Questão 01

Um jogo de dominó possui 28 peças com duas pontas numeradas de zero a seis, independentemente, de modo que cada peça seja única, conforme ilustra a Figura 1.

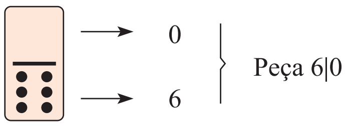


Figura 1

O jogo se desenrola da seguinte forma:

1- Quatro jogadores se posicionam nos lados de uma mesa quadrada.
2- No início do jogo, cada jogador recebe um conjunto de 7 peças, de forma aleatória, de modo que somente o detentor das peças possa ver seu conteúdo.
3- As ações ocorrem por turnos no sentido anti-horário.
4- O jogador com a peça 6|6 coloca-a sobre a mesa e em seguida cada jogador, na sua vez, executa uma de duas ações possíveis:
   a. Adiciona uma de suas peças de forma adjacente a uma das duas extremidades livres do jogo na mesa, de modo que as peças sejam encaixadas com pontas de mesmo valor.
   b. Passa a vez, caso não possua nenhuma peça com ponta igual a uma das extremidades livres da mesa.
5- Vence o jogo o primeiro jogador que ficar sem peças na mão.

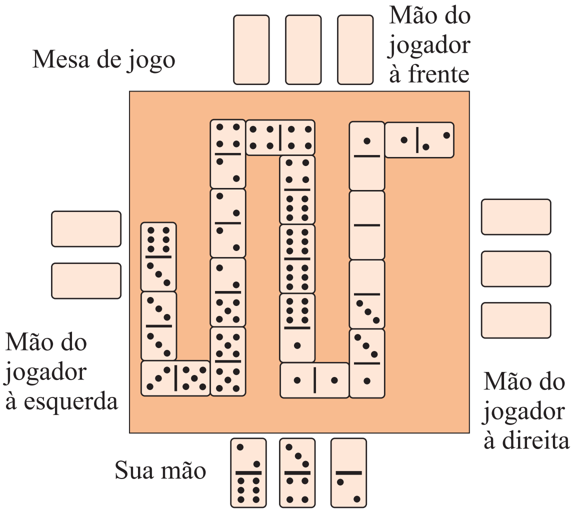


Figura 2

No jogo da Figura 2 (acima), é a sua vez de jogar e você constatou que o jogador à sua direita não possui peças com ponta 5 e o jogador à sua frente não possui peças com ponta 0. Você analisou todas as possíveis configurações de peças que os jogadores podem ter em suas mãos e decidiu jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça de sua posse, e que esta será a sua última peça em mão. Ao utilizar essa estratégia:

a) Quantas configurações de peças nas mãos dos jogadores garantem a vitória do jogo a você?
b) Essa quantidade corresponde a qual percentual do total de configurações possíveis?

<u>Observação</u>:
- A ordem das peças na mão de um jogador não importa.

Resolução:

a) O conjunto das peças que estão nas mãos dos outros jogadores é $\{3|2, 4|0, 4|1, 5|0, 5|1, 5|4, 6|0, 6|5\}$. Pelas restrições, necessariamente, a peça $5|0$ deve estar na mão do jogador à esquerda. Considerando que eu devo jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça da minha posse, eu devo encaixar a peça $6|2$ na peça $6|3$, deixando as duas pontas livres com o número 2. Para que eu tenha garantida a vitória, basta que a peça $3|2$ não esteja na mão do jogador à esquerda. Com a peça $3|2$ na mão do jogador à direita, o número de configurações é 6, sendo duas em que ele tem apenas uma peça com o número 0 e quatro em que ele tem duas peças com o número 0. Com a peça $3|2$ na mão do jogador à frente, o número de configurações é 3. Assim, ao todo, $6+3=9$ configurações garantem a minha vitória.

b) Além das 9 configurações que fazem com que eu tenha a vitória garantida, há apenas outra configuração possível. Esta ocorre na hipótese de o jogador à esquerda ter as peças $5|0$ e $3|2$. Com isso, há, ao todo, 10 possíveis configurações. Assim, a quantidade de configurações que garantem a minha vitória corresponde a 90% do total de configurações possíveis.

Questão 02

Definimos a função $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=1 \\ f(2n)=f(n),\ n\geq 1 \\ f(2n+1)=f(n)+2^{[\log_2 n]}, n\geq 1 \end{cases}$$

Determine $f(f(2019))$.

