QUÍMICA

Constantes

Constante de Avogadro (N_A) = $6,02 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Constante de Faraday (F) = $9,65 \times 10^4$ C mol^{-1} = $9,65 \times 10^4$ A s mol^{-1} = $9,65 \times 10^4$ J V^{-1} mol^{-1}
Volume molar de gás ideal = 22,4 L (CNTP)
Carga elementar = $1,60 \times 10^{-19}$ C
Constante dos gases (R) = $8,21 \times 10^{-2}$ atm L K^{-1} mol^{-1} = 8,31 J K^{-1} mol^{-1} = 1,98 cal K^{-1} mol^{-1}
Constante gravitacional (g) = 9,81 m s^{-2}
Constante de Planck (h) = $6,63 \times 10^{-34}$ m^2 kg s^{-1}
Velocidade da luz no vácuo = $3,0 \times 10^8$ m s^{-1}
Número de Euler (e) = 2,72

Definições

Pressão: 1 atm = 760 mmHg = $1,01325 \times 10^5$ N m^{-2} = 760 Torr = 1,01325 bar
Energia: 1 J = 1 N m = 1 kg m^2 s^{-2} = $6,24 \times 10^{18}$ eV
Condições normais de temperatura e pressão (CNTP): 0° C e 760 mmHg
Condições ambientes: 25 °C e 1 atm
Condições-padrão: 1 bar; concentração das soluções = 1 mol L^{-1} (rigorosamente: atividade unitária das espécies); sólido com estrutura cristalina mais estável nas condições de pressão e temperatura em questão.
(*s*) = sólido. (*ℓ*) = líquido. (*g*) = gás. (*aq*) = aquoso. (*conc*) = concentrado. (*ua*) = unidades arbitrárias. (*u.m.a.*) = unidade de massa atômica. [*X*] = concentração da espécie química *X* em mol L^{-1}
In X = 2,3 log X

Massas Molares

Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar (g mol^{-1})	Elemento Químico	Número Atômico	Massa Molar (g mol^{-1})
H	1	1,01	*K*	19	39,10
Be	4	9,01	*Ca*	20	40,08
C	6	12,01	*Mn*	25	54,94
N	7	14,01	*Se*	34	78,96
O	8	16,00	*I*	53	126,90
Na	11	22,99	*Ba*	56	137,33
Cl	17	35,45			

Questão 01

Considere reações de combustão do etanol.

a) Escreva a equação química balanceada para a reação com oxigênio puro.
b) Escreva a equação química balanceada para a reação com ar atmosférico.
c) Escreva a equação química balanceada para a reação com 50% da quantidade estequiométrica de ar atmosférico.
d) Classifique as reações dos itens **a)**, **b)** e **c)** em ordem crescente de variação de entalpia reacional.

Comentário:

a) $C_2H_5OH_{(e)} + \frac{1}{2}(4+x)\,O_{2(g)} \rightarrow x\,CO_{2(g)} + (2-x)\,CO_{(g)} + 3H_2O_{(g)}$

b) Nas mesmas condições de temperatura e pressão, temos que $\frac{v}{n}$ = constante.

Ar atmosférico formado por $\left\{\begin{matrix} 22\%\ O_2 \\ 78\%\ N_2 \end{matrix}\right\}$ em volume.

$N_{ar} = \frac{100}{22}\ NO_2 \Rightarrow N_{ar} = 4{,}55\ NO_2$

$N_{n2} = \frac{78}{22}\ NO_2 \Rightarrow N_{n2} = 3{,}55\ NO_2$

$$C_2H_5OH_{(e)} + \frac{4{,}55}{2}(4+x)A_r \rightarrow xCO_{2(g)} + (2-x)\,CO_{(g)} + 3H_2O_{(g)} + \frac{3{,}55}{2}(4+x)\,N_2 \quad \Delta H_2$$

$$C_2H_5OH_{(e)} + \frac{1}{2}(4+X)O_{2(g)} + \frac{3{,}55}{2}(4+x)N_{2(g)} \rightarrow X\,CO_{2(g)} + (2-x)\,CO_{(g)} + 3H_2O_{(g)} + \frac{3{,}55}{2}(4+x)N_2 \quad \Delta H_2$$

c) $C_2H_5OH_{(e)} + \frac{1}{4}(4+X)O_2 + \frac{3{,}55}{4}(4+x)N_2 \rightarrow X\,CO_{(g)} + (2-x)C_{(s)} + \frac{3{,}55}{4}(4+x)N_{2(g)} + 3H_2O_{(e)} \quad \Delta H_3$

d) $|\Delta H_{R3}| < |\Delta H_{R2}| < |\Delta H_{R1}|$

Embora $\Delta H_{combustão2}$ seja igual ao $\Delta H_{combustão1}$, a presença de $N_{2(g)}$ remanescente irá absorver parte do calor liberado na combustão e assim diminui a quantidade de calor liberado na reação do item b (ΔH_2).

Questão 02

Uma determinada quantidade de um composto A foi misturada a uma quantidade molar três vezes maior de um composto B, ou seja, A + 3B. Essa mistura foi submetida a dois experimentos de combustão (I e II) separadamente, observando-se:

I. A combustão dessa mistura A + 3B liberou 550 kJ de energia.
II. A combustão dessa mistura A + 3B, adicionada de um composto C em quantidade correspondente a 25% em mol do total da nova mistura, liberou 814 kJ de energia.

