que este choque é perfeitamente inelástico e que o corpo resultante deste choque atinge o ponto C, ponto mais alto da rampa, com a menor velocidade possível mantendo o contato com a rampa, a velocidade inicial do corpo no ponto A, em $\mathrm{m/s}$, é

Dados:

- raio da rampa circular: $2\,\mathrm{m}$;
- aceleração da gravidade $g : 10\,\mathrm{m/s^2}$;
- massa $m_A : 1\,\mathrm{kg}$;
- massa $m_B : 1\,\mathrm{kg}$.

A) 10
B) 20
C) $4\sqrt{15}$
D) $10\sqrt{5}$
E) $8\sqrt{5}$

Resolução:

i) Para o corpo de massa m_A:

$$\frac{m_A \cdot v_A^2}{2} + m_A \cdot g \cdot R = \frac{m_A \cdot v_B^2}{2}$$

$$v_A^2 + 2gR = v_B^2 \qquad \text{(I)}$$

ii) Para a colisão inestática entre os corpos de massas m_A e m_B:

$$m_A \cdot v_B = (m_A + m_B) \cdot v_B^1$$

$$1\cdot v_B=(1+1)\cdot v_B^1$$

$$v_B^1=\frac{v_B}{2} \qquad \text{(II)}$$

iii) Para o sistema (m_A+m_B):

$$\frac{(m_A+m_B)\cdot(v'_B)^2}{2}=(m_A+m_B)\cdot g\cdot 2R+\frac{(m_A+m_B)\cdot v_c^2}{2}$$

$$(v'_B)^2=4gR+v_c^2 \qquad \text{(III)}$$

Para a velocidade mínima em c, tem-se que o conjunto fica na iminência de perder o contato com a rampa, então:

$$P+\overset{0}{\cancel{F_N}}=F_{cp}$$

$$(m_A+m_B)\cdot g=\frac{(m_A+m_B)\cdot v_c^2}{R}$$

$$v_c^2=g\cdot R$$

$$v_c^2=20 \qquad \text{(IV)}$$

Substituindo-se (IV) em (III):

$$(v'_B)^2=4\cdot 10\cdot 2+20$$

$$v_B^1=10\,\text{m/s}$$

Substituindo-se (III) em (II):

$$v_B=20\,\text{m/s}$$

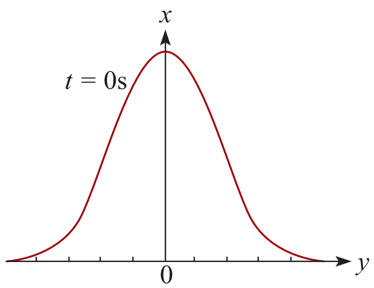
Substituindo-se (II) em (I):

$$v_A^2+2\cdot 10\cdot 2=20^2$$

$$v_A^2=360\rightarrow v_A=6\sqrt{10}\,\text{m/s}$$

Alternativa Não há alternativa correta

Questão 17



A figura acima mostra uma onda transversal na forma de um pulso ondulatório em uma corda esticada. A onda está se propagando no sentido positivo do eixo x com velocidade igual a $0,5\,\text{m/s}$. Se o deslocamento y, em metros, para uma coordenada x, em metros, no instante $t=0$ é dado por

$$y(x)=\frac{1}{x^2+4}$$

o deslocamento y, em centímetros, para $x=3$ metros e $t=2$ segundos é

A) $5,50$
B) $6,25$
C) $8,50$
D) $12,50$
E) $15,25$

Resolução:

Para um meio não-dispersivo, temos para a onda progressivo a seguinte função:

$$y=f(x-v\cdot t)$$

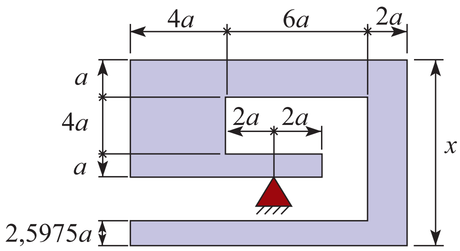
$$y=\frac{1}{(x-vt)^2+4}$$

Para os dados fornecidos:
$x = 3\,\text{m}$
$v = 0{,}5\,\text{m/s}$
$t = 2\,\text{s}$

$$y = \frac{1}{(3 - 0{,}5 \cdot 2)^2 + 4}$$
$$y = \frac{1}{8}\,\text{m} = 12{,}5\,\text{cm}$$

Alternativa D

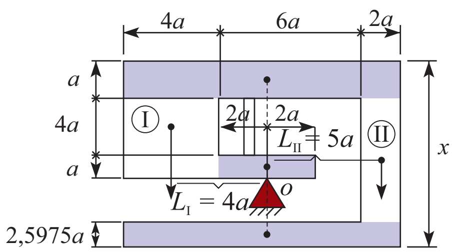
Questão 18



Uma chapa rígida e homogênea encontra-se em equilíbrio. Com base nas dimensões apresentadas na figura, o valor da razão x/a é

A) 10,5975
B) 11,5975
C) 12,4025
D) 12,5975
E) 13,5975

Resolução:

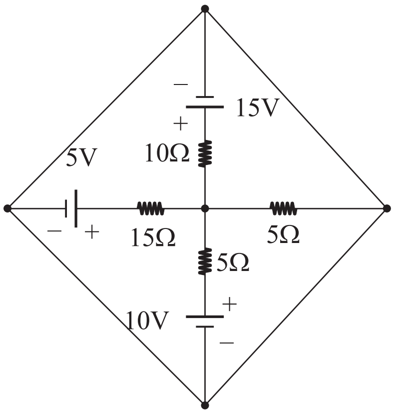


As áreas hachuradas estão em equilíbrio rotacional, pois seus centros de massa estão alinhados verticalmente com o ponto de apoio O.
Para as parte (I) e (II), temos:

$$\sum \vec{T}_O = \vec{O}$$
$$A_I \cdot L_I = A_{II} \cdot L_{II}$$
$$20a^2 \cdot 4a = (x - 3{,}5975a) \cdot 2a \cdot 5a$$
$$8a = x - 3{,}5975a$$
$$\frac{x}{a} = 11{,}5975$$

Alternativa B

Questão 19

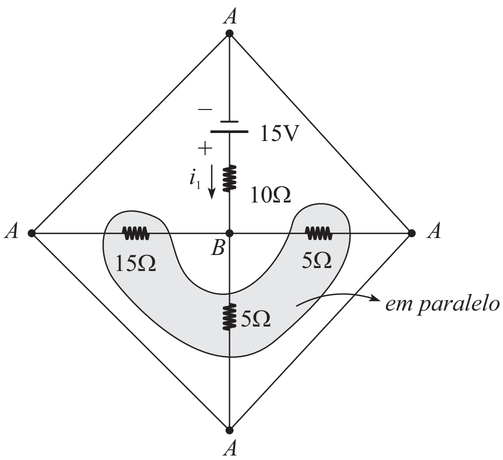


A figura acima mostra um circuito elétrico composto por resistências e fontes de tensão. Diante do exposto, a potência dissipada, em W, no resistor de 10 Ω do circuito é

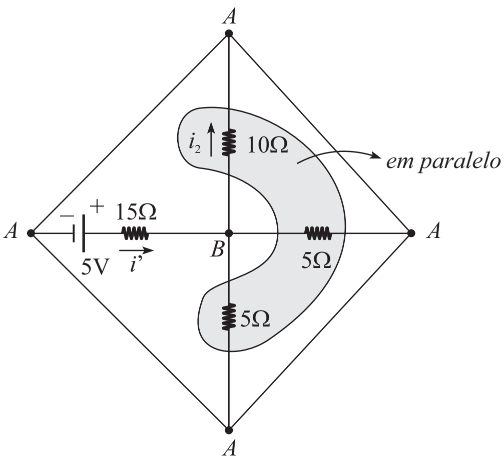
A) 3,42
B) 6,78
C) 9,61
D) 12,05
E) 22,35

Resolução:

Por superposição de fontes de tensão independentes:



$$i_1 = \frac{15}{10 + (5 // 5 // 15)} = \frac{15}{10 + \frac{15}{17}} = \frac{21}{17} A$$

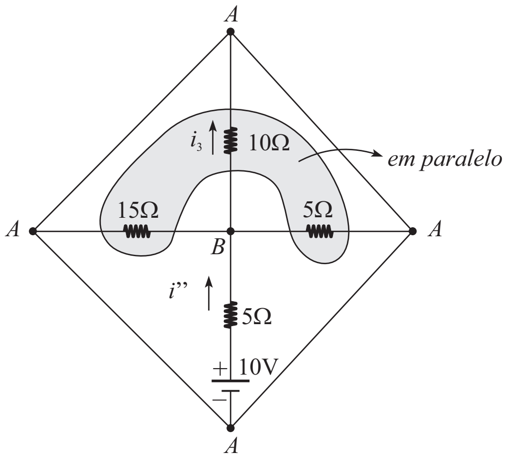


$$i' = \frac{5}{15 + (5 // 5 // 10)} = \frac{5}{17} A$$

$$-5 + 15i' + 10i_2 = 0$$

$$10i_2 = 5 - 15 \cdot \frac{5}{17}$$

$$i_2 = \frac{1}{17} A$$



$$i'' = \frac{10}{5 + (5 /\!/ 10 /\!/ 15)}$$

$$i'' = \frac{10}{5 + \frac{30}{11}}$$

$$i'' = \frac{22}{17} A$$

$$-10 + 5i'' + 10i_3 = 0$$

$$10i_3 = 10 - 5 \cdot \frac{22}{17}$$

$$i_3 = \frac{6}{17} A$$

Pela superposição a corrente total (i_T) no resistor de $10\ \Omega$ será:

$$i_T = i_1 + i_2 + i_3$$

$$i_T = \frac{21}{17} - \frac{1}{17} - \frac{6}{17} = \frac{14}{17} A$$

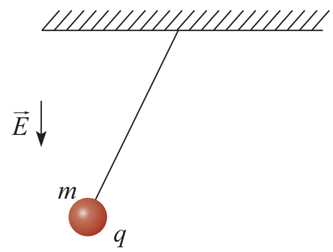
Então: $P = R \cdot i_T^2$

$$P = 10 \cdot \left(\frac{14}{17}\right)^2$$

$$P = 6{,}78\,\mathrm{W}$$

Alternativa B

Questão 20



A figura acima apresenta um pêndulo simples constituído por um corpo de massa $4\,\mathrm{g}$ e carga $+50\,\mu\mathrm{C}$ e um fio inextensível de $1\,\mathrm{m}$. Esse sistema se encontra sob a ação de um campo elétrico $\vec{E}$ de $128\,\mathrm{kN/C}$, indicado na figura.

Considerando que o pêndulo oscile com amplitude pequena e que o campo gravitacional seja desprezível, o período de oscilação, em segundos, é

A) $\frac{\pi}{20}$

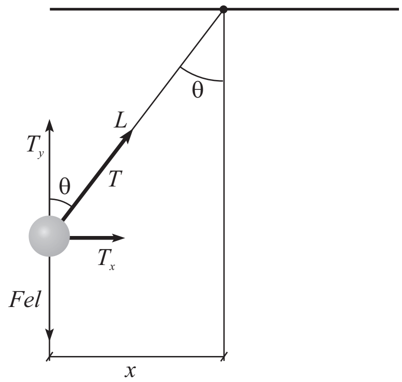
B) $\frac{\pi}{10}$

C) $\frac{\pi}{5}$

D) $\frac{2\pi}{5}$

E) $\frac{4\pi}{5}$

Resolução:



Temos um MHS para pequenas oscilações, ou seja, $x \ll L$.

$T_y = F_{el}$

$T \cdot \cos\theta = q \cdot E \qquad (I)$

$T = \frac{qE}{\cos\theta}$

$F_{res} = T_x$

$F_{res} = \frac{qE}{\cos\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta$

$F_{res} = qE \cdot \operatorname{tg}\theta$

Se $x \ll L$, $\operatorname{tg}\theta \cong \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{L}$

Logo: $F_{res} = \frac{\overbrace{qE}^{\text{KMHS}}}{L} \cdot x$

Período de MHS:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{MHS}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m \cdot L}{qE}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{50 \cdot 10^{-6} \cdot 128 \cdot 10^{3}}}$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{1600}}$

$T = \frac{\pi}{20}\,\text{s}$

Alternativa A

Questão 21

Uma partícula eletricamente carregada está presa a um carrinho que se move com velocidade de módulo constante por uma trajetória no plano XY definida pela parábola

$$y = x^2 - 9x + 3$$

Sabe-se que, em XY, um campo magnético uniforme paralelo ao vetor $(3B,\ B)$ provoca força sobre a partícula. O ponto onde a partícula é submetida ao maior módulo de força magnética é

A) $(-6,\ 93)$

B) $(-3,\ 39)$

C) $(1,\ -5)$

D) $(2,\ -2)$

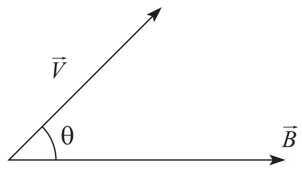
E) $(3,\ -15)$

Resolução:

A força magnética é dada por:

$F_m = |q| \cdot v \cdot B \cdot \operatorname{sen}\theta$

onde:



O valor máximo da força magnética ocorrerá para $\theta = 90°$.

$$F_{m_{máx}} = |q| \cdot v \cdot B \cdot \overbrace{\operatorname{sen} 90°}^{1}$$

O vetor velocidade ($\vec{v}$) é sempre tangente à trajetória em cada ponto, logo a direção de $\vec{v}$ é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 9$$

O vetor campo magnético é paralelo ao vetor $(3B, B)$ cuja inclinação vale $\frac{1}{3}$.

Se $\vec{v} \perp \vec{B}$, então: $\left(\frac{dy}{dx}\right) \cdot \frac{1}{3} = -1$

$2x - 9 = -3$

$2x = 6$

$x = 3$

Substituindo-se com $y = x^2 - 9x + 3$

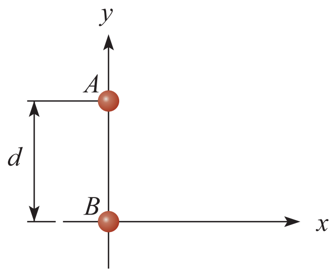
$y = 3^2 - 9 \cdot 3 + 3$

$y = -15$

Portanto, o ponto em questão é $(3, -15)$.

Alternativa E

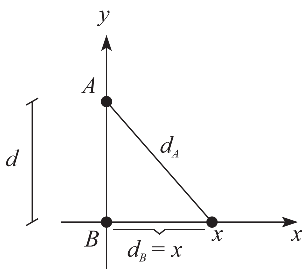
Questão 22



Duas fontes puntiformes idênticas estão localizadas nos pontos A e B. As fontes emitem ondas coerentes e em fase entre si. Se a distância d entre as fontes é igual a um múltiplo inteiro positivo N do comprimento de onda, o número de máximos de interferência que podem ser observados no eixo x à direita do ponto B é

A) $N-1$
B) N
C) $2N-1$
D) $2N$
E) infinitos

Resolução:



Para a interferência

$$d_A - d_B = \frac{\overbrace{2k}^{par} \cdot \lambda}{2}$$

Pois o máximo de interferência corresponde ao múltiplo par de $\frac{\lambda}{2}$, para fontes em fase.

$$d_A = \sqrt{d^2 + x^2}$$

Então: $\sqrt{d^2 + x^2} - x = k \cdot \lambda$

$d^2 + x^2 = (x + k\lambda)^2$

Se $d = N\lambda$ $\quad N^2\lambda^2 + x^2 = x^2 + 2k\lambda x + k^2\lambda^2$

$$x = \frac{\left(N^2 - k^2\right)\lambda}{2k}$$

Se $x > 0$ (à direita de B):

$N^2 - k^2 > 0$

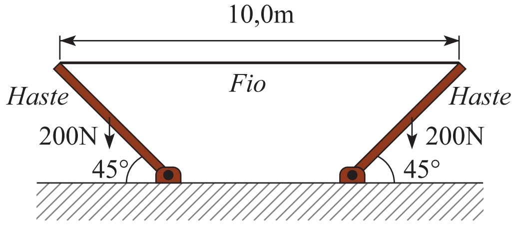
$k < N$

$0 < k < N$

Logo, existem $N-1$ valores inteiros de k para os quais ocorre interferência construtiva.