Observação: $[k]$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

Resolução:

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$f(0)=0$

$f(1)=1$

$f(2n)=f(n)$

$f(2n+1)=2^{\lfloor \log_2 n\rfloor}+f(n)$

Se $2^m < n < 2^{m+1}$, então $\lfloor \log_2 n \rfloor = m$.

$$\begin{aligned} f(2019) &= 2^{\lfloor \log_2 1009\rfloor} + f(1009) \\ &= 2^9 + 2^{\lfloor \log_2 504\rfloor} + f(504) \\ &= 2^9 + 2^8 + f(252) \\ &= 2^9 + 2^8 + f(126) \\ &= 2^9 + 2^8 + f(63) \\ &= 2^9 + 2^8 + 2^{\lfloor \log_2 31\rfloor} + f(31) \\ &= 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^{\lfloor \log_2 15\rfloor} + f(15) \\ &= 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^{\lfloor \log_2 7\rfloor} + f(7) \\ &= 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^{\lfloor \log_2 3\rfloor} + f(3) \\ &= 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^{\lfloor \log_2 1\rfloor} + f(1) \\ &= 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1 \\ &= 800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f(2019)) &= f(800) \\ &= f(400) \\ &= f(200) \\ &= f(100) \\ &= f(50) \\ &= f(25) \\ &= 2^{\lfloor \log_2 12\rfloor} + f(12) \end{aligned}$$

$$= 2^3 + f(6)$$
$$= 2^3 + f(3)$$
$$= 2^3 + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} + f(1)$$
$$= 2^3 + 2^0 + 1$$
$$= 8 + 1 + 1$$
$$= 10$$

Questão 03

Dadas as funções definidas nos reais $\mathbb{R}$:

$$f_1(x) = e^x, f_2(x) = \text{sen}(x), f_3(x) = \cos(x), f_4(x) = \text{sen}(2x) \text{ e } f_5(x) = e^{-x}.$$

Mostre que existe uma única solução a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, tal que:
$a_1f_1(x) + a_2f_2(x) + a_3f_3(x) + a_4f_4(x) + a_5f_5(x)$ seja a função constante nula, onde a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, $\in \mathbb{R}$.

Resolução:

Definindo
$F(x) = a_1e^x + a_2\text{sen}(x) + a_3\cos(x) + a_4 \text{ sen}(2x) + a_5e^{-x}$

Deseja-se calcular a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 para que $F(x)$ seja identicamente nula.

Denotando por $F^{(i)}$ a i-ésima derivada de F, temos

$F^{(4)}(x) = a_1e^x + a_2 \text{ sen}(x) + a_3\cos(x) + 16\, a_4 \text{ sen}(2x) + a_5e^{-x}$
$F^{(4)}(x) - F(x) = 15\, a_4 \text{ sen}(2x) \equiv 0$ (Identicamente nula)
$\therefore a_4 = 0$
$F(x) = a_1e^x + a_2 \text{ sen}(x) + a_3\cos(x) + a_4 \text{ sen}(2x) + a_5e^{-x}$, com $a_4 = 0$
$F(x) = a_1e^x + a_2 \text{ sen}(x) + a_3\cos(x) + a_5e^{-x}$
$F^{(2)}(x) = a_1e^x - a_2 \text{ sen}(x) - a_3\cos(x) + a_5e^{-x}$
$F^{(2)}(x) - F(x) \equiv 0 \Rightarrow -2 \cdot a_2 \text{ sen}(x) - 2a_3\cos(x) \equiv 0$
$\Rightarrow a_2 = a_0 = 0.$
$F^{(2)}(x) + F(x) \equiv 0 \Rightarrow 2a_1e^x + 2a_5e^{-x} \equiv 0 \Rightarrow a_1 = a_5 = 0$
$\therefore F(x) \equiv 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

Questão 04

Seja Z um número complexo tal que $\dfrac{2Z}{\overline{Z}i}$ possui argumento igual a $3\pi/4$ e $\log_3\left(2Z + 2\overline{Z} + 1\right) = 2$. Determine o número complexo Z.

Resolução:

Seja $Z = a + bi = |Z|cis\theta \rightarrow \begin{cases} a = |Z|\cos\theta \\ b = |Z|\text{sen}\theta \end{cases} \rightarrow \dfrac{b}{a} = tg\theta\ \boxed{I}$

Logo, tem-se $\overline{Z} = a - bi = |Z|cis(-\theta)$.