Considerando que os compostos A, B e C não reagem entre si, determine os valores numéricos

a) da quantidade, em mol, de A, B e C.
b) do calor de combustão, em kJ mol^{-1}, do composto C, $\Delta H_c(C)$.

Dados: $\Delta H_c(A)$ = -700 kJ mol^{-1}; $\Delta H_c(B)$ = -500 kJ mol^{-1}.

Comentário:

a) 1. $A + O_2 \rightarrow$ Produto $\Delta H(A)$ = -700 kJ/mol
$B + O_2 \rightarrow$ Produto $\Delta H(B)$ = -500 kJ/mol
Na proporção 1:3 (em mol)
ΔH_{Total} = -700 + 3(-500) = -2200 kJ

2. Então:
1A + 3B → Produto ΔH = -2200 kJ
x 3x ΔH = -550 kJ

$$\begin{cases} 1 \text{ mol A} - 3 \text{ mol b} _____ -2200 \text{ kJ} \\ x \text{ mol A} _____ -550 \text{ kJ} \end{cases}$$

$$\boxed{x = 0,25 \text{ mol}} \therefore \boxed{3x = 0,75 \text{ mol}}$$

3. Número de mols de C ⇒ x
x = 25% (0,25 + 0,75 + x)
x = 0,33

b) 1. Calor referente à combustão de 0,33 mol de C

2. A diferença se refere à combustão de C
(-814) – (-550) = -264 kJ

3. Para um mol de C
0,33 mol _____ -264 kJ
1,0 mol _____ x

x = -792 kJ/mol

Respostas:

a) Quantidades de A, B e C
A = 0,25 mol
B = 0,75 mol
C = 0,33 mol

b) ΔH combustão de C= -792 kJ

Questão 03

Considere uma porção de uma solução aquosa de um eletrólito genérico AB, em formato de um cilindro de 2 cm de diâmetro e 314 cm de comprimento, cuja concentração seja de $1,0 \times 10^{-2}$ mol L^{-1}.

Sabendo que a resistência elétrica dessa porção é de $1,0 \times 10^{4}$ ohm, calcule a sua condutividade molar em S cm^2 mol^{-1}.

Comentário:

1. Resistência (R)

$$R = \rho \frac{\ell}{A}$$

$$\boxed{A = \pi r^2}$$

$$A = (3,14)(1)^2 = 3,14 \text{ cm}^2$$

$$10^4 = \rho \cdot \frac{314}{3,14}$$

$$\rho = 10^2 \text{ cm} \cdot \Omega$$

2. A condutividade é o inverso da resistividade.

$$\boxed{\text{Condutividade} = 10^{-2} \text{ cm}^{-1} \cdot S}$$

3. Condutividade molar da solução

$$[AB] = 10^{-2} \frac{\text{mol}}{L} = \frac{10^{-2} \text{ mol}}{1000 \text{ cm}^3}$$

$$\frac{10^{-2} \text{ cm}^{-1} \cdot S}{\frac{10^{-2} \text{ mol}}{1000 \text{ cm}^3}} = \boxed{1000 \text{ S} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{mol}^{-1}}$$

Questão 04

Uma solução aquosa de água oxigenada a 3% (v/v) foi adicionada a soluções aquosas ácidas em dois experimentos diferentes. Foram observados:

I. No primeiro experimento: a adição a uma solução aquosa ácida de permanganato de potássio resultou na perda da coloração da solução, tornando-a incolor.

II. No segundo experimento: a adição a uma solução aquosa ácida de iodeto de potássio inicialmente incolor resultou em uma solução de coloração castanha.

Com base nas observações experimentais, escreva as reações químicas balanceadas para cada experimento e indique os agentes oxidantes e redutores em cada caso, quando houver.

Comentário:

a)

$$2\,MnO_4^- + 16\,H^+ + 10e \rightarrow 2Mn^{+2} + 8H_2O$$
$$5H_2O_2 \rightarrow 10H^+ + 5O_2 + 10e$$
$$2MnO_4^- + 6H^+ + 5H_2O_2 \rightarrow 2Mn^{+2} + 8H_2O + 5O_2$$

Oxidante: $KMnO_4$
Redutor: H_2O_2

b)

$$2I^- \rightarrow I_2 + 2e$$
$$H_2O_2 + 2H^+ + 2e \rightarrow 2H_2O$$
$$2I^- + H_2O_2 + 2H^+ \rightarrow I_2 + 2H_2O$$

Oxidante: H_2O_2
Redutor: KI

Questão 05

Classifique cada uma das substâncias abaixo como óxidos ácido, básico ou anfótero.

a) SeO_2
b) N_2O_3
c) K_2O
d) BeO
e) BaO

Comentário:

a) SeO_2: Dióxido de Selênio – Ácido
b) N_2O_3: Trióxido de Dinitrogênio – Ácido
c) K_2O: Óxido de Potássio – Básico
d) BeO: Óxido de Berílio – Anfótero
e) BaO: Óxido de Bário – Básico

Questão 06

Considere a seguinte reação genérica, nas condições padrão e a 25 ºC:

$$2A^{3+} + 2B^{-} \rightleftharpoons 2A^{2+} + B_2$$

Determine a constante de equilíbrio dessa reação a 25 ºC, sabendo que os valores dos potenciais de eletrodo padrão de semicélula das espécies envolvidas são iguais a + 0,15 V e – 0,15 V.