Alternativa A

Questão 23



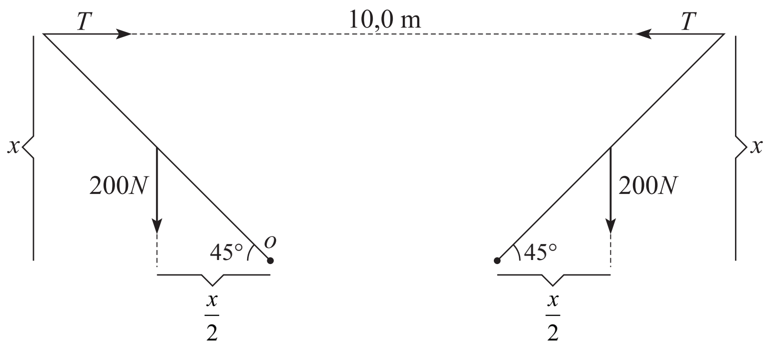
Um varal de roupas é constituído por um fio de comprimento $10,0\ \text{m}$ e massa $2,5\ \text{kg}$, suspenso nas extremidades por duas hastes uniformes de $200\ \text{N}$ de peso, com articulação nas bases, inclinadas de $45°$ em relação às bases e de iguais comprimentos. Um vento forte faz com que o fio vibre com pequena amplitude em seu quinto harmônico, sem alterar a posição das hastes. A frequência, em Hz, neste fio é

Observação:

- a vibração no fio não provoca vibração nas hastes.

A) 3
B) 5
C) 10
D) 20
E) 80

Resolução:



Em relação às hastes: $\sum \vec{\tau}_0 = \vec{0}$

$T \cdot x = 200 \cdot \dfrac{x}{2}$

$T = 100\ \text{N}$

Para as ondas na corda: μ (densidade linear) $= \dfrac{m}{L}$

$\mu = \dfrac{2,5}{10} = 0,25 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}}$

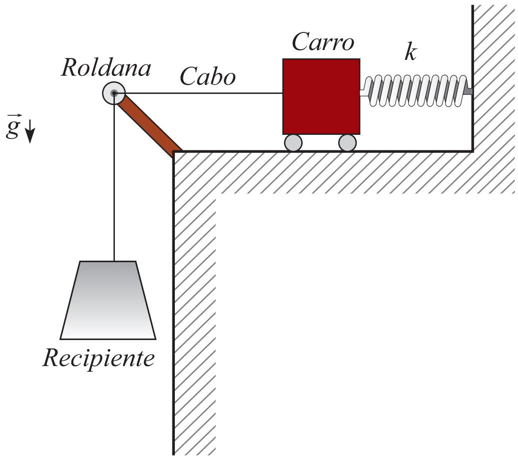
Então: $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} = \sqrt{\dfrac{100}{0,25}} = 20\ \text{m/s}$

Logo:

$f = \dfrac{NV}{2L} = \dfrac{5 \cdot 20}{2 \cdot 10} = 5\ \text{Hz}$

Alternativa B

Questão 24

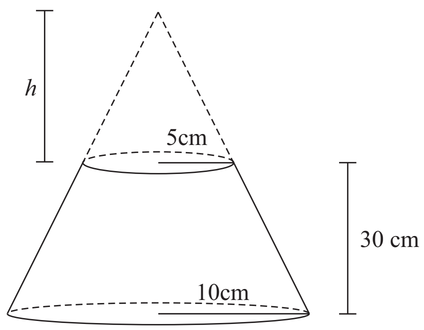


A figura acima mostra um conjunto massa-mola conectado a uma roldana por meio de um cabo. Na extremidade do cabo há um recipiente na forma de um tronco de cone de $10\ \text{cm} \times 20\ \text{cm} \times 30\ \text{cm}$ de dimensões (diâmetro da base superior x diâmetro da base inferior x altura) e com peso desprezível. O cabo é inextensível e também tem peso desprezível. Não há atrito entre o cabo e a roldana. No estado inicial, o carro encontra-se em uma posição tal que o alongamento na mola é nulo e o cabo não se encontra tracionado. A partir de um instante, o recipiente começa a ser completado lentamente com um fluido com massa específica de $3000\ \text{kg/m}^3$. Sabendo que o coeficiente de rigidez da mola é $3300\ \text{N/m}$ e a aceleração da gravidade é $10\ \text{m/s}^2$, o alongamento da mola no instante em que o recipiente se encontrar totalmente cheio, em cm, é igual a

A) $0{,}5$
B) $1{,}5$
C) $5{,}0$
D) $10{,}0$
E) $15{,}0$

Resolução:

Para o recipiente em forma de tronco de cone:



$$\left(\frac{h}{h+30}\right)^2 = \frac{\pi \cdot 5^2}{\pi \cdot 10^2}$$
$$\frac{h}{h+30} = \frac{1}{2}$$
$$2h = h + 30$$
$$h = 30\ \text{cm}$$

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot 60 - \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 30$$
$$V_{tronco} = \frac{1}{3}\pi(6000 - 750)$$
$$V_{tronco} = 1750\pi\ \text{cm}^3$$

Para o sistema:
Recipiente cheio: $m_{recipiente} = V_{tronco} \cdot \mu_{fluido}$

$m_{recipiente} = 1750\pi \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^3$

$m_{recipiente} = 3 \cdot 1,75\pi \text{ kg}$

$P_{recipiente} = F_{mola}$

$m_{recipiente} \cdot g = k_{mola} \cdot x$

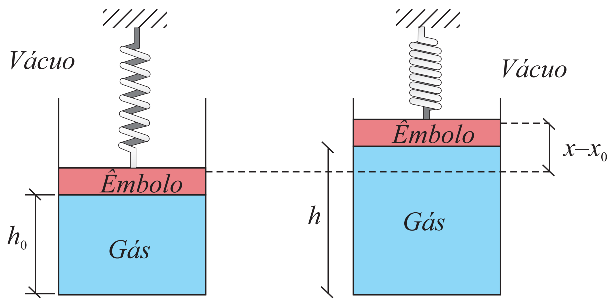
$3 \cdot 1,75\pi \cdot 10 = 3,3 \cdot 10^3 \cdot x$

$x = 0,05 \text{ m}$

$x = 5 \text{ cm}$

Alternativa C

Questão 25



Situação 1 Situação 2

A figura acima mostra um sistema posicionado no vácuo formado por um recipiente contendo um gás ideal de massa molecular M e calor específico c em duas situações distintas. Esse recipiente é fechado por um êmbolo preso a uma mola de constante elástica k, ambos de massa desprezível. Inicialmente (Situação 1), o sistema encontra-se em uma temperatura T_0, o êmbolo está a uma altura h_0 em relação à base do recipiente e a mola comprimida de x_0 em relação ao seu comprimento relaxado.
Se uma quantidade de calor Q for fornecida ao gás (Situação 2), fazendo com que o êmbolo se desloque para uma altura h e a mola passe a estar comprimida de x, a grandeza que varia linearmente com Q é

A) $x + h$
B) $x - h$
C) $(x + h)^2$
D) $(x - h)^2$
E) xh

Resolução:

Situação 1:

$P_{gás} \cdot \overbrace{A \cdot h_0}^{V_0} = nRT_0$

$P_{gás} \cdot A = \dfrac{nRT_0}{h_0}$

$F_{gás} = F_{elástica}$

$P_{gás} \cdot A = k \cdot x_0$

$\dfrac{nRT_0}{h_0} = kx_0$

$T_0 = \dfrac{kx_0h_0}{nR} \qquad \text{(I)}$

Situação 2:

$P_{gás}' \cdot A \cdot h = nRT_f$

$F_{gás} = F_{elástica}$

$P_{gás}' \cdot A = k \cdot x$

$$\frac{nRT_f}{h} = k \cdot x$$

$$T_f = \frac{k \cdot x \cdot h}{nR} \qquad \text{(II)}$$

Se: $Q = m \cdot c \cdot \Delta T$

$$Q = m \cdot c \cdot (T_f - T_0)$$

$$Q = m \cdot c \cdot \frac{k}{nR}(xh - x_0 h_0)$$

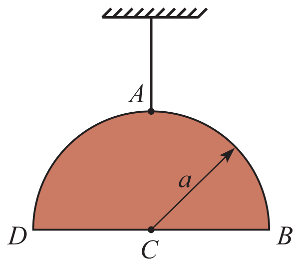
$$Q = \underbrace{\frac{mck}{nR}}_{C_1}(xh) - \underbrace{\frac{mckx_0h_0}{nR}}_{C_2} \qquad \text{(III)}$$

onde:
m - massa do gás
c - calor específico do gás
n - número de mols do gás
R - constante universal dos gases perfeitos

Em (III), temos: $Q = C_1 \cdot (xh) - C_2$ como uma relação linear entre Q e xh.

Alternativa E

Questão 26



A figura acima representa uma lâmina de espessura e densidade constantes na forma de um semicírculo de raio a. A lâmina está suspensa por um fio no ponto A e o seu centro de massa está a uma distância de $\frac{4a}{3\pi}$ da reta que contém o segmento DB. Uma das metades da lâmina é retirada após um corte feito ao longo do segmento AC. Para a metade que permanece suspensa pelo ponto A nessa nova situação de equilíbrio, a tangente do ângulo que a direção do segmento de reta AC passa a fazer com a vertical é

A) $\frac{3}{4\pi - 3}$

B) $\frac{4\pi}{3\pi - 4}$

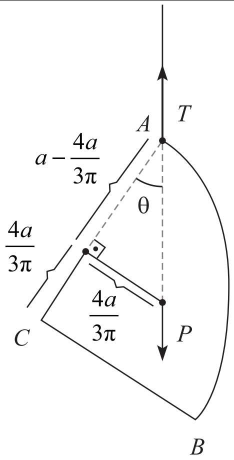
C) $\frac{\pi}{\pi - 3}$

D) $\frac{4}{3\pi - 4}$

E) $\frac{4}{4 - \pi}$

Resolução:

Suponhamos que a metade suspensa contenha o ponto B. Por motivos de simetria, o centro de massa está a distância $\frac{4a}{3\pi}$ do segmento BC e à mesma distância do segmento AC.
Na nova posição de equilíbrio, o centro de massa da parte suspensa deve estar sobre a linha da tração agindo sobre A, de forma que as linhas de ação da tração (T) e do peso (P) coincidam e não realizem torque.



Então, $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\frac{4a}{3\pi}}{a - \frac{4a}{3\pi}} = \dfrac{4}{3\pi - 4}$

Alternativa D

Questão 27

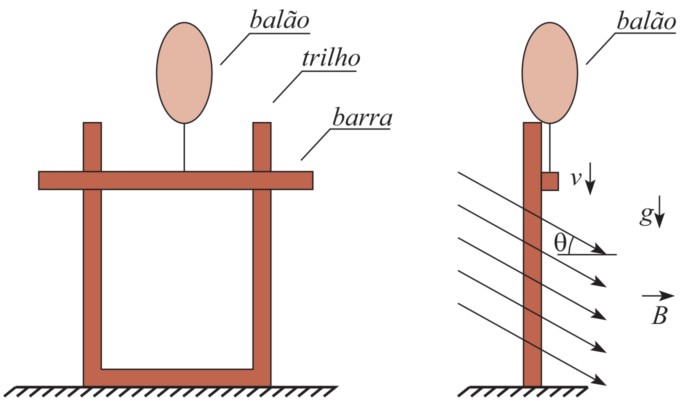


Figura 1   *Figura* 2

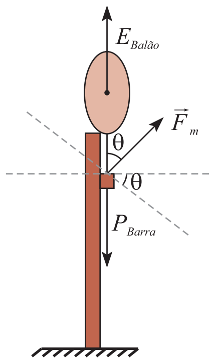
A Figura 1 apresenta um sistema composto por um trilho fixo em U e uma barra móvel que se desloca na vertical com velocidade v suspensa por um balão de massa desprezível. O trilho e a barra são condutores elétricos e permanecem sempre em contato sem atrito. Este conjunto está em uma região sujeita a uma densidade de fluxo magnético $\vec{B}$ que forma com a horizontal uma ângulo θ, como ilustrado na Figura 2.
Diante do exposto, o valor da corrente induzida no sistema, em ampères, no estado estacionário é:
Dados:
- massa da barra: $1\ \text{kg}$;
- aceleração da gravidade g: $10\ \text{m/s}^2$;
- ângulo θ entre a horizontal e o vetor B: $60°$;
- massa específica do ar: $1{,}2\ \text{kg/m}^3$;
- volume constante do balão: $0{,}5\ \text{m}^3$;
- comprimento da barra entre os trilhos: $0{,}2\ \text{m}$;
- densidade de fluxo magnético B: $4\ \text{T}$.

Observação:
- despreze a massa do balão com o hélio e o atrito entre a barra e os trilhos.

A) $5{,}7$
B) $10{,}0$
C) $23{,}0$
D) $30{,}0$
E) $40{,}0$

Resolução:

Na Figura 2:

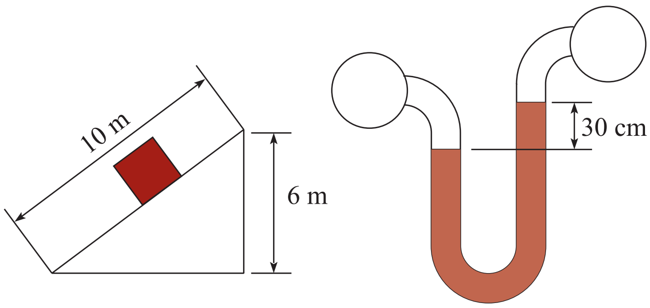


Na vertical:

$$E_{Balão} + F_m \cdot \cos\theta = P_{Barra}$$
$$\mu \cdot V \cdot g + B \cdot i \cdot L \cdot \cos\theta = m \cdot g$$
$$1{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 10 + 4 \cdot i \cdot 0{,}2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot 10$$
$$0{,}4i = 4$$
$$i = 10{,}0 \text{ A}$$

Alternativa B

Questão 28



Em um laboratório localizado em um planeta desconhecido, um grupo de pesquisadores observa o deslizamento de um bloco em um plano inclinado. Nota-se que o bloco parte do repouso e atinge o final da rampa em 10 segundos e com velocidade de 4 m/s. Neste mesmo ambiente, encontra-se instalado um manômetro do tipo "tubo em U" que tem por objetivo medir o diferencial de pressão entre dois reservatórios que se localizam em cada ponta do tubo. Sabe-se que o fluido manométrico é feito através da mistura da mesma quantidade em massa de dois óleos miscíveis distintos. Levando em conta os dados abaixo, pode-se afirmar que o coeficiente de atrito (dinâmico) entre o bloco e o plano inclinado na situação física descrita é:

<u>Dados</u>:

- altura máxima do plano em relação à horizontal: 6 m;
- comprimento da rampa: 10 m;
- diferença entre as pressões nos reservatórios: $0{,}18 \text{ kPa}$;
- cota de desnível do fluido manométrico: 30 cm;
- massas específicas dos óleos: $0{,}3 \text{ g/cm}^3$, $0{,}9 \text{ g/cm}^3$.