Do enunciado, $\log_3\left(2Z + 2\overline{Z} + 1\right) = 2$

$\rightarrow 2Z + 2\overline{Z} + 1 = 9$
$\rightarrow 2(a + bi) + 2(a - bi) + 1 = 9$
$\rightarrow 4a = 8 \rightarrow \underline{|a = 2}$

Seja $W = \dfrac{2Z}{\overline{Z}i} \rightarrow W = \dfrac{2|Z|cis\theta}{|Z|cis(-\theta)cis\left(\dfrac{\pi}{2}\right)} = 2cis\left[\theta - \left(-\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)\right] = 2cis\left(2\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

Do enunciado:

$$\Rightarrow \arg(W)=\frac{3\pi}{4}\rightarrow 2\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}\rightarrow 2\theta=\frac{5\pi}{4}\rightarrow \theta=\frac{5\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

Tem-se que $tg\frac{\pi}{4}=tg\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)=\dfrac{2tg\frac{\pi}{8}}{1-tg^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}=1$

$$\rightarrow tg^2\frac{\pi}{8}+2tg\frac{\pi}{8}-1=0$$

$\Delta=4+4=8\Rightarrow tg\frac{\pi}{8}=\frac{-2\pm2\sqrt{2}}{2}$. Como $tg\frac{\pi}{8}>0\Rightarrow tg\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

Tem-se $tg\theta=tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=-\cot g\frac{\pi}{8}$

Em $\boxed{I}$, tem-se $b=a\,tg\theta$

$$\rightarrow b=2\left(-\cot g\frac{\pi}{8}\right)=\frac{-2}{\sqrt{2}-1}=\frac{-2\left(\sqrt{2}+1\right)}{2-1}=-2\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Portanto, $\boxed{Z=2-2\left(\sqrt{2}+1\right)i}$

Questão 05

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

Resolução:

Seja uma PG com razão q, cujos elementos são números naturais. Provemos que 16, 24 e 81 podem ser termos de uma PG desse tipo.
Da teoria de PG, tem-se:

I. $81=16\cdot q^a\rightarrow q^a=\frac{81}{16}=\frac{3^4}{2^4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4$

II. $24=16\cdot q^b\rightarrow q^b=\frac{24}{16}=\frac{2^3\cdot3}{2^3\cdot2}=\left(\frac{3}{2}\right)^1$

III. $81=24\cdot q^c\rightarrow q^c=\frac{81}{24}=\frac{3^3\cdot3}{2^3\cdot3}=\left(\frac{3}{2}\right)^3$

Dessa forma, pode-se afirmar que $q=\frac{3}{2}$, com $a=4$, $b=1$ e $c=3$.

Vejamos se há termos menores que 16 nessa PG:

$x=\frac{16}{q}=\frac{16}{3/2}=\frac{32}{3}\rightarrow x\notin\mathbb{N}\rightarrow 16$ é o 1° termo da $PG\rightarrow a_1=16$

Encontremos os outros termos dessa PG:

$a_1=16$

$a_2=16q=16\cdot\frac{3}{2}=24$

$a_3=16q^2=24\cdot\frac{3}{2}=36$

$a_4=16q^3=36\cdot\frac{3}{2}=54$

$a_5=16q^4=54\cdot\frac{3}{2}=81$

$a_6=16q^5=81\cdot\frac{3}{2}=\frac{243}{2}\rightarrow a_6\notin\mathbb{N}\rightarrow$ Essa PG só tem 5 termos

Logo, a PG é (16, 24, 36, 54, 81).

Questão 06

Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

Resolução:

1ª Solução

Analisando a derivada de $q(x)$ é possível verificar os pontos onde ocorrem os máximos e mínimos

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$$

$$q'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40$$

Por pesquisa de raízes percebemos que -1 é raiz, ou seja, $q'(-1) = 0$.