Comentário:

$$2A^{3+} + 2e^{-} \rightleftharpoons 2A^{2+}$$
$$2B^{-} \rightleftharpoons B_2 + 2e^{-}$$
$$2A^{3+} + 2B^{-} \rightleftharpoons 2A^{2+} + B_2$$

$E^0_{RED} = +0,15\ V$

$E^0_{OXI} = +0,15\ V$

$\Delta E^0 = +0,30\ V$

Sendo $\Delta E = \Delta E^0 - \frac{0,059}{n} \cdot \log Q_c$

para $Q_c = K_c$, temos Que $\Delta E = 0$

$\Delta E^0 = \frac{0,059}{n} \cdot \log K_c$

$K_c = 10^{\left(\frac{\Delta E^0 \cdot n}{0,059}\right)}$

$\Delta E^0 = +0,30$ e $n = 2$

$K_c = 10^{\left(\frac{0,30 \cdot 2}{0,059}\right)}$

$K_c = 10^{10,2}$

$K_c \cong 10^{10}$

Questão 07

Uma solução comercial de HCl é vendida com 37% (em massa) de HCl em água. A densidade dessa solução de HCl é de 1,15 g cm^{-3}.

a) Considerando que o HCl se dissocia completamente, determine o pH dessa solução comercial.

b) O valor do pH determinado no item **a)** possui significado físico? Justifique.

Comentário:

a) Dadas as características da solução comercial, sua concentração em mol/L é dada por:

$[HCl]$ x $MHCl = 10 \cdot d \cdot \tau_{\%}$

$[HCl] = \frac{10 \cdot 1,15 \cdot 37}{36,45} = 11,67\ mol/L$

Considerando a dissociação completa, temos:
pH = -log $[H^+]$ = -log [11,67] = -1,067

b) O pH encontrado caracteriza meio ácido, apesar de seu valor ser negativo. Isso ocorre para concentrações elevadas superiores a 1 mol/L.

Questão 08

Considere as variações de entalpia de processo abaixo tabeladas.

Processo	ΔH (kJ mol⁻¹)
Ionização do Na^0	495,8
Energia de ligação *Cl-Cl*	242,6
Entalpia de vaporização do Na^0	97,4
Afinidade eletrônica do *Cl*	−349
Entalpia de rede do *NaCl*	−787

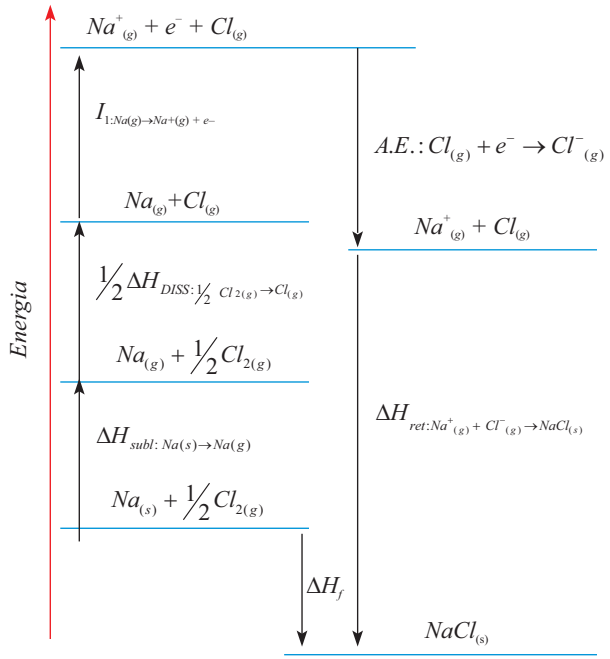
a) Esboce o diagrama de Born-Haber para a formação do *NaCl*(*s*) a partir de $Na^0(s)$ e $Cl_2(g)$ e calcule a variação de entalpia de formação do *NaCl*(*s*).

b) Sabe-se que o valor absoluto (em módulo) da entalpia de rede do *CaO*(*s*) é maior do que a do *NaCl*(*s*). Explique por quê.

Comentário:

a) Ciclo de Born-Haber

Formação do *NaCl*: $Na_{(s)} + \frac{1}{2} Cl_{2(g)} \rightarrow NaCl_{(s)} \qquad \Delta H_f = ?$



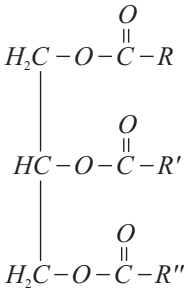
$$\Delta H_f = \Delta H_{subl} + \frac{\Delta H_{diss}}{2} + I_1 + A.E. + \Delta H_{ret}$$

$$\Delta H_f = (97,4) + \left(\frac{242,6}{2}\right) + (495,8) + (-349) + (-787) = (-)\ 421,5 \text{ kJ/mol}$$

b) A entalpia da rede do *CaO* é maior que da rede do *NaCl* devido à carga dos íons.
Íons bivalentes (Ca^{++} e O^{--}) se atraem mais fortemente que os monovalentes (Na^+ e Cl^-).