<u>Observação</u>:

- considere que a massa, em kg, da mistura dos óleos é igual a soma das massas, em kg, das massas de cada óleo.

A) $0{,}25$
B) $0{,}45$
C) $0{,}50$
D) $0{,}70$
E) $0{,}75$

Resolução:

i) $m_{óleo1} = m_{óleo2} = m$

$$d_{mistura} = \frac{2m}{\frac{m}{d_1} + \frac{m}{d_2}} = \frac{2d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$d_{mistura} = \frac{2 - 0,3.0,9}{1,2} = 0,45\,\text{g/cm}^3$$

ii) Pela Lei de Stevin:

$\Delta p = d_{mistura} \cdot g \cdot h$

$0,18.10^3 = 0,45.10^3 . g . 3.10^{-1}$

$$g = \frac{0,18}{0,45.0,3} = \frac{0,6}{0,45} = \frac{4}{3}\,\text{m/s}^2$$

iii) No plano inclinado:

$v = v_o + at$

$4 = a.10$

$a = 0,4\,\text{m/s}^2$

$Px - fat = m.a$

$g\,sen\theta - \mu . g . \cos\theta = a$

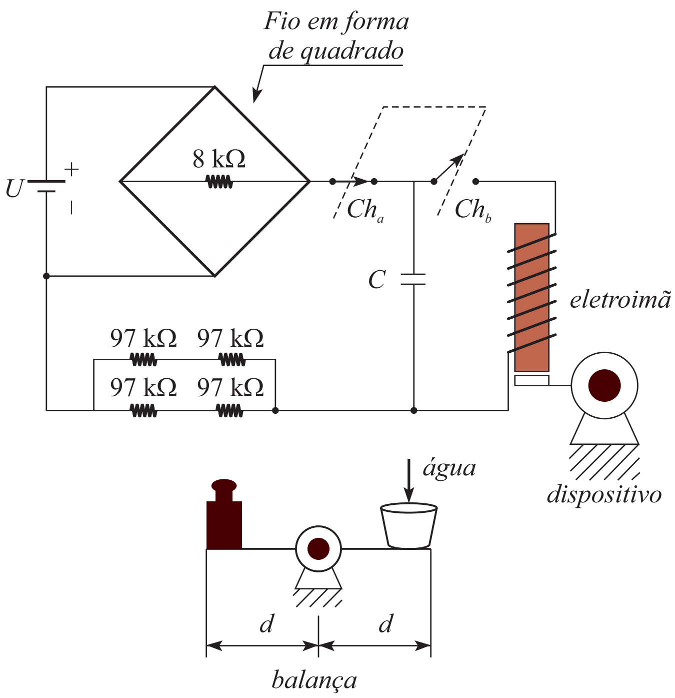
$$\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} - \mu . \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} \rightarrow 0,8 - \frac{16\mu}{15} = 0,4 \rightarrow \mu = \frac{3}{8}$$

$\mu = 0,375$

Não há alternativa correta.

Alternativa

Questão 29



A figura acima apresenta um circuito elétrico e um sistema de balança. O circuito é composto por uma Fonte em U, cinco resistores, um capacitor, um quadrado formado por um fio homogêneo, duas chaves e um eletroímã interligados por fios de resistência desprezível. O sistema de balança é composto por um bloco e um balde de massa desprezível que está sendo preenchido por água através de um dispositivo. Sabe-se que, imediatamente após o carregamento do capacitor, a chave Ch_a se abrirá e a chave Ch_b se fechará, fazendo com que o capacitor alimente o eletroímã, de modo que este acione um dispositivo que interromperá o fluxo de água para o balde. O valor do capacitor para que o sistema balde e bloco fique em equilíbrio e a energia dissipada no fio a partir do momento em que o capacitor esteja completamente carregado até o vigésimo segundo são, respectivamente

Dados:
- $U = 100\ \text{V}$;
- resistência total do fio: $32\ \text{k}\Omega$;
- fluxo de água: $200\ \text{ml/s}$;
- massa específica da água $= 1\ \text{g/cm}^3$;
- massa do bloco: $0{,}8\ \text{kg}$.

Observações:
- despreze a massa do balde;
- considere o capacitor carregado em um tempo correspondente a cinco vezes a constante de tempo.

A) $6\ \mu\text{F}$ e $10\ \text{J}$
B) $8\ \mu\text{F}$ e $10\ \text{J}$
C) $8\ \mu\text{F}$ e $20\ \text{J}$
D) $10\ \mu\text{F}$ e $10\ \text{J}$
E) $10\ \mu\text{F}$ e $20\ \text{J}$

Resolução:

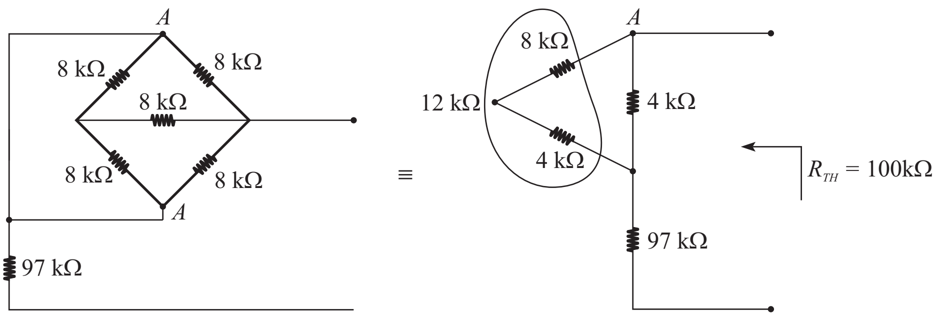
i) Considerando o equilíbrio da balança:

$$P_{bloco} \cdot d = P_{água} \cdot d$$
$$m_{bloco} = m_{água}$$
$$200\frac{\text{cm}^3}{s} \cdot \Delta t \cdot \frac{1\text{g}}{\text{cm}^3} = 800\,\text{g}$$
$$\Delta t = 4\ \text{s}$$

Pelo enunciado:

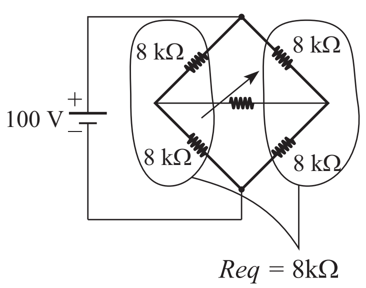
$$\Delta t = 5\tau$$
$$\Delta t = 5RC$$
$$4 = 5RC$$
$$RC = 0{,}8$$

Aplicando-se Thevenin para obtermos R_{TH}:



$$5 \cdot R_{TH} \cdot C = 4$$
$$5 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot C = 4$$
$$C = 8\ \mu\text{F}$$

ii) Para o capacitor descarregado, temos uma ponte de Wheatstone equilibrada.



O intervalo ($\Delta t'$) de tempo entre o completo carregamento do capacitor e o vigésimo segundo:

$$\Delta t' = 20\text{s} - 4\text{s}$$
$$\Delta t' = 16\ \text{s}$$

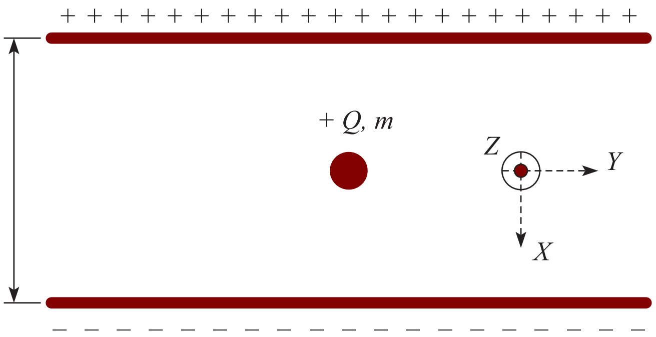
$$E_{dissipada} = Pot \cdot \Delta t'$$

$$E_{dissipada} = \frac{U^2}{R_{eq}} \cdot \Delta t'$$

$$E_{dissipada} = \frac{100^2}{8 \cdot 10^3} \cdot 16 = 20 \text{ J}$$

Alternativa C

Questão 30



Um capacitor de placas paralelas carregado gera um campo elétrico constante em seu interior. Num instante inicial, uma partícula de massa m e carga $+Q$, localizada no interior do capacitor, é liberada com velocidade nula. Neste mesmo instante, o capacitor começa a girar com velocidade angular constante ω em torno do eixo z. Enquanto estiver no interior do capacitor e antes de colidir com uma das placas, a trajetória da carga será uma

Observação:

• desconsidere as ações dos campos magnético e gravitacional.