Desta forma podemos reduzir o grau da equação simplificada de $q'(x)$: $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$, através de *Briot-Ruffini*:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -6 & 3 & 10 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

As outras raízes são dadas por:

$$x = \frac{+7 \pm \sqrt{7^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Testando os valores no polinômio original, temos:

$$q(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^3 + 6(-1)^2 + 40(-1) + 25 + K = 0 + k$$

$$q(2) = (2)^4 - 8(2)^3 + 6(2)^2 + 40(2) + 25 + K = 81 + k$$

$$q(5) = (5)^4 - 8(5)^3 + 6(5)^2 + 40(5) + 25 + K = 0 + k$$

Desta forma q(x) atinge o mínimo em -1 e 5

Logo: $0 + k = -64 \Rightarrow k = -64$

$q(x)$ é portanto: $x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 39 = 0$

Por pesquisa de raízes temos que 1 e 3 são raízes e podemos escrever $q(x)$ da seguinte forma:

$$q(x) = (x-3)(x-1)(ax^2 + bx^2 + c) = (x^2 - 4x + 3)(ax^2 + bx^2 + c)$$

Dividindo $q(x)$ por $x^2 - 4x + 3$, temos:

$$\begin{array}{rl} x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 39 & \underline{|x^2 - 4x + 3} \\ \underline{-x^4 + 4x^3 - 3x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 4x - 13 \\ -4x^3 + 3x^2 + 40x - 39 & \\ \underline{+4x^3 - 16x^2 + 12x \qquad} & \\ -13x^2 + 52x - 39 & \\ \underline{13x^2 + 52x - 39} & \\ 0 & \end{array}$$

As raízes $x^2 - 4x - 13$ são:

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(1)(-13)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{17}}{2} = \begin{cases} x' = 2 + \sqrt{17} \\ x'' = 2 - \sqrt{17} \end{cases}$$

As raízes de $q(x)$ são, portanto: $\left\{2 - \sqrt{17}, 1, 3, 2 + \sqrt{17}\right\}$

2ª Solução

$$q(x) - k = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 = \left((x-5)(x+1)\right)^2$$

$$q(x) - k = \left((x-5)(x+1)\right)^2 \geq 0$$

$$q(x) \geq k$$

Como o mínimo de $q(x)$ é -64, $k = -64$

$$q(x) = \left((x+1)(x-5)\right)^2 - 8^2$$

$$q(x) = \left((x+1)(x-5) + 8\right)\left((x+1)(x-5) - 8\right)$$

$$q(x) = \left(x^2 - 4x + 3\right)\left(x^2 - 4x - 13\right)$$

$$q(x) = (x-1)(x-3)\left(x^2 - 4x - 13\right) \to x^2 - 4x - 13 = 0 \to x = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 + 4 - 13}}{2}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{17}$$

As raízes de $q(x)$ são, portanto: $\left\{2 - \sqrt{17}, 1, 3, 2 + \sqrt{17}\right\}$

Questão 07

Determine todas as soluções da equação

$$4\,sen^2(7x)\cdot\cos(2x)+2\,sen(9x)+8\,sen^2(x)+5\cos(2x)+2\,sen(5x)=4$$

no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$.

Resolução:

$$4sen^2(7x)\cos(2x)+2sen(9x)+8sen^2(x)+5\cos(2x)+2sen(5x)=4,\qquad x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$$

$$4sen^2(7x)\cos(2x)+2sen(9x)+5\cos(2x)+2sen(5x)-(4-8sen^2x)=0$$

$$4sen^2(7x)\cos(2x)+2sen(9x)+2sen(5x)+5\cos(2x)-4\underbrace{(1-2sen^2x)}_{\cos(2x)}=0$$

$$4sen^2(7x)\cos(2x)+2\left(sen(9x)+sen(5x)\right)+5\cos(2x)-4\cos(2x)=0$$

$$4sen^2(7x)\cos(2x)+2\cdot 2sen\left(\frac{9x+5x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x-5x}{2}\right)+\cos(2x)=0$$

$$4sen^2(7x)\cos(2x)+4sen(7x)\cos(2x)+\cos(2x)=0$$

$$\cos(2x)\cdot\left[4sen^2(7x)+4sen(7x)+1\right]=0$$

$$\cos(2x)\cdot\left[2sen(7x)+1\right]^2=0$$

$$\cos(2x)=0 \qquad ou \qquad 2sen(7x)+1=0$$

$$sen(7x)=-\frac{1}{2}$$

$Para:\quad \cos(2x)=0$

$2x=\frac{k}{2}+k\pi$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}=\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi$

$Como\ x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]:$

$\frac{3\pi}{2}\le\left(\frac{2k+1}{4}\right)\pi\le 2\pi$

$6\le 2k+1\le 8$

$5\le 2k\le 7$

$\frac{5}{2}\le k\le\frac{7}{2}\Rightarrow k=3$

$Logo,\ x\in\frac{7\pi}{4}$

ou

$Para:$

$2sen(7x)+1=0$

$sen(7x)=-\frac{1}{2}$

$7x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$x=\left(\frac{12k-1}{42}\right)\pi$