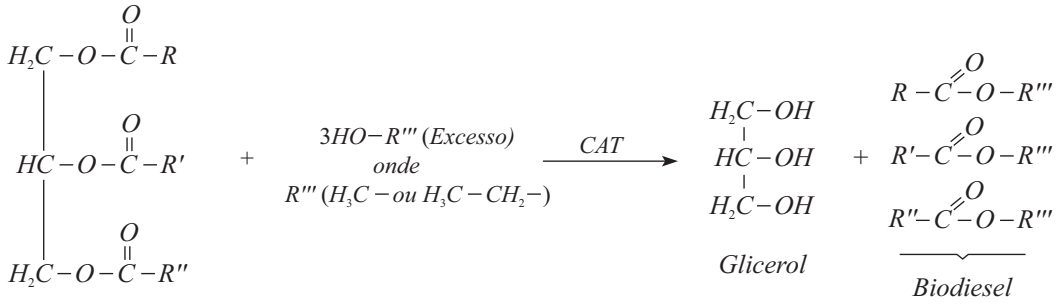
Questão 09

A figura ao lado mostra a estrutura básica de um triacilglicerídeo, em que R, R' e R" representam cadeias carbônicas, saturadas ou insaturadas, com pelo menos oito átomos de carbono. Sabe-se que o triacilglicerídeo pode reagir tanto por transesterificação (reação A) quanto por hidrólise básica (reação B). Em ambos os casos, um produto comum dessas reações pode ser usado na produção de nitroglicerina (reação C). Com base nessas informações, escreva as equações que descrevem as reações A, B e C.

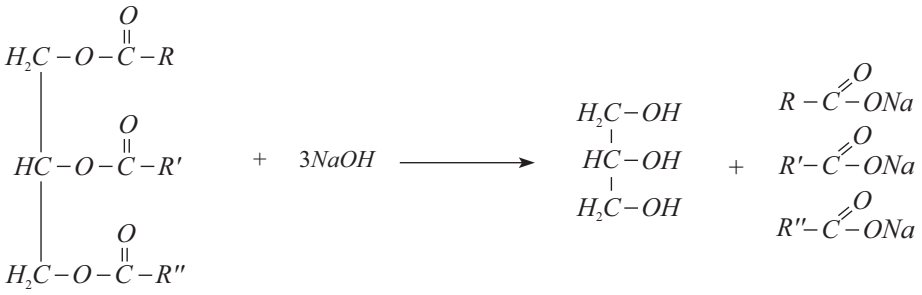


Comentário:

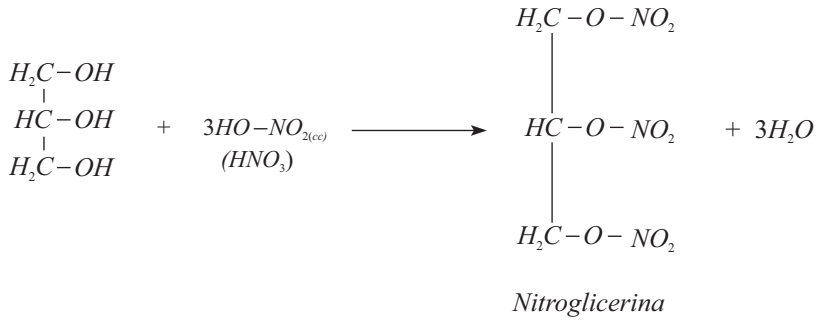
Reação A (Transesterificação)



Reação B (Hidrolise Básica ou Saponificação)



Reação C (Esterificação)



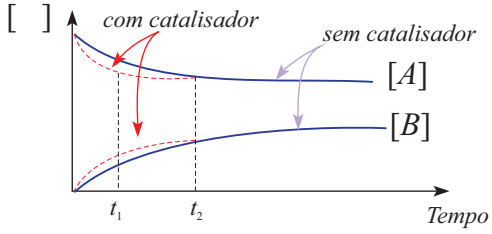
Questão 10

Considere a reação genérica 2A(g) $\rightleftharpoons$ B(g). No instante inicial, apenas o reagente A está presente. Sabendo que a reação direta é exotérmica, construa os gráficos de concentração de cada substância em função do tempo de reação para as seguintes condições:

a) desde o instante inicial até o equilíbrio, na presença e na ausência de catalisador.
b) a partir do equilíbrio inicial, com um rápido aumento da temperatura, até um novo equilíbrio.
c) a partir do equilíbrio inicial, com um rápido aumento da pressão, até um novo equilíbrio.
d) a partir do equilíbrio inicial, com a remoção rápida de 50% do produto B, até um novo equilíbrio.

Comentário:

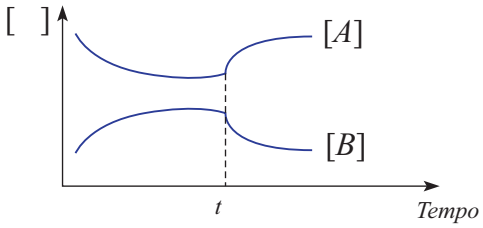
a) $2A_{(g)} \rightleftharpoons B_{(g)}$ ΔH_2O (exotérmico)



t_1: com catalisador.