A) superposição de um movimento circular uniforme com um movimento uniforme no eixo Y.
B) superposição de um movimento circular uniforme com um movimento uniforme no eixo X.
C) elipse, não se constituindo uma circunferência.
D) circunferência.
E) parábola.

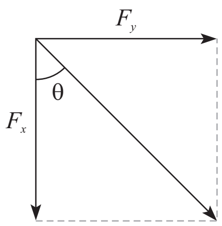
Resolução:

Para um instante $t > 0$:

$$\vec{F} = qE\cos\omega t\ \hat{i} + qE\ \text{sen}\omega t\ \hat{j}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{qE}{m}\cos\omega t\ \hat{i} + \frac{qE}{m}\ \text{sen}\omega t\ \hat{j}$$



$\theta = wt$

No eixo X:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \rightarrow v_x = \frac{qE}{m\omega}\ \text{sen}\omega t$$

$$v_x = \frac{dX}{dt} \rightarrow X = \frac{qE}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)$$

No eixo Y:

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \rightarrow v_y = \frac{qE}{m\omega}(1 - \cos\omega t)$$

$$v_y = \frac{dY}{dt} \rightarrow Y = \frac{qE}{m\omega^2}(\omega t - \text{sen}\omega t)$$

Então:

$$\vec{r} = X \cdot \hat{i} + Y \cdot \hat{j}$$

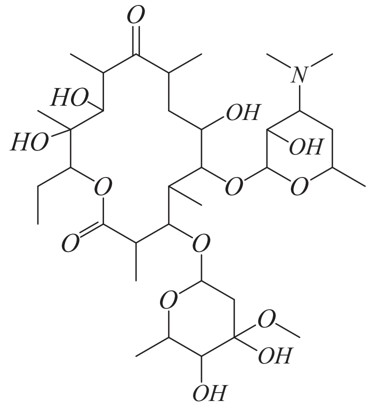
$$\vec{r} = \frac{qE}{m\omega^2}(1 - \cos\omega t)\hat{i} + \left(\frac{qE}{m\omega}t - \frac{qE}{m\omega^2}\text{sen}\omega t\right)\hat{j}$$

$$\vec{r} = \underbrace{\frac{qE}{m\omega^2}\hat{i} + \frac{qE}{m\omega}t\ \hat{j}}_{\text{Movimento uniforme no eixo } y} + \underbrace{\left(\frac{-qE}{m\omega^2}\cos\omega t\ \hat{i} - \frac{qE}{m\omega^2}\text{sen}\omega t\ \hat{j}\right)}_{\text{Movimento circular Uniforme de raio } \frac{qE}{m\omega^2}}$$

Alternativa A

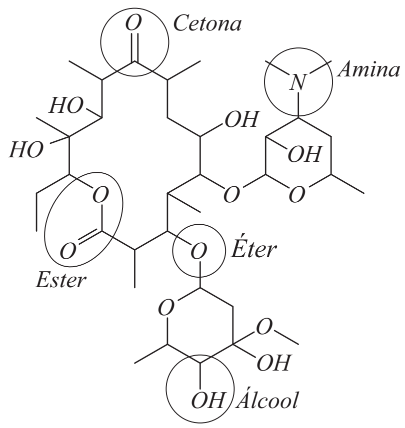
Questão 31

A eritromicina é uma substância antibacteriana do grupo dos macrolídeos muito utilizada no tratamento de diversas infecções. Dada a estrutura da eritromicina abaixo, assinale a alternativa que corresponde às funções orgânicas presentes.



A) Álcool, nitrila, amida, ácido carboxílico.
B) Álcool, cetona, éter, aldeído, amina.
C) Amina, éter, éster, ácido carboxílico, álcool.
D) Éter, éster, cetona, amina, álcool.
E) Aldeído, éster, cetona, amida, éter.

Resolução:
Na molécula apresentada na questão verifica-se os seguintes grupos funcionais:



Alternativa D

Questão 32

Um volume V_1 de uma solução aquosa de HCℓ 6 mol/L contém inicialmente uma massa m_0 de íons Fe^{+3}. São realizadas n extrações utilizando, em cada uma delas, o mesmo volume V_2 de éter etílico, o qual é um solvente seletivo para $FeC\ell_3$. Sabendo que o coeficiente de partição do ferro entre o éter e a solução aquosa de $HC\ell$ vale K, qual das expressões abaixo é equivalente à massa de íons Fe^{+3} remanescente na fase aquosa ao final do processo? Suponha que a extração do soluto não altera o volume da solução de $HC\ell$.

A) $m_0\left(\dfrac{6KV_1}{KV_2+V_1}\right)^n$

B) $m_0\left(\dfrac{KV_1}{V_2+KV_1}\right)^n$

C) $m_0\left(\dfrac{6KV_1}{V_2+V_1}\right)^n$

D) $m_0\left(\dfrac{V_1}{V_2+6KV_1}\right)^n$

E) $m_0\left(\dfrac{V_1}{KV_2+V_1}\right)^n$

Resolução:

Na 1ª extração teremos o equilíbrio

$$Fe^{3+}_{(HC\ell)} \rightleftarrows Fe^{3+}_{(Éter)} \qquad K(constante\ de\ equilíbrio)$$

$$K = \frac{\left[Fe^{3+}_{(Éter)}\right]}{\left[Fe^{3+}_{(HC\ell)}\right]}$$

Mas: $\left[Fe^{3+}\right]_{Éter} = \dfrac{mFe^{3+}}{V_2} = \dfrac{(mFe^{3+})\ no\ Éter}{MFe^{3+}\cdot V_2}$

$$\left[Fe^{3+}\right]_{HC\ell} = \frac{mFe^{3+}}{V_1} = \frac{\left(mFe^{3+}\right)\ no\ HC\ell}{MFe^{3+}\cdot V_1}$$

$$K = \frac{\dfrac{m_0 - mHC\ell}{V_2}}{\dfrac{mHC\ell}{V_1}} = \frac{m_0 - mHC\ell}{V_2} \times \frac{V_1}{mHC\ell}$$

$$\therefore\ K \cdot mHC\ell\ V_2 = m_0V_1 - mHC\ell\ V_1$$

$$mHC\ell = m_0\left(\frac{V_1}{KV_2 + V_1}\right)$$

2ª Extração

$$K = \frac{\left[Fe^{3+}\right]_{Éter\ 2}}{\left[Fe^{3+}\right]_{HC\ell\ 2}} = \frac{\dfrac{mHC\ell - mHC\ell_2}{V_2}}{\dfrac{mHC\ell}{V_1}}$$

$$mHC\ell_2 = mHC\ell\left(\frac{V_1}{KV_2 + V_1}\right)$$

Substituindo 1 em 2

$$mHC\ell_2 = m_0\left(\frac{V_1}{KV_2V_1}\right)^2$$

Na n-ésima partição

$$mHC\ell_n = m_0\left(\frac{V_1}{KV_2V_1}\right)^n$$

Alternativa E

Questão 33

Um pesquisador verificou, em uma determinada posição geográfica, por meio da análise de amostras de água do mar extraídas do local, que a massa específica média da água do mar era 1,05 g/mL, a concentração média de espécies dissolvidas era 0,80 mol/L e a temperatura média era de 290 K. O mesmo pesquisador, com o objetivo de colher água doce em seu estudo, planeja envolver, com uma membrana semipermeável ideal, uma das extremidades abertas de um longo tubo, a qual será imersa na água do mar. A que profundidade mínima, em metros, o tubo deveria ser imerso?