$Como\ x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]:$

$\frac{3\pi}{2}\le\left(\frac{12k-1}{42}\right)\pi\le 2\pi$

$63\le 12k-1\le 84$

$64\le 12k\le 85$

$\frac{16}{3}\le k\le\frac{85}{12}\ \Rightarrow\ k=6\ e\ k=7$

$Logo,\ x=\frac{71\pi}{42}\ ou\ x=\frac{83\pi}{42}$

ou

$Para:$

$2sen(7x)+1=0$

$sen(7x)=-\frac{1}{2}$

$7x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$

$x=\left(\frac{12k+7}{42}\right)\pi$

$Como\ x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]:$

$\frac{3\pi}{2}\le\left(\frac{12k+7}{42}\right)\pi\le 2\pi$

$63\le 12k7\le 84$

$56\le 12k\le 77$

$\frac{14}{3}\le k\le\frac{77}{12}\ \Rightarrow\ k=5\ e\ k=6$

$Logo,\ x=\frac{67\pi}{42}\ ou\ x=\frac{79\pi}{42}$

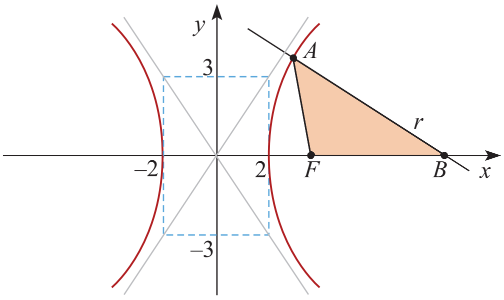
$$\boxed{S=\left\{\frac{67\alpha}{42},\frac{71\alpha}{42},\frac{7\alpha}{4},\frac{79\alpha}{42},\frac{83\alpha}{42}\right\}}$$

Questão 08

A reta r é normal à cônica C, de equação $9x^2 - 4y^2 = 36$, no ponto $A = \left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ e intercepta o eixo das abscissas no ponto B. Sabendo que F é o foco da cônica C mais próximo ao ponto A. determine a área do triângulo ABF.

Resolução:

A figura ilustra a cônica e os demais pontos.

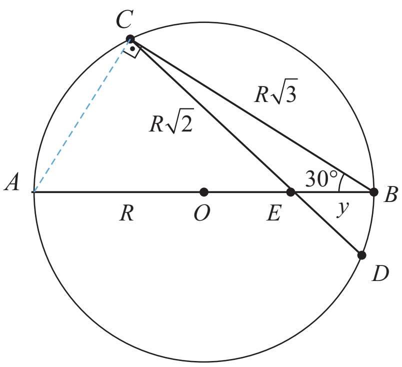


Derivando implicitamente a equação da cônica, tem-se que $\frac{dy}{dx} = \frac{9x}{4y}$. Com isso, o coeficiente angular da reta normal à cônica no ponto A, que é a reta r, é tal que $m_r = -\frac{4y_A}{9x_A}$, ou ainda, $m_r = -\frac{2\sqrt{5}}{9}$. Sendo $B = (x_B, 0)$, tem-se que $-\frac{2\sqrt{5}}{9} = \frac{y_A - 0}{x_A - x_B}$, o que implica $x_B = \frac{39}{4}$, considerando que $F = (c, 0)$, tem-se que $c^2 = 4 + 9$, ou ainda $c = \sqrt{13}$. Desse modo, $x_F = \sqrt{13}$. Com isso, sendo S a área do triângulo ABF, $S = \frac{(x_B - x_F) \cdot y_A}{2} = \frac{3}{16} \cdot \left(39 - 4\sqrt{13}\right) \cdot \sqrt{5}$.

Questão 09

Uma corda CD corta o diâmetro AB de um círculo de raio R no ponto E. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30^\circ$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

Resolução:



Seja O o centro da circunferência de diâmetro $\overline{AB} = 2R$.

Dado que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$ e $A\hat{B}C = 30^\circ$, tem-se que o ponto E deve estar entre O e B, conforme a figura, pois $\overline{EC} = R\sqrt{2} > R = \overline{OC}$. Caso contrário, teríamos $\overline{EC} \leq R$.

Dado que $\overline{AB}$ é diâmetro $\rightarrow \Delta ABC$ é retângulo em C. Desta forma, $\overline{BC} = \overline{AB}\cos 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Seja $\overline{EB} = y \Rightarrow \overline{AE} = 2R - y$. No ΔBEC, tem-se:

– Lei dos cossenos

$$\overline{EC}^2 = \overline{EB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\,\overline{EB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos 30^\circ$$

$$(R\sqrt{2})^2 = y^2 + (R\sqrt{3})^2 - 2\cdot y\cdot R\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2R^2 - y^2 = 3R^2 - 3Ry$$

$$y^2 - 3Ry + R^2 = 0$$

$$\Delta = 9R^2 - 4R^2 = 5R^2$$

$$y = \frac{3R \pm \sqrt{5}R}{2}$$

Descartando a solução $\oplus$, pois $y < 2R$:

$$y = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)R = \overline{EB}$$

$$\Rightarrow \overline{AE} = 2R - y = \left(\frac{4-3+\sqrt{5}}{2}\right)R = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)R$$

Dadas as cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tem-se a seguinte Potência de Ponto:

$$\overline{AE}\cdot\overline{EB} = \overline{EC}\cdot\overline{ED}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)R\cdot\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)R = R\sqrt{2}\cdot\overline{ED}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cdot\overline{ED} = \frac{3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}-5}{4}R$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\cdot\overline{ED} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4}R$$

$$\boxed{\overline{ED} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{4}R = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}R}$$

Questão 10

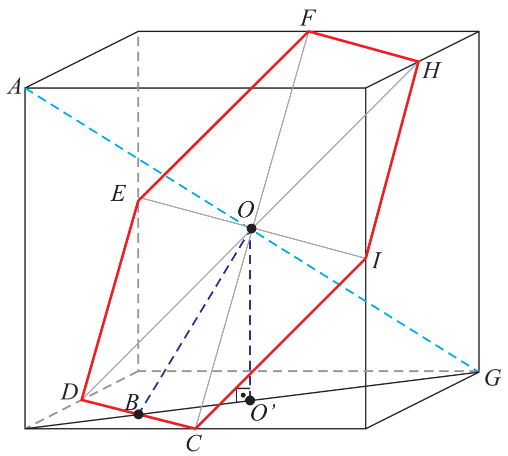
Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

a) o apótema dessa seção hexagonal;

b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

Resolução:

a) Observe a figura.

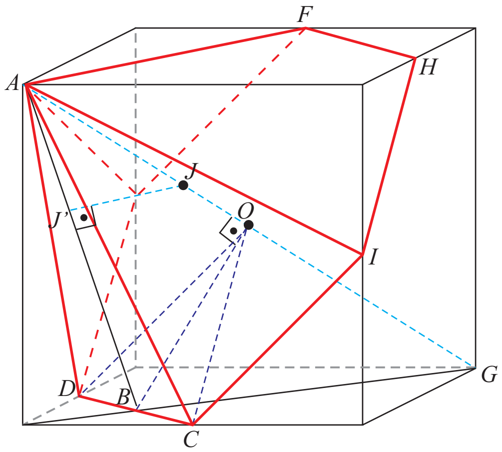


Os vértices da secção devem ser os pontos médios das respectivas arestas a que pertencem. O ponto O é o centro do hexágono e do cubo, o ponto O’ é a projeção de O sobre a face inferior do cubo e B é o ponto médio de $\overline{CD}$. Com isso, $\overline{OO'} = \frac{a}{2}$ e $\overline{O'B} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Assim, $\overline{OB}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$, o que implica $\overline{OB} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Portanto, o apótema da secção é $\frac{a\sqrt{6}}{4}$.

b) Observe a figura.



Na figura, $\overline{JO} = \overline{JJ'} = R$, sendo R o raio da esfera. Sabe-se que $\overline{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Com isso, já que $\overline{OB} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$, no ΔAOB, $\overline{AB}^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2$, o que implica $\overline{AB} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Com a semelhança dos triângulos AOB e AJ’J, observa-se que $\frac{\overline{OB}}{R} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO} - R}$, ou ainda $\frac{\frac{a\sqrt{6}}{4}}{R} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} - R}$.

Disso, conclui-se que $R = \frac{3-\sqrt{3}}{4}a$.

RASCUNHO

RASCUNHO

Matemática
Anderson
Ney
Rodolfo
Salviano

Colaborador
Cirillo Sales

Digitação e Diagramação
Márcia Santana
Pollyanna Chagas

Revisor
Celso Faria

Desenhista
Rodrigo Ramos

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Supervisão Editorial
Aline Alkmin

A Resolução Comentada das provas do IME
*poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br