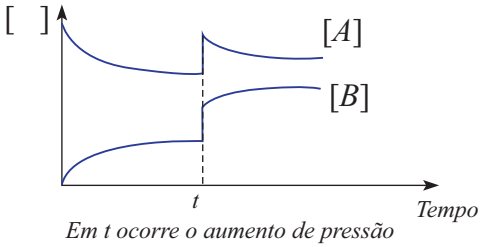
t_2: sem catalisador.

b)



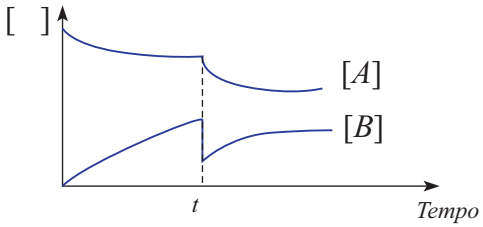
Em t ocorre o aumento de temperatura

c)



Em t ocorre o aumento de pressão

d)



Em t ocorre a remoção de 50% de B

MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{R}$: conjunto dos números reais

i : unidade imaginária: $i^2 = -1$

$[a, b]$ = $\{x \in \mathbb{R} : \alpha \le x \le b\}$

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 01

Determine os valores reais de a e b para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

Comentário:

Sejam p, q, t as raízes de $x^3 + ax^2 + 18$ e p, q, r as raízes de $x^3 + bx + 12$. Nota-se que são todas raízes não nulas, haja vista seus produtos serem não nulos. Decompondo-se os polinômios, obtém-se:

$X^3 + ax^2 + 18 = (x - p)(x - q)(x - t)$

$X^3 + bx + 12 = (x - p)(x - q)(x - r)$

O que resulta nos sistemas:

$$\begin{cases} p + q + t = -a & (1) \\ pq + qt + pt = 0 & (2) \\ pqt = -18 & (3) \end{cases} \qquad \begin{cases} p + q + r = 0 & (4) \\ pq + qr + pr = b & (5) \\ pqr = -12 & (6) \end{cases}$$

Dividindo a Eq. (6) pela Eq. (3), obtém-se:

$$\frac{r}{t} = \frac{12}{18} \rightarrow \boxed{r = \frac{2}{3}t} \quad (7)$$

Substituindo (7) em (4) e em (5):

$$\begin{cases} p + q + \frac{2}{3}t = 0 & (8) \\ pq + \frac{2}{3}t(p + q) = b & (9) \end{cases}$$

Fazendo (1) – (8):

$$\frac{1}{3}t = -a \rightarrow \boxed{t = -3a} \rightarrow \boxed{r = -2a}$$

Em (3):

$$pq = \frac{-18}{t} \rightarrow \boxed{pq = \frac{6}{a}} \quad (10)$$

Em (1):

$$p + q = -t - a \rightarrow \boxed{p + q = 2a} \quad (11)$$

Substituindo (10) e (11) em (2):

$$\frac{6}{a} + 2a \cdot (-3a) = 0 \rightarrow 6a^2 = \frac{6}{a} \rightarrow \boxed{a = 1}$$

Por (9):

$$b = \frac{6}{a} + \frac{2}{3} \cdot (-3a) \cdot (2a) = 6 + \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot 2 \rightarrow \boxed{b = 2}$$

Com isso, o seguinte sistema se forma:

$$\begin{cases} pq = 6 \\ p + q = 2 \end{cases}$$

E as raízes desse sistema são $\boxed{1 \pm i\sqrt{5}}$, que são as raízes buscadas.

Resposta: a = 1, b = 2

Raízes comuns: $1 + i\sqrt{5}$ e $1 - i\sqrt{5}$.

Questão 02

Determine todas as soluções da equação $\text{sen}^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$.

Comentário:

Equação $sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$

Tem-se $sen^6 x + \cos^6 x = \left(sen^2 x + \cos^2 x\right)\left(sen^4 x - sen^2 x \cos^2 x + \cos^4 x\right) = \frac{7}{12}$

$\rightarrow sen^4 x + \cos^4 x - sen^2 x \cos^2 x = \frac{7}{12}$

Tem-se $sen^4 x + \cos^4 x = \left(sen^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\, sen^2 x \cos^2 x = 1 - 2\, sen^2 x \cos^2 x$

Logo, $1 - 2sen^2 x \cos^2 x - sen^2 x \cos^2 x = \frac{7}{12}$

$1 - 3sen^2 x \cos^2 x = \frac{7}{12}$

$1 - \frac{3}{4} \cdot 4sen^2 x \cos^2 x = \frac{7}{12}$

$1 - \frac{3}{4}\left(2\, senx \cos x\right)^2 = \frac{7}{12}$

$1 - \frac{3}{4}\left(sen2x\right)^2 = \frac{7}{12}$

$\frac{3}{4}\left(sen\, 2x\right)^2 = \frac{5}{12}$

$\left(sen\, 2x\right)^2 = \frac{5}{9}$

$sen\, 2x = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\rightarrow 2x = arc\, sen\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{1}{2} arc\ sen\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