A) $1930,0.$
B) $183,4$
C) $73,7.$
D) $19,4.$
E) $9,7.$

Dados:

$$R = 0,08\frac{atm \cdot L}{K \cdot mol} = 8,3\frac{J}{K \cdot mol} = 62,3\frac{mmHg \cdot L}{K \cdot mol}$$

Resolução:

$$\pi = m \cdot R \cdot T$$
$$\pi = 0,8 \cdot 0,082 \cdot 290$$
$$\pi = 19,024\, atm \times \frac{101 \cdot 325 Pa}{1 atm} = 19,28 \times 10^5 \frac{N}{m^2}$$

Como:

$$\pi = \rho \cdot g \cdot h$$
$$19,28 \times 10^5 \frac{N}{m^2} = \frac{1,05 g}{m_2} \cdot \frac{1 kg}{10^3 g} \cdot \frac{10^6 mL}{m^3} \cdot \frac{10 m}{s^2} \cdot h$$
$$192,8 \times 10^4 \frac{N}{m^2} = 1,05 \cdot 10^4 \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot h$$
$$h = 183,4\, m$$

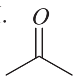
Alternativa B

Questão 34

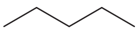
Considere os compostos abaixo enumerados.
I. Acetona;
II. Neopentano;
III. Fluoreto de lítio;
IV. Etanamida;
V. Pentano.
Assinale a alternativa que apresenta a sequência correta, conforme a ordem crescente de ponto de ebulição.

A) III, I, IV, II, V.
B) V, II, I, IV, III.
C) II, V, I, IV, III.
D) II, V, IV, I, III.
E) V, II, III, IV, I.

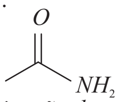
Resolução:
Sendo:

I. 
Dipolo permanente

III. *LiF*
Composto Iônico

V. 
Dipolo induzido

II. 
Dipolo induzido

IV. 
Ligação de Hidrogênio

Assim:
Fluoreto de lítio apresenta maior ponto de ebulição devido a atração eletrostática de íons de cargas opostas;
Nos compostos que apresentam dipolos induzidos, quanto maior o número de ramificações, menor a superfície de contato, portanto, menor o número de interações intermoleculares.

Portanto:
$P_{fusão}$: II < V < I < IV < III

Alternativa C

Questão 35

Dados os elementos abaixo,
${}^{35}_{17}\Phi$; ${}^{40}_{20}\Psi$; e ${}^{107}_{47}\Omega$
marque a alternativa correta, considerando-se as condições de $1\ \text{atm}$ e $25°C$.
A) Φ é encontrado livre na natureza na forma de gás monoatômico.
B) Φ combina-se com Ψ formando um composto solúvel em água.
C) Φ combina-se com Ω formando um composto solúvel em água.
D) Ψ combina-se com Ω formando um composto gasoso.
E) Ω é um mau condutor de eletricidade.

Resolução:

Sabe-se que: ${}^{35}_{17}\Phi$ é o Cl
${}^{40}_{20}\Psi$ é o Ca
${}^{107}_{47}\Omega$ é o Ag
Portanto:
A) Φ forma um gás diatômico (Cl_2)
B) Forma o $CaCl_2$ (Cloreto de cálcio) que é um composto iônico
C) Forma o $AgCl$ (Cloreto de prata) que é insolúvel em água.
D) A combinação de Ca (metal) com Ag (metal), caso possível, resulta em um composto sólido a $1\ \text{atm}$ e $25°C$
E) Ag é um metal e portanto bom condutor de eletricidade

Nota: O símbolo Ω , corresponde a um elemento com número atômico 47 , que é o Ag , porém não foi fornecido na prova Tabela Periódica.

Alternativa B

Questão 36

Uma certa reação química a pressão e temperatura constantes apresenta uma pequena variação da Energia Livre (ΔG), de valor próximo de zero, uma variação positiva da entropia (ΔS) e uma variação negativa da entalpia (ΔH). Considerando-se apenas estes dados, pode-se afirmar que a reação
A) é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta G / \Delta H$ e ela nunca atinge o equilíbrio.
B) não é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta H / \Delta S$ e não há variação na composição do meio reacional.
C) não é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta G / \Delta H$ e há uma pequena variação na composição do meio reacional.

D) é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta H / \Delta S$ e há variação na composição do meio reacional.
E) é espontânea, a temperatura é aproximadamente igual a $\Delta G / \Delta H$ e o equilíbrio é atingido.

Resolução:

Sabe-se que:
$\Delta G = \Delta H - TDS$

Como:
$\Delta S > 0$
$\Delta H < 0$

Temos que: $\Delta G < 0$ $(espontânea)$

Considerando que $\Delta G \cong 0$
$\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$
$0 \cong \Delta H - T \cdot \Delta S$
$-\Delta H \cong -T \cdot \Delta S$
$\Delta H \cong T \cdot \Delta S$
$T \cong \frac{\Delta H}{\Delta S}$

A partir da reação abaixo, temos que a medida que ela se processa os reagentes vão se convertendo em produto e provocando uma variação na composição

Alternativa D

Questão 37

Um isótopo radioativo X transforma-se em um elemento estável Y após reações de desintegração radioativa com emissão de radiação α, radiação β negativa e radiação γ. Assinale a alternativa correta.

A) A diferença entre os números de massa de X e de Y será igual à diferença entre o dobro do número de partículas α emitidas e o número de partículas β emitidas.
B) A emissão da radiação γ altera o número atômico de X.
C) A diferença entre os números atômicos de X e de Y será igual ao quádruplo do número de partículas α emitidas.
D) X e Y são isótonos.
E) A diferença entre os números de nêutrons de X e de Y será igual à soma do dobro do número de partículas α emitidas com o número de partículas β emitidas.

Resolução:

Temos:
$^{q}_{p}X \longrightarrow ^{a}_{b}Y + w^{4}_{2}\alpha + t -1^{0}\beta + ^{0}_{0}\gamma$

Então:
$q = a + 4w \quad \therefore \quad q - a = 4w$
$p = b + 2w - t \quad \therefore \quad p - b = 2w - t$

Sendo:
I) $q - a$: variação do número de massa do isótopo $\gamma \cdot (\Delta A)$
$\therefore \quad \Delta A = 4w$
II) $p - b$: variação do número de prótons do isótopo $\gamma \cdot (\Delta Z)$
$\therefore \quad \Delta Z = 2w - t$

Logo:
$\Delta_{nêutrons} = \Delta A - \Delta Z$
$\Delta_{nêutrons} = 4w - (2w - t)$
$\Delta_{nêutrons} = 2w + t$

Alternativa E

Questão 38

Assinale a alternativa correta.

A) A hidrólise total de um nucleotídeo resulta em uma base nitrogenada heterocíclica, um monossacarídeo e um íon fosfato.

B) As bases nitrogenadas encontradas nos nucleotídeos do DNA são: adenina, uracila, citosina e guanina.

C) Watson e Crick descobriram que o RNA possui uma estrutura de dupla hélice, estando as hélices ligadas entre si por ligações de hidrogênio entre pares de bases nitrogenadas.

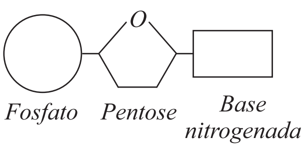
D) O pareamento de bases nitrogenadas em um ácido nucleico é específico: uma adenina se liga somente a outra adenina, uma citosina a outra citosina e assim por diante.

E) A replicação do RNA é a responsável pela transmissão do código genético.