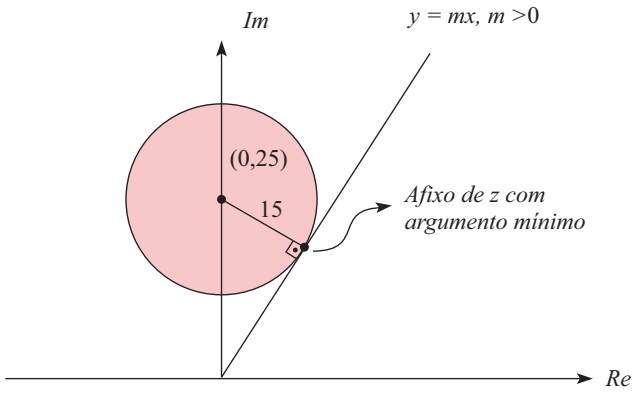
$$\boxed{S = \left\{\frac{1}{2} arc\, sen\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Questão 03

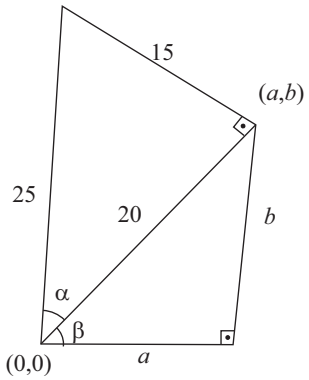
Determine o número complexo z de menor argumento que satisfaz $|z - 25i| \leq 15$.

Comentário:

A inequação $|z - 25i| \leq 15$, representa um círculo com centro em (0,25) e raio 15 no plano de Argand-Gauss. Segue esboço:



Estamos procurando um complexo z, cujo afixo é um ponto do círculo desenhado, com menor argumento possível. Dessa forma, o afixo de z buscado é o ponto de tangência da reta $y = mx$ com a circunferência $x^2 + (y - 25)^2 = 15^2$. Dessa forma, minimizaremos $Arg\ (z)$. Analisando geometricamente:



Como $\alpha + \beta = 90^o$, então $sen\,\alpha = \cos\beta = \frac{3}{5}$ e $\cos\alpha = sen\,\beta = \frac{4}{5}$.

Então, $a = 20cos\beta = 12$, $b = 20sen\beta = 16$.
Como $z = a + bi$, então:
Resposta: $z = 12 + 16i$

Questão 04

Sabendo que x pertence ao intervalo fechado [1,64], determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right).$$

Comentário:

Tem-se $x \in [1,64], f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$

$\rightarrow \log_2\left(\frac{8}{x}\right) = \log_2 8 - \log_2 x = 3 - \log_2 x$

Portanto, $f(x) = (\log_2 x)^4 - 12(\log_2 x)^3 + 36(\log_2 x)^2$

$f(x) = (\log_2 x)^2\left[(\log_2 x)^2 - 12\log_2 x + 36\right]$

$f(x) = (\log_2 x)^2(\log_2 x - 6)^2$

$f(x) = \left[\log_2 x(\log_2 x - 6)\right]^2 = \left[(\log_2 x)^2 - 6\log_2 x\right]^2$

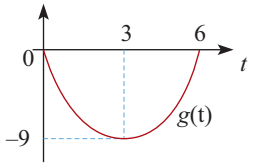
Como, $X \in [1,64] \rightarrow 1 \le x \le 64$

$\log_2 1 \le \log_2 x \le \log_2 64$

$0 < \log_2 x \le 6$

Analisando a função $g(t) = t^2 - 6t$ no intervalo de $t \in [0,6]$, tem-se:

Raízes: 0 e 6
Vértice: (3, -9)



Para $f(x)$ ser máximo, $(\log_2 x)^2 - 6\log_2 x$ precisa ser extremo no intervalo de $x \in [1,64]$

Tomando $t = \log_2 x \rightarrow g(t) = g(\log_2 x) = (\log_2 x)^2 - 6\log_2 x$

A função $g(\log_2 x)$ é extrema para $\log_2 x = 3$ e assume o valor -9.

Dessa forma, $f(x)_{Máx} = f(8) = (-9)^2 = 81$

Portanto, $\boxed{f(x)_{Máx} = 81}$

Questão 05

Seja F o foco da parábola de equação $(y - 5)^2 = 4(x - 7)$, e sejam A e B os focos da elipse de equação $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$. Determine o lugar geométrico formado pelos pontos P do plano tais que a área do triângulo ABP seja numericamente igual ao dobro da distância de P a F.

Comentário:

Parábola: $(y - 5)^2 = 4(x - 7)$

Eq. Geral: $(y - Y_0)^2 = 4p(x - x_0)$ [Parábola voltada para a direita]

Logo, Vértice $V(7,5)$

$4p = 4 \rightarrow p = 1$

Dessa forma, como o eixo de simetria é paralelo ao eixo x:

Foco da Parábola $F(8,5)$

Elipse: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{8} = 1$

Eq. Geral (eixo maior horizontal): $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Logo, Centro $O(4,2)$

Tem-se ainda $a = 3$ e $b = 2\sqrt{2}$

Dessa forma: $b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow c^2 = 9 - 8 \rightarrow c = 1$

Como eixo maior é horizontal:

Focos da Elipse $A(3,2)$ e $B(5,2)$

- Seja $P(x, y)$. Tem-se $A_{ABP} = 2\, d_{P,F}$

$$A_{ABP} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2x + 5y + 6 - 10 - 2x - 3y) = \frac{1}{2}(2y - 4) = y - 2$$

$$d_{P,F} = \sqrt{(x-8)^2 + (y-5)^2}$$

$$\rightarrow A_{ABP} = 2\, d_{P,F}$$

$$y - 2 = 2\sqrt{(x-8)^2 + (y-5)^2}$$

$$(y-2)^2 = 4(x-8)^2 + 4(y-5)^2$$

$$4(x-8)^2 + (2y-10)^2 - (y-2)^2 = 0$$

$$4(x-8)^2 + (3y-12)(y-8) = 0$$

$$4(x-8)^2 + 3(y-4)(y-8) = 0$$

$$4(x-8)^2 + 3(y^2 - 12y + 32) = 0$$

$$4(x-8)^2 + 3(y^2 - 12y + 32) + 12 = 12$$

$$4(x-8)^2 + 3\underbrace{(y^2 - 12y + 36)}_{(y-6)^2} = 12 \rightarrow \frac{(x-8)^2}{3} + \frac{(y-6)^2}{4} = 1$$

Lugar geométrico dos pontos P é uma Elipse de centro (8,6), eixo maior vertical, semi-eixo maior $a' = 2$ e semi-eixo menor $b' = \sqrt{3}$.

Questão 06

Sejam a, b e c três números reais em progressão aritmética crescente, satisfazendo

$$\cos a + \cos b + \cos c = 0 \quad \text{e} \quad \text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c = 0.$$

Encontre a menor razão possível para essa progressão aritmética.

Comentário:
Como (a, b, c) estão em *P.A* crescente, então (a, b, c) = ($b - d$, b, $b+d$), onde $d > 0$.

Substituindo nas equações do enunciado, obtém-se:

$$\begin{cases} \cos(b-d) + \cos b + \cos(b+d) = 0 \\ sen(b-d) + sen\, b + sen(b+d) = 0 \end{cases}$$

Utilizando as fórmulas de soma e de subtração de arcos, tem-se:

$$\begin{cases} \cos b + 2\cos b \cos d = 0 & \rightarrow \cos b(1 + 2\cos d) = 0 \\ sen\, b + 2\, sen\, b \cos d = 0 & \rightarrow sen\, b(1 + 2\cos d) = 0 \end{cases}$$

O que resulta em duas possibilidades:

Se $\cos d \neq -\frac{1}{2}$, então $\cos b = sen\, b = 0$ (Absurdo!)

Se $\cos d = -\frac{1}{2}$, então $d = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Como pede-se o valor mínimo e d é um real positivo, então:

Resposta: o valor mínimo de d é $\frac{2\pi}{3}$.

Questão 07

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

Comentário:
Seja $n = (2abcde)_{10}$ e seja $y = (abcde)_{10}$.

Equacionando o problema, temos:

$$3 \cdot \left[(2abcde)_{10}\right] = (abcde2)_{10}$$

Com isso,

$$3 \cdot (200000 + y) = 10y + 2$$

$$600000 + 3y = 10y + 2$$

$$7y = 599.998$$

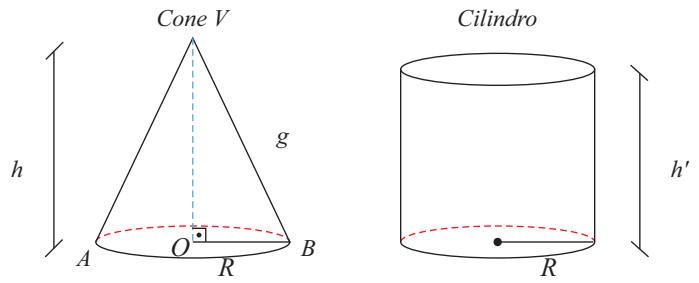
$$\boxed{y = 85.714}$$

Resposta: n = 285.714

Questão 08

Um cone circular reto, de altura h, e um cilindro circular reto têm bases de mesmo raio. O volume do cone é metade do volume do cilindro, e a área lateral do cone é igual à área lateral do cilindro. Determine, em função de h, o raio da esfera inscrita no cone.

Comentário:



- $V_{cone} = \frac{1}{2} V_{cilindro}$

  $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{2}\pi R^2 h'$

  $\Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{3}{2} \rightarrow h' = \frac{2}{3}h$

- $A_{L(Cone)} = A_{L(Cilindro)}$

  $\pi R g = 2\pi R h'$

  $g = 2h' = \frac{4}{3}h$

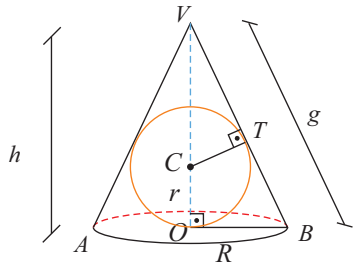
- Pitágoras no ΔVOB:

  $h^2 + R^2 = g^2$

  $h^2 + R^2 = \left(\frac{4}{3}h\right)^2$

  $R^2 = \frac{16}{9}h^2 - h^2 \rightarrow R^2 = \frac{7h^2}{9} \rightarrow R = \frac{\sqrt{7}}{3}h$

- Esfera inscrita no cone



$\Delta VTC \sim \Delta VOB$

$\frac{VC}{VB} = \frac{CT}{BO}$

$$\frac{h-r}{g} = \frac{r}{R} = \frac{h}{g+R} \Rightarrow r = \frac{Rh}{g+R} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}h}{\left(\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)h}$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}}h = \frac{\sqrt{7}\left(4-\sqrt{7}\right)}{9}h \Rightarrow \boxed{r = \left(\frac{4\sqrt{7}-7}{9}\right)h}$$

Questão 09

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $\text{sen}\,\hat{B}$, sabendo que

$$\text{sen}\,(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{4}{5} = \text{sen}(\hat{A}-\hat{C}).$$

Comentário:

Inicialmente, verifiquemos os intervalos:

Como $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C} > 0$ e $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^o$, então $0 < \hat{A}+\hat{B} < 180^o$ e $0 \le \hat{A}-\hat{C} < 180^o$. Com isso, temos duas possibilidades para a igualdade:

- $\hat{A}+\hat{B} = \hat{A}-\hat{C} \Rightarrow \hat{B} = -\hat{C}$ (Absurdo!)
- $\hat{A}+\hat{B} = 180^o - \left(\hat{A}-\hat{C}\right)$

Então:

$180^o - \hat{C} = 180^o - \hat{A} + \hat{C} \Rightarrow \boxed{\hat{A} = 2\hat{C}}$

Com isso, como $\operatorname{sen}\left(\hat{A}-\hat{C}\right)=\frac{4}{5}$, então $\boxed{\operatorname{sen}\hat{C}=\frac{4}{5}}$

Como $\operatorname{sen}\hat{B}=\operatorname{sen}\left(180^{o}-\hat{A}-\hat{C}\right)\Rightarrow \operatorname{sen}\hat{B}=\operatorname{sen}\left(180^{o}-3\hat{C}\right)$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\hat{B}=\operatorname{sen}3\hat{C}}$

Usando a fórmula do arco triplo:

$\operatorname{sen}\hat{B}=3\cdot\operatorname{sen}\hat{C}-4\cdot\operatorname{sen}^{3}\hat{C}$

$\operatorname{sen}\hat{B}=3\cdot\frac{4}{5}-\frac{4\cdot 4^{3}}{5^{3}}=\frac{44}{125}$

Resposta: $\operatorname{sen}\hat{B}=\frac{44}{125}$

Questão 10

Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto {1, 2, 3, ..., 29, 30}. Determine a probabilidade de a soma desses três números ser divisível por 3.

Comentário:

Tem-se o conjunto {1, 2, 3, ..., 29, 30}

I. Se tomarmos 3 números múltiplos de 3 $\Rightarrow$ Soma é divisível por 3
C_1 = {3, 6, 9, ..., 27, 30}

$n(C_1) = 10$ Possibilidades = $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}=120$

II. Se tomarmos 3 números do tipo $3k - 1$, $k \in \{1, 2, ..., 10\}$, tem-se:

$S = 3k - 1 + 3(k + 1) - 1 + 3(k + 2) - 1 = 9k + 6 = 3(k + 2)$

Logo, a soma é divisível por 3

C_2 = {2, 5, 8, ..., 26, 29}

$n(C_2) = 10$ Possibilidades = $\binom{10}{3}=120$

III. Se tomarmos 3 números do tipo $3k - 2$, $k \in \{1, 2, ..., 10\}$, tem-se:

$S = 3k - 2 + 3(k + 1) - 2 + 3(k + 2) - 2 = 9k + 3 = 3(k + 1)$

Logo, a soma é divisível por 3

C_3 = {1,4,7, ..., 25, 28}

$n(C_2) = 10$ Possibilidades = $\binom{10}{3}=120$

IV. Se tomarmos 1 termo de cada um dos conjuntos C_1, C_2, C_3, tem-se:

Termo $(C_1) = 3k$, $k \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$,
Termo $(C_2) = 3k' - 1$, $k' \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$
Termo $(C_3) = 3k'' - 2$, $k'' \in \{1, 2, 3, ..., 10\}$

$S = 3k + 3k' - 1 + 3k'' - 2 = 3(k + k' + k'' - 1)$

Logo, a soma é divisível por 3

Possibilidades = $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$

Espaço Amostral: $\binom{30}{3}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{3\cdot 2}=4060$

Probabilidade: $P=\frac{120+120+120+1000}{4060}=\frac{1360}{4060}$

$$\boxed{P=\frac{68}{203}}$$

Professores

Química
Anderson
Thé
Welson

Matemática
Mateus
Rodolfo

Colaborador
Cirillo Sales

Digitação e Diagramação
Igor Soares
Márcia Santana
Pollyanna Chagas

Revisor
Celso Faria

Desenhista
Rodrigo Ramos

Supervisão Editorial
Aline Alkmin

Copyright©Olimpo2018

A Resolução Comentada das provas do ITA
poderá ser obtida diretamente no site do ***GRUPO OLIMPO****.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências e habilidades específicas.
Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br

opirus
EDITORA

olimpo