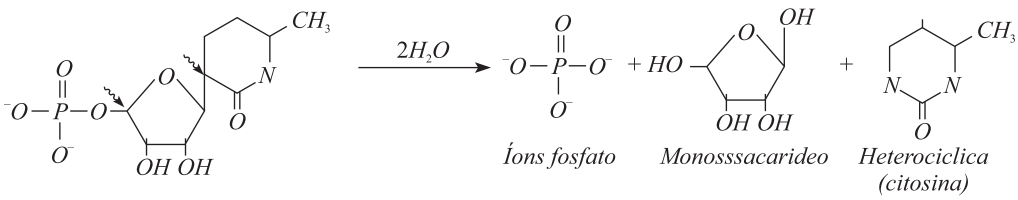
Resolução:

A) Os nucleotídeos são formados por:
Uma pentose (monossacarídeo)
Um grupo fosfato
E uma base nitrogenada (púrica ou pirimídica)

Pirimídicas



Hidrolise do nucleotideos



B) DNA é formado por adenina, timina, citosina e (folio) guanina. (Não há uracila)

C) Watson e Crick descobriram o DNA (falso)

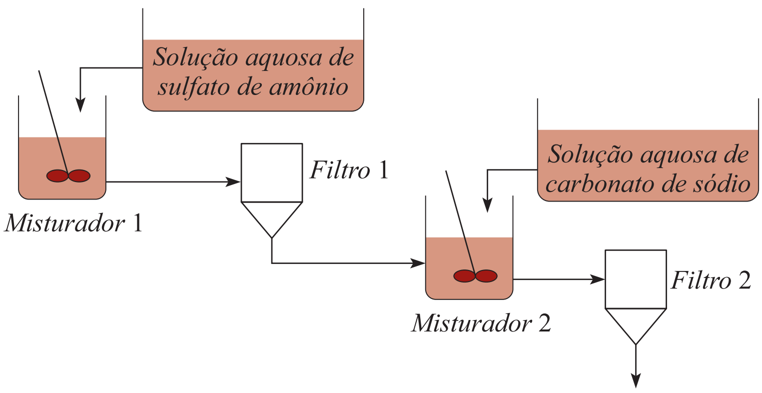
D) Adenina se liga a tinina (DNA) ou Uracila (RNA) (Falso)

E) A reaplicação do DNA é a responsável pela transmissão do código genético. (falso)

Alternativa A

Questão 39

Considere as etapas sequenciais de mistura/filtração do processo não contínuo a seguir.



No Misturador 1, antes da adição de $100\ \text{mL}$ de uma solução aquosa de sulfato de amônio $20\ \text{g/L}$, encontram-se $100\ \text{mL}$ de uma solução aquosa composta por massas iguais de nitrato de prata, nitrato cúprico e nitrato de chumbo (II), de concentração total $60\ \text{g/L}$.

Ao Misturador 2, que contém o material passante do Filtro 1, adicionam-se $100\ \text{mL}$ de uma solução aquosa de carbonato de sódio $40\ \text{g/L}$ e uma pequena quantidade de uma solução de hidróxido de sódio objetivando o adequado ajuste do pH de precipitação para, em seguida, proceder a filtração.
Sobre os produtos de filtração, pode se dizer que:

A) o precipitado retido no Filtro 2 é uma mistura heterogênea.

B) o precipitado retido no Filtro 1, conhecido como galena, é um sólido iônico resultante da reação:

$$Pb(NO_3)_2(\text{aq}) + (NH_4)_2S(\text{aq}) \rightleftarrows PbS(\text{s}) + 2NH_4NO_3(\text{aq})$$

C) no misturador 2 observam-se os seguintes equilíbrios iônicos:

$$2Ag^+(\text{aq}) + CO_3^{2-}(aq) \rightleftarrows Ag_2CO_3(s)$$

$$2Cu^+(\text{aq}) + CO_3^{2-}(\text{aq}) \rightleftarrows Cu_2CO_3(s)$$

D) o chumbo no estado sólido pode ser obtido espontaneamente através do sólido retido no Filtro 1, conforme a reação comum às baterias de chumbo:

$$2PbSO_4(s) + 2H_2O(l) \rightleftarrows PbO_2(s) + Pb(s) + 2SO_4^{2-}(aq) + 4H^+(aq)$$

E) o precipitado retido no Filtro 2 é um sólido molecular, metaestável, com baixo ponto de fusão e com excelentes propriedades de condução térmica e elétrica.

Resolução:
No misturador 1 ocorrerá a reação

$$Pb^{2+}_{(aq)} + SO_4^{2-}(aq) \rightarrow PbSO_4(s)$$

No misturador 2 ocorrerão as reações:

$$Cu^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq) \rightarrow CuCO_3(s)$$

$$2Ag^+(aq) + CO_3^{2-}(aq) \rightarrow Ag_2CO_3(s)$$

Logo no filtro 1 ocorrerá precipitação de $PbSO_4$ (sulfato de chumbo II) e no filtro 2 $CuCO_3$ de (carbonato de cobre II) e Ag_2CO_3 (carbonato de prata), uma mistura heterogênea.
Nota: A reação da alternativa D não é espontânea, fato que pode ser evidenciado pela baixíssima solubilidade do $PbSO_4$ em água. Essa reação corresponde à recarga da bateria de chumbo.

Alternativa A

Questão 40

Considere a rota sintética descrita na sequência abaixo onde cada etapa ocorre em temperatura e pressão adequadas:
1ª Etapa: o composto A (C_7H_6O) sofre oxidação em solução básica de permanganato de potássio. O produto gerado, após neutralizado, é o ácido benzoico;
2ª Etapa: o ácido benzoico reage com etanol em solução ácida, produzindo o composto B e água;
3ª Etapa: o composto B sofre forte redução com hidreto de lítio-alumínio em éter, gerando dois produtos que, depois de neutralizados, formam então o composto C e o etanol.
Considerando as etapas supracitadas, são feitas as seguintes afirmações:

I) o composto A e o composto C são isômeros.

II) o composto B é um éster.

III) o composto B é o acetato de benzila.

Com base na análise das afirmações acima, assinale a opção correta.

A) Todas as afirmações são falsas.

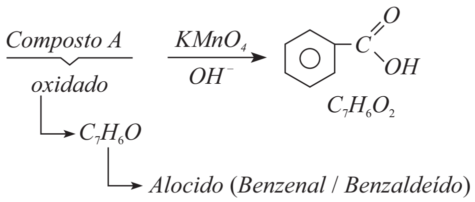
B) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

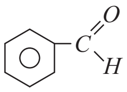
C) Existe apenas uma afirmação verdadeira.

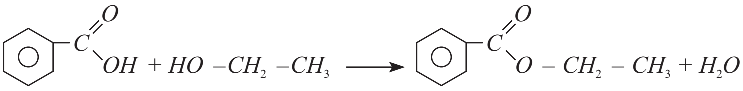
D) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

E) Todas as afirmações são verdadeiras.

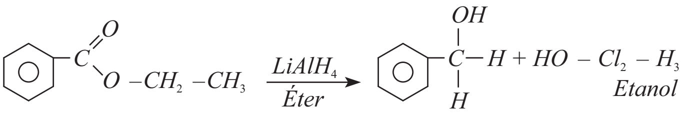
Resolução:

1ª Etapa: 

(A) 

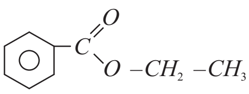
2ª Etapa: 

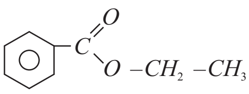
(B)

3ª Etapa: 

Alcool Benzilico

I) A (C_7H_6O) e $B(C_7H_8O)$ não são isômeros. Falso

II) B  Benzoato de etila (Éster)

III)  Benzoato de etila Falso

Alternativa: C (Somente o Item II é verdadeiro)

Matemática
Bruno Fraga
Lafayette
Salviano

Física
Moisés

Química
Thé
Everton
Welson
Gildão
Luís Cícero
William

Colaboradores
Aline Alkmin
Isabela
Leonardo
José Diogo

Digitação e Diagramação
Daniel Alves
Érika Rezende
João Paulo
Valdivina Pinheiro

Desenhistas
Luciano Barros
Rodrigo Ramos
Vinícius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Valdivina Pinheiro

Supervisão Editorial
José Diogo
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3088-7777

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo