Questão 01

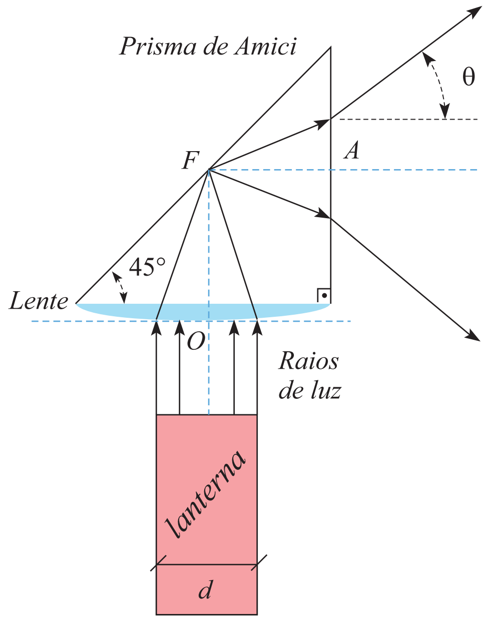


Figura 1

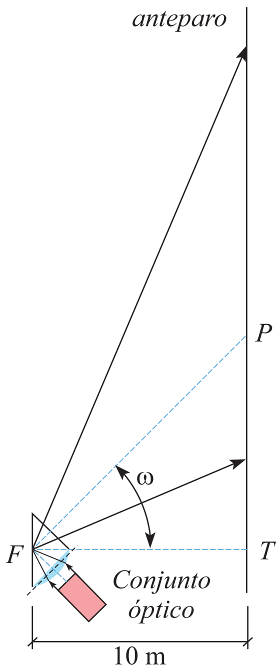


Figura 2

Um conjunto óptico é formado por uma lente convergente e um **prisma de Amici**, conforme mostra a Figura 1. O conjunto está totalmente integrado, sendo formado pelo mesmo vidro. A lente possui centro óptico O e foco F situado sobre a face-hipotenusa do prisma. Nesse prisma, os raios incidentes sobre a face-hipotenusa sofrem reflexão interna total. Uma lanterna cilíndrica muito potente, com potência óptica de $P = \pi\sqrt{3}\ \text{W}$ e diâmetro $d = 10\ \text{cm}$, gera raios de luz paralelos ao eixo principal da lente. A lanterna está solidária ao sistema óptico e seus raios são focalizados pela lente e refletidos pelo prisma, até a sua face-cateto plana, saindo do prisma e projetando a luz sobre um anteparo plano alinhado verticalmente.

Conforme mostra a Figura 2, no intervalo $0 \le t < 12\ \text{s}$, todo o conjunto óptico começa a girar, a partir do instante em que P coincide com T, em velocidade angular constante $\omega = \pi/36\ \text{rad/s}$. Dessa forma, o contorno da luz projetada no anteparo passa a ser uma curva plana, conhecida na matemática.

Diante do exposto, determine:

a) o ângulo de abertura θ do cone formado na saída do prisma, quando o índice de refração do conjunto óptico é o mínimo para que o feixe luminoso seja totalmente refletido na face-hipotenusa;

b) a expressão da velocidade escalar $v(t)$ com que o ponto P (interseção do eixo do cone com o anteparo) desloca-se verticalmente ao longo do anteparo; e

c) a densidade de potência, em W/m^2, da luz projetada no anteparo, em $t = 9$ s. Neste caso, considere que todas as dimensões do prisma são muito pequenas em relação à distância para o anteparo, ou seja, o ângulo de abertura é θ ao longo de todo o cone de saída, a partir de F.

<u>Dados</u>:

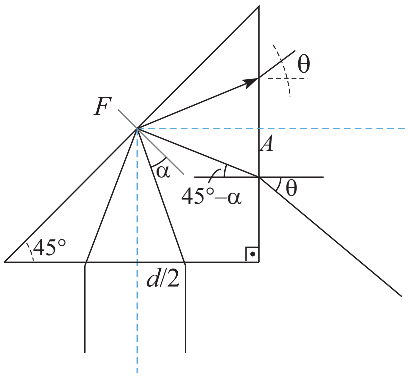
- o meio externo é o ar: $n_1 = 1$;
- $\overline{OF} = \overline{FA} = 5\left(1 + 2\sqrt{2}\right)\ \text{cm}$; e
- a separação horizontal entre o foco F da lente e o anteparo, no ponto T, é $\overline{FT} = 10\,\text{m}$.

Observação:

- a linha $\overline{FP}$, prolongamento de $\overline{FA}$, é o eixo do cone;
- o ângulo θ é o ângulo entre o eixo e qualquer geratriz do cone de luz de saída do prisma; e
- desconsidere qualquer perda da intensidade luminosa ao longo de todo o percurso até o anteparo.

Resolução:

a)



Para que ocorra reflexão total de todo o feixe, devemos ter em F:

$$\text{sen }\alpha \cdot n_\theta = \text{sen }90^\circ \cdot n_\alpha$$

$$\therefore n_v = \frac{1}{\text{sen }\alpha}$$

Sendo que:

$$tg\left(45^\circ - \alpha\right) = \frac{\left(d/2\right)}{\overline{OF}}$$

$$tg\left(45^\circ - \alpha\right) = \frac{5}{5\left(1 + 2\sqrt{2}\right)} = \frac{1}{\left(1 + 2\sqrt{2}\right)}$$

$$\therefore tg\alpha = 2 - \sqrt{2}$$

No retorno para o ar, teremos então:

$$\text{sen}\left(45^\circ - \alpha\right) \cdot n_v = \text{sen}\,\theta \cdot (1)$$

$$\left(\text{sen }45^\circ \cdot \cos\alpha + \text{sen}\,\alpha \cdot \cos 45^\circ\right) \cdot \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{sen}\,\theta$$

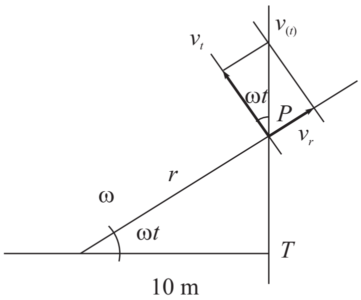
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\alpha - \text{sen}\,\alpha\right) \cdot \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \text{sen}\,\theta$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{tg\ \alpha} - 1\right) = \text{sen}\,\theta$$

$$\therefore\ \ \text{sen}\,\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1 - 2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

b)



$$\cos\omega t = \left(\frac{10}{r}\right)$$

Observe a figura, nela notamos que em cada instante, $v(t)$ pode ser decomposto nas direções tangencial e radial, assim temos:

$$\cos\omega t = \frac{v_t}{v(t)}$$

$$\therefore v(t) = \frac{v_t}{\cos\omega t}$$

$$\therefore v(t) = \frac{v_t}{\cos\left(\frac{\pi t}{36}\right)}$$

Sendo que:

$$v_t = \omega r = \left(\frac{\pi}{36}\right)\cdot\frac{10}{\cos(\omega t)} = \frac{10\pi}{36\cdot\cos\left(\frac{\pi t}{36}\right)}$$

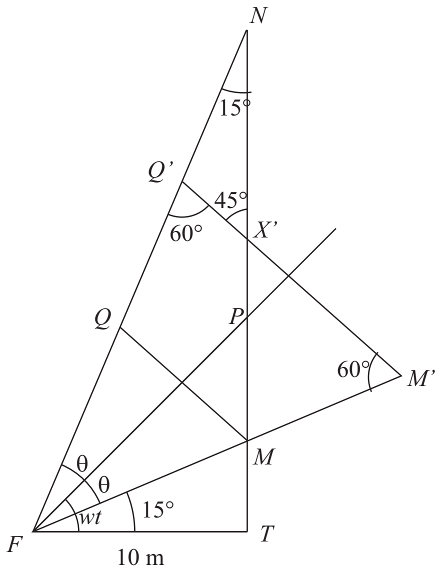
Por fim,

$$v(t) = \left(\frac{10\pi}{36}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi t}{36}\right)}$$

c) Para t = 9 s, temos:

$$\omega t = \left(\frac{\pi}{36}\right)\cdot 9 = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

Assim, a figura estará da forma:



$\overline{PT} = 10$ m

Onde:

$$\cos(45^\circ - \theta) = \frac{10}{\overline{FM}}$$

$$\therefore \overline{FM} = \frac{10}{\cos(45-\theta)}$$

Ainda:

$$\text{tg}(75^\circ) = \frac{\overline{NT}}{10},\ \overline{NT} = 10\cdot\text{tg}\,75^\circ$$

$$tg(15^\circ) = \frac{\overline{MT}}{10},\ \overline{MT} = 10\cdot\text{tg}15^\circ$$

$\overline{MN} = \overline{NT} - \overline{MT} = 20\sqrt{3}$ (sendo esse o eixo maior da elipse)

Lembramos aqui que caso a elipse seja definida pela seção cônica de, a excentricidade da elipse pode ser dada por:

$e = \left(\frac{\cos\gamma}{\cos\theta}\right) = \frac{\cos(90^\circ - \omega t)}{\cos\theta} = \frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\left(\sqrt{2}/2\right)}{\left(\sqrt{3}/2\right)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, sendo θ a inclinação do eixo do cone com sua geratriz e γ a inclinação entre o eixo e o plano inclinado que corta a seção cônica.

E, ainda:

$$e = \frac{c}{a} \quad \therefore\ c = ae = 20\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 20\sqrt{2}$$

Sendo:

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$\left(20\sqrt{3}\right)^2 = b^2 + \left(20\sqrt{2}\right)^2$$
$$\therefore b^2 = 400(3-2)$$
$$\therefore b = 20 \text{ (sendo esse o eixo menor)}$$

Por fim, a área da elipse vale:

$$A = \pi \cdot ab = \pi\left(\frac{20\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{20}{2}\right) = 100\pi\sqrt{3}$$

E a densidade de potência:

$$\sigma = \left(\frac{P}{A}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{100\pi\sqrt{3}} = \frac{1}{100} = 0{,}01\ W/\mathrm{m}^2$$

Questão 02

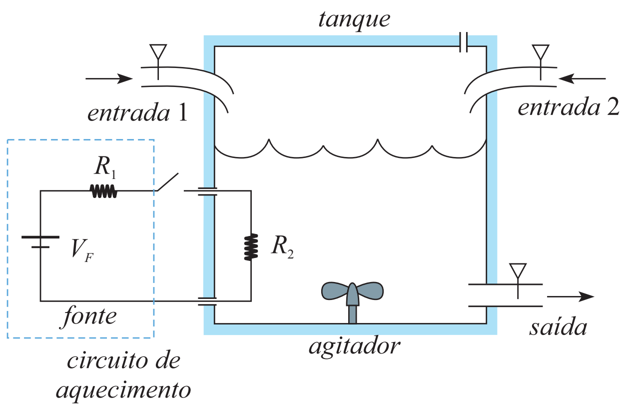


Figura 1

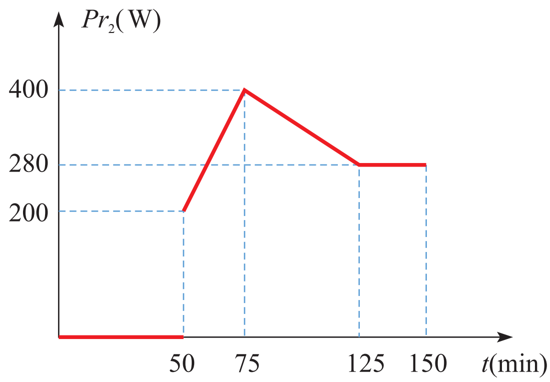


Figura 2

A Figura 1 ilustra um tanque industrial contendo duas entradas e uma saída, além de um circuito de aquecimento. A temperatura do líquido no interior do tanque deve ser controlada, a fim de alimentar o processo industrial conectado na saída do tanque. O agitador mistura continuamente os líquidos que chegam pelas entradas, de maneira que o volume total de líquido dentro do tanque esteja sempre numa única temperatura. A perda térmica do tanque pode ser desprezada.

Considere o tanque inicialmente vazio, com a válvula de saída fechada e o sistema de aquecimento desligado. Em $t = 0$ a válvula da entrada 1 é aberta com uma vazão de água de 1 L/min à temperatura de 10 °C e a válvula da entrada 2 com uma vazão de água de 0,25 L/min à temperatura de 30 °C. Nessas condições, determine:

a) a temperatura da água no interior do tanque em $t = 50$ min;

b) a temperatura da água no interior do tanque em $t = 150$ min, se o circuito de aquecimento é ligado em $t = 50$ min e a potência dissipada na resistência R_2, P_{R_2}, varia de acordo com o gráfico da Figura 2; e

c) a tensão V_F que deverá ser ajustada na fonte para manter a temperatura da água na saída em 22 °C após um longo tempo de funcionamento do sistema ($t >> 150$ min), sabendo que a válvula da entrada 2 foi fechada, o volume no interior do tanque encontra-se nessa mesma temperatura de 22 °C e a válvula de saída foi aberta com a mesma vazão da válvula da entrada 1.

<u>Dados</u>:

- $R_1 = 2\ \Omega$;
- $R_2 = 10\ \Omega$;
- 1 cal = 4,2 J;
- calor específico da água (c) = 1 cal/g °C; e
- densidade da água = 1 kg/L.

Resolução:

a) Em $t = 50$ min, as quantidades de água que entram no tanque através das válvulas 1 e 2 são:

Válvula 1 $\rightarrow$ $Vol_1 = \dfrac{1\text{ L}}{\text{min}} \cdot 50\text{min} = 50\text{L}$ sob temperatura de $10\ °\text{C}$.

Válvula 2 $\rightarrow$ $Vol_2 = \dfrac{0{,}25\text{ L}}{\text{min}} \cdot 50\text{min} = 12{,}5\text{ L}$ sob temperatura de $30\ °\text{C}$.

Para a temperatura no tanque (temperatura de equilíbrio) T_E, temos:

$$\Sigma Q = 0$$

$$Q_1 + Q_2 = 0$$

$$Vol_1 \cdot d_A \cdot c_A \cdot (T_E - T_1) + Vol_2 \cdot d_A \cdot c_A \cdot (T_E - T_2) = 0$$

$$T_E = \frac{Vol_1 \cdot T_1 + Vol_2 \cdot T_2}{Vol_1 + Vol_2}$$

$$T_E = \frac{50 \cdot 10 + 12{,}5 \cdot 30}{50 + 12{,}5} = \boxed{14\ °\text{C}}$$

b) A temperatura da água sem o circuito de aquecimento em funcionamento permanece constante em 14 ºC.
Entre 50 min e 150 min a energia transferida à água por efeito Joule é dada pela área do gráfico da Figura 2, portanto:

$$\underbrace{E_T}_{\substack{\text{energia}\\ \text{transferida}\\ \text{à água}}} = \frac{(400+200)\cdot 25 \cdot 60}{2} + \frac{(400+280)\cdot 50 \cdot 60}{2} + 280 \cdot 25 \cdot 60$$

$$E_T = 1{,}89 \cdot 10^6\ \text{J}$$

$$\text{m}_{água} \cdot C_A \cdot (T_{final} - T_A) = E_T$$

$$\left(150 \cdot 10^{-3} + \frac{75}{2} \cdot 10^{-3}\right)\text{m}^3 \cdot 10^3\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 4{,}2 \cdot 10^3\,\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot °\text{C}} \cdot (T_{final} - 14) = 1{,}89 \cdot 10^6$$

$$T_{final} = 14 + \frac{1{,}89 \cdot 10^6 \cdot 2}{4{,}2 \cdot 375 \cdot 1000}$$

$$\boxed{T_{final} = 16{,}4\ °\text{C}}$$

c) Após um longo tempo de funcionamento, temos que a cada minuto 1 L de água entra a 10 ºC e sai a 22 ºC sofrendo uma variação de temperatura de 12 ºC.

$P_{térmica} = \dfrac{E_{térmica}}{\Delta t} = P_{dissipada}$ em R_2

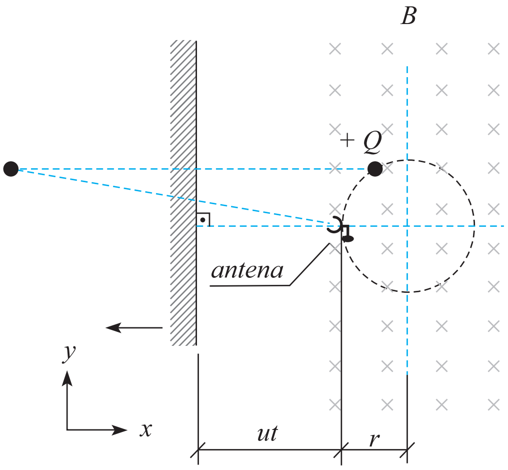
$$\frac{\text{m}_A \cdot C_A \cdot \Delta T}{\Delta t} = R_2 \cdot i^2 \rightarrow \frac{\text{m}_A \cdot C_A \cdot \Delta T}{\Delta t} = R_2 \cdot \frac{V_F^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

$$V_F^2 = \frac{\text{m}_A \cdot C_A \cdot \Delta T}{\Delta t} \cdot \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_2}$$

$$V_F^2 = \frac{1 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 12 \cdot 144}{60 \cdot 10}$$

$$\boxed{V_F \cong 110\ \text{V}}$$

Questão 03



Uma partícula carregada efetua um movimento circular na região onde há um campo magnético, conforme mostra a figura. Durante todo o movimento, uma antena situada no ponto mais à esquerda da trajetória acompanha rigorosamente a imagem da partícula refletida em um espelho plano, que se desloca para a esquerda em velocidade constante, conforme mostra a figura. Em função do tempo t e dos dados da questão, determine:

a) as componentes x e y da posição da imagem da partícula em relação à antena;
b) as componentes x e y da velocidade da imagem da partícula; e
c) a velocidade angular da antena, a partir dos resultados obtidos nos itens anteriores.

Considerações:

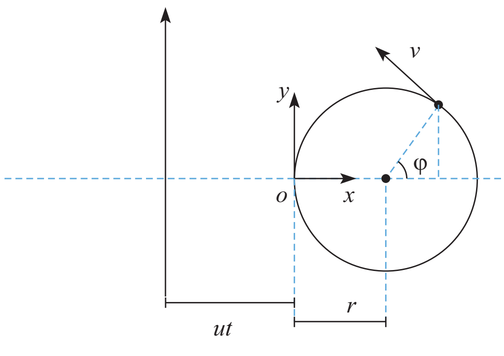
- no instante $t = 0$, a partícula está no ponto mais à direita da trajetória;
- no instante $t = 0$, o espelho parte da posição onde está situada a antena; e
- despreze o efeito gravitacional.

Dados:

- carga da partícula: $+Q$;
- massa da partícula: m;
- módulo da velocidade do espelho: u;
- módulo da densidade de campo magnético da região: B; e
- raio da trajetória: r.

Resolução:

a)



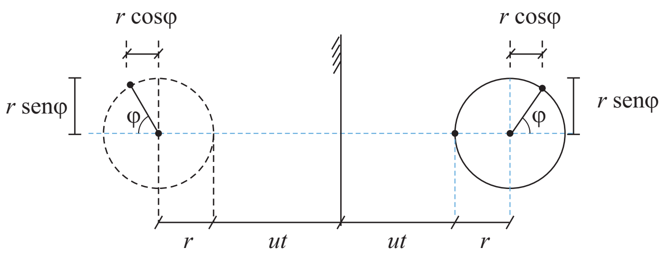
Temos que: $T = \dfrac{2\pi m}{qB} \Rightarrow \omega = \dfrac{QB}{m}$

A velocidade linear do MCU vale,
$v = \omega \cdot r$

A posição da partícula em relação ao referencial na antena é:

$$\begin{cases} x_p = r + r\cos\varphi \\ y_p = r\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} \quad \text{com} \quad \varphi = \omega t = \frac{QB}{m}t$$

Esta partícula gera uma imagem cujas distâncias da antena são:



$$\begin{cases} x = -2ut - r(1+\cos\varphi) \\ y = r \text{ sen}\,\varphi \end{cases}$$

Substituindo φ

$$\begin{cases} x(t) = -2ut - r\left[1+\cos\left(\dfrac{QB}{m}t\right)\right] \\ y(t) = r \text{ sen}\left(\dfrac{QB}{m}t\right) \end{cases}$$

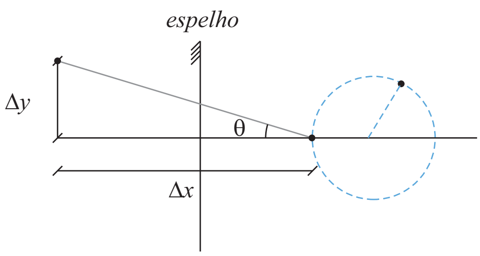
b) $$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -2u + r\cdot \text{sen}\left(\frac{QB}{m}t\right)\cdot\frac{QB}{m}$$

$$v_x(t) = -2u + \frac{rQB}{m}\text{sen}\left(\frac{QB}{m}t\right)$$

$$v_y(t) = \frac{dy}{dt} = r\cdot\cos\left(\frac{QB}{m}t\right)\frac{QB}{m}$$

$$v_y(t) = \frac{rQB}{m}\cos\left(\frac{QB}{m}t\right)$$

c)



Temos, para um instante t:

$$tg\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{y}{x}$$

Derivando a expressão.

$$\sec^2\theta\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(y/x\right) = \frac{\dfrac{dy}{dt}\cdot x - \dfrac{dx}{dt}\cdot y}{x^2}$$

onde $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega'$ é a velocidade angular da antena pedida

$$\sec^2\theta\cdot\omega' = \frac{v_y\cdot x - v_x\cdot y}{x^2}$$

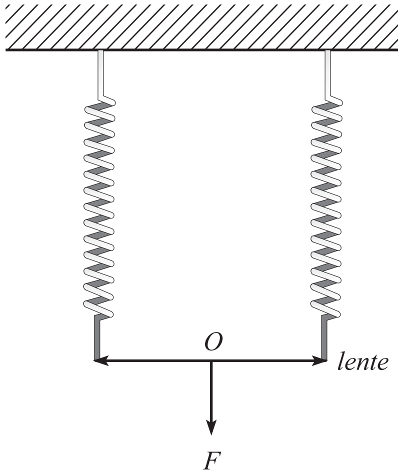
$$\sec\theta = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}$$

$$\omega' = \frac{v_y\cdot x - v_x\cdot y}{x^2\left(\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right)} = \frac{v_y\cdot x - v_x\cdot y}{x^2+y^2}$$

Substituindo os valores de x, v_x, y e v_y determinados nos itens anteriores, temos:

$$\omega' = \frac{\dfrac{QBr}{m}\left(r + (2ut+r)\cdot\cos\left(\dfrac{QB}{m}t\right)\right) - 2u\,r\,sen\left(\dfrac{QB}{m}t\right)}{r^2 sen^2\left(\dfrac{QB}{m}t\right) + \left(2u\,t + r + r\cos\left(\dfrac{QB}{m}t\right)\right)^2}$$

Questão 04



Como mostra a figura, uma lente convergente, que está pendurada no teto por duas molas ideais de constante elástica k, é submetida a uma força vertical F para baixo. Determine:

a) para que valores de F a lente produz uma imagem real de uma figura colada no teto; e

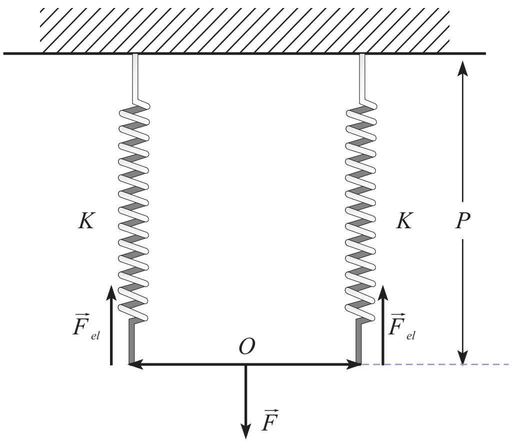
b) o valor de F para o qual a imagem real tem o dobro do tamanho da figura colada no teto.

Dados:

- distância entre o centro óptico da lente e o teto para $F = 0$: d; e
- distância focal da lente: $f = 3d$

Resolução:

Início: $F = 0 \rightarrow p = d$



a) Como a lente é convergente, produz imagem real quando $p > f$. Assim:

$p > 3d$

$\Downarrow$

deformação das molas $> 2d$

(x)

$Fel = K \cdot x \rightarrow \boxed{Fel > 2Kd}$

Para o equilíbrio:

$F = 2Fel$

$\boxed{F > 4Kd}$

b) Imagem real $\rightarrow$ invertida

$i = -2\theta$

$$A = \frac{i}{\theta} = -\frac{p'}{p} \rightarrow -\frac{2\theta}{\theta} = -\frac{p'}{p} \rightarrow \boxed{p' = 2p}$$

Usando a equação de Gauss:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{3d}=\frac{1}{p}+\frac{1}{2p}$$

$$\frac{1}{3d}=\frac{3}{2p}$$

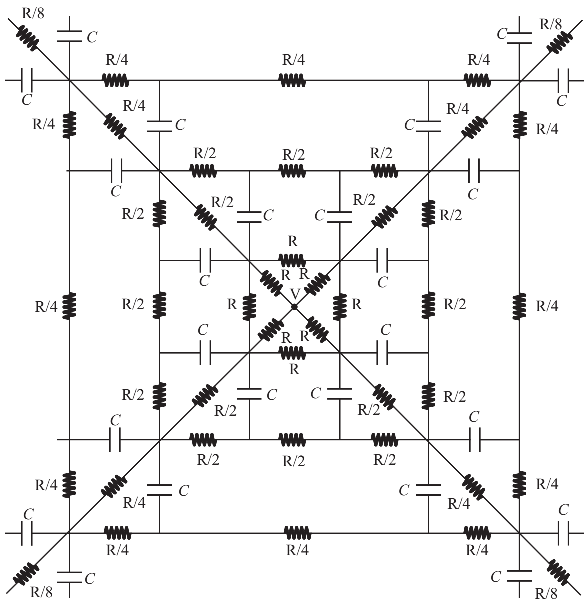
$$\boxed{p=\frac{9}{2}\cdot d}$$

Como o comprimento natural das molas é "d" a deformação é: $x=\frac{7}{2}d$. Assim, a força "F" aplicada, que vale o dobro da elástica de cada mola, é assim calculada:

$$F=2Fel=2\cdot K\cdot x=2\cdot K\cdot\frac{7}{2}d$$

$$\boxed{F=7K\cdot d}$$

Questão 05

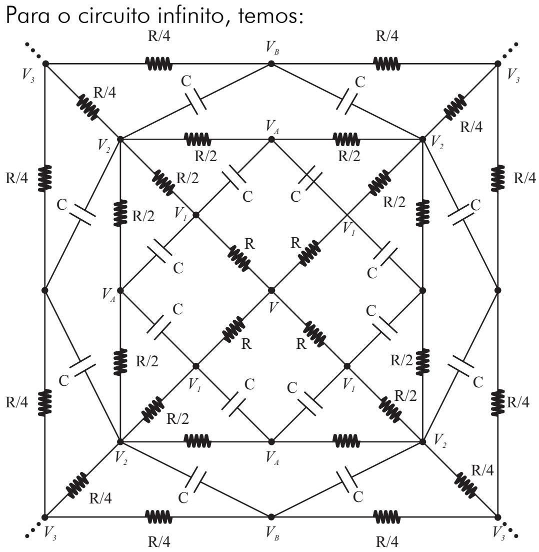


O circuito da figura acima possui potencial $V>0$ em seu nó central. Esse circuito estende-se em direção ao infinito, com suas resistências sendo reduzidas à metade, gradativamente, e as capacitâncias todas iguais a C. Enquanto isso, o potencial vai se reduzindo também em direção ao infinito até atingir o valor nulo.

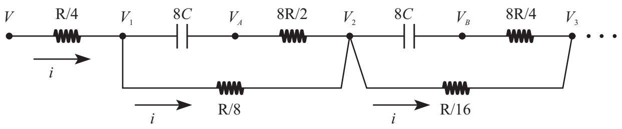
Considerando um tempo infinito de funcionamento do circuito, determine a energia total armazenada nos capacitores.

Resolução:

Para o circuito infinito, temos:



Podemos analisar o circuito da seguinte forma:



A resistência equivalente efetiva para o circuito será:

$$Req = \underbrace{\frac{R}{4}+\frac{R}{8}+\frac{R}{16}+...}_{\text{Soma de P.G infinita de razão } \frac{1}{2}}$$

$$Req = \frac{\frac{R}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{R}{2}$$

Pela 1ª Lei de Ohm, temos:

$$V = Req \cdot i$$

$$V = \frac{R}{2} \cdot i$$

$$i = \frac{2V}{R}$$

Os grupo de 8 capacitores em paralelo estão em paralelo com grupos resistores em paralelo com resistências equivalentes iguais a $\frac{R}{8}, \frac{R}{16}, \frac{R}{32}, ...$ sucessivamente em progressão geométrica infinita.

Para cada grupo de resistores, temos:

$$V_1 - V_2 = V_{12} = \frac{R}{8} \cdot \left(\frac{2V}{R}\right) = \frac{V}{4}$$

$$V_2 - V_3 = V_{23} = \frac{R}{16} \cdot \left(\frac{2V}{R}\right) = \frac{V}{8}$$

$V_3 - V_4 = \frac{R}{32} \cdot \frac{2V}{R} = \frac{V}{16}$ ... e assim sucessivamente.

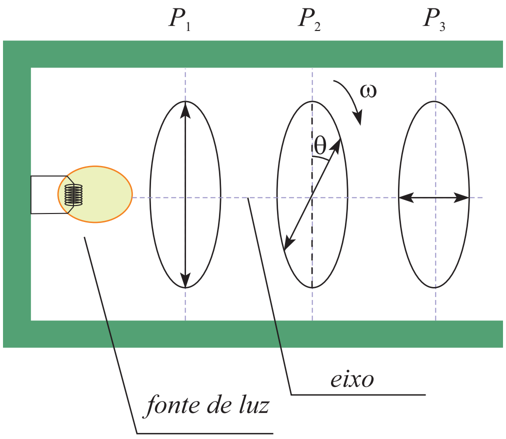
Logo, a energia armazenada nos capacitores será igual a:

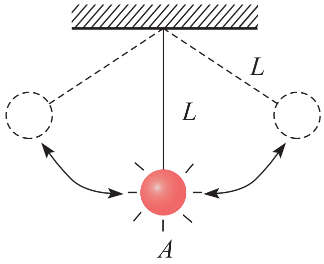
$$E_{Total} = \frac{8C}{2}(V_{12})^2 + \frac{8C}{2} \cdot (V_{23})^2 + \frac{8C}{2} \cdot (V_{34})^2 + ...$$

$$E_{Total} = \frac{8C}{2}\left[\underbrace{\left(\frac{V}{4}\right)^2 + \left(\frac{V}{8}\right)^2 + \left(\frac{V}{16}\right)^2 + ...}_{\text{P.G infinita de razão } \frac{1}{4}}\right]$$

$$E_{Total} = \frac{8C}{2} \cdot \left(\frac{\frac{V^2}{16}}{1-\frac{1}{4}}\right)$$

$$\boxed{E_{Total} = \frac{C \cdot V^2}{3}}$$





Um estroboscópio foi montado utilizando-se uma fonte de luz branca e três polarizadores, conforme mostra a figura. Os polarizadores P_1 e P_3 estão com seus planos de polarização ortogonais e o polarizador P_2 gira com frequência angular constante a ω, em torno do eixo, e no sentido, conforme indicados na figura. Em um ambiente completamente escuro, a luz estroboscópica ilumina a massa de um pêndulo simples sempre que ela passa no ponto A, indicado na figura, dando a impressão de que a massa está parada na posição inferior do pêndulo. Sabendo que a aceleração da gravidade é g, determine:

a) a intensidade da luz estroboscópica em função do ângulo θ, entre os planos de polarização de P_1 e P_2;

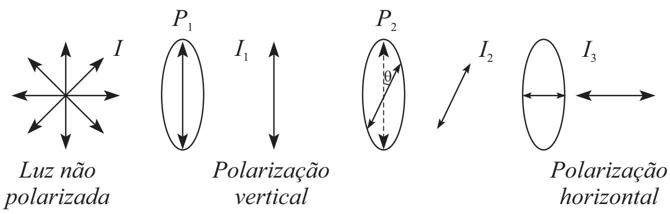
b) o comprimento L do pêndulo.

Dado:
- intensidade máxima da luz estroboscópica iluminando o pêndulo, se os três polarizadores estivessem alinhados: I_0.

Observação:
- estroboscópio: instrumento usado para iluminar, de maneira intermitente, um objeto; e
- considere que a visão humana só é capaz de perceber a intensidade luminosa quando ela é máxima.

Resolução:

a)



Da lei de Malus sabemos que a intensidade da onda polarizada I diminuiu para $I\cos^2\theta$ ao passar por um polarizador, enquanto a luz natural e a circularmente polarizada, diminuem sua intensidade pela metade.

O enunciado traz que a intensidade na saída de P_3 com os 3 polarizadores alinhados é I_0. Isso permite concluir que a intensidade na saída de P_1 também é I_0, tendo em vista que o alinhamento dos planos de polarização de P_1 com P_2 e P_3 preserva a intensidade I_1 ao atravessá-los. Matematicamente pode ser entendido como: $\theta = 0 \rightarrow I\cos^2\theta = I$

Portanto, a intensidade I_1 pedida no item é: $I_1 = I_0$

Observamos que essa intensidade não é função de θ, visto que a componente de luz ainda não atravessou P_2. Essa dependência ocorre entre P_2 e P_3, da seguinte forma:

$$I_2 = I_1 \cdot \cos^2\theta = I_0 \cos^2\theta$$

b) Pela expressão

$$I_3 = \frac{I}{8}\text{sen}^2(2\theta)$$

Temos que os máximos de intensidade ocorrem em $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$, ou seja, em 4 momentos durante uma rotação completa.

Desta forma, um quarto deste período deve coincidir com a metade do período do pêndulo

$$\frac{T_{polarizador}}{4} = \frac{T_{Pêndulo}}{2}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \cdot \frac{1}{2} = T_{Pêndulo} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

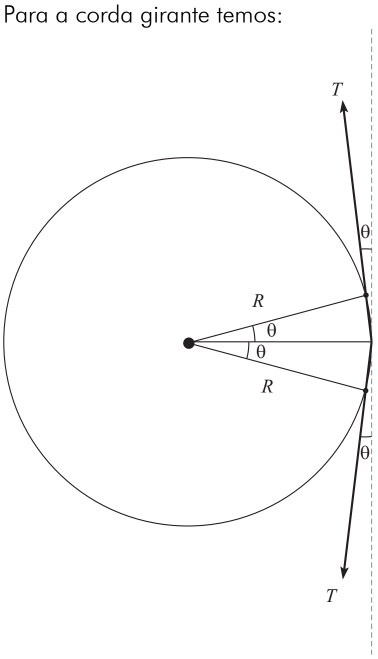
$$\frac{1}{2\omega} = \sqrt{\frac{1}{g}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ell = \frac{2}{4\omega^2}}$$

Questão 07

Considere uma corda de densidade linear constante μ e comprimento $2\pi R$. A corda tem as suas extremidades unidas e é posta a girar no espaço em velocidade angular ω. Após um leve toque em um ponto da corda, um pulso ondulatório passa a percorrê-la. Calcule as possíveis velocidades do pulso para um observador que vê a corda girar.

Resolução:

Para a corda girante temos:



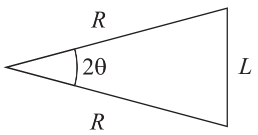
Temos então:

$$2 \cdot T\ \text{sen}\,\theta = m\omega^2 \cdot R \quad (1)$$

Para ângulos pequenos:

i) $\text{sen}\theta \approx \theta$

ii)



Pela lei dos senos: $\dfrac{L}{\text{sen}\,2\theta} = \dfrac{R}{\text{sen}(90° - \theta)}$

$$\frac{L}{2\,\text{sen}\,\theta \cdot \cos\theta} = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{L}{2R} \quad (2)$$

Substituindo-se (2) em (1), temos:

$$2 \cdot T \cdot \frac{L}{2R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$\frac{T}{\mu} = \omega^2 \cdot R^2$$

Pela fórmula de *Taylor*:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$v = \sqrt{\omega^2 R^2}$$

$$v = \omega R$$

$v \rightarrow$ Velocidade do pulso na corda

Para a velocidade do pulso em relação a um observador externo, temos:

$v' = v_{\text{corda}} + v_{\text{pulso}}$

$v' = \omega \cdot R + \omega R$

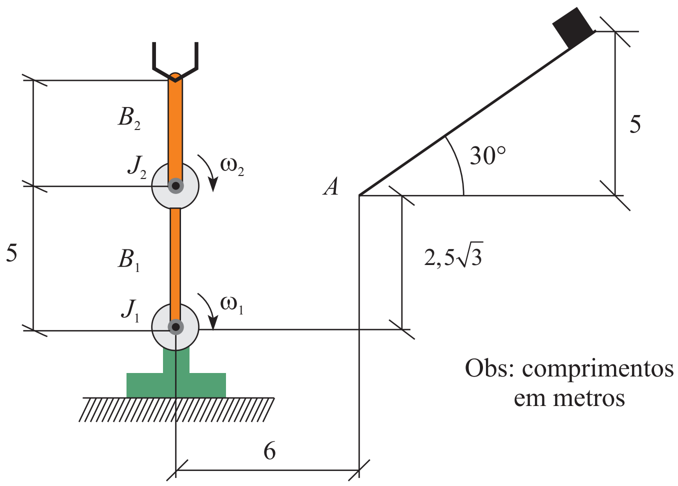
$v' = 2\omega R$ se o pulso gira no mesmo sentido da corda.

ou

$v' = v_{\text{corda}} - v_{\text{pulso}}$

$v' = 0$ se o pulso gira no sentido contrário ao da corda.

Questão 08



A figura acima mostra um braço robótico, com duas juntas (J_1 e J_2) e dois braços (B_1 e B_2), que é usado para pegar um bloco que é liberado do alto de uma rampa sem atrito, a partir do repouso.

No instante em que o bloco é liberado, a junta J_1 é acionada com velocidade angular constante $\omega_1 = \frac{\pi}{12}$ rad/s e a junta J_2 é acionada com velocidade angular ω_2.

Diante do exposto:

a) determine o comprimento do braço B_2 para que a garra do manipulador alcance o bloco no exato instante em que ele atinge o ponto A;

b) determine a velocidade angular ω_2, em rad/s, em que a junta J_2 deverá ser acionada para que a garra do manipulador chegue no ponto A no mesmo instante do bloco; e

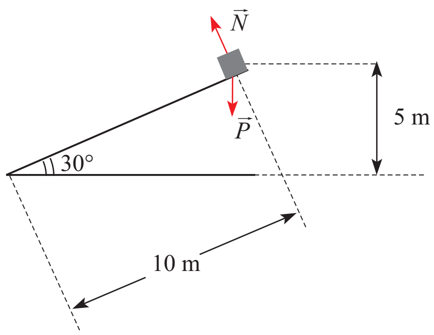
c) faça um esboço da configuração final do manipulador, mostrando todas as cotas, no momento em que a garra do manipulador pega o bloco.

Dado:

- aceleração da gravidade: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Resolução:

Tempo para o bloco chegar até "A":



$$F_R = P \cdot \text{sen } 30°$$

$$m \cdot a = m \cdot g \cdot \text{sen } 30° \quad \rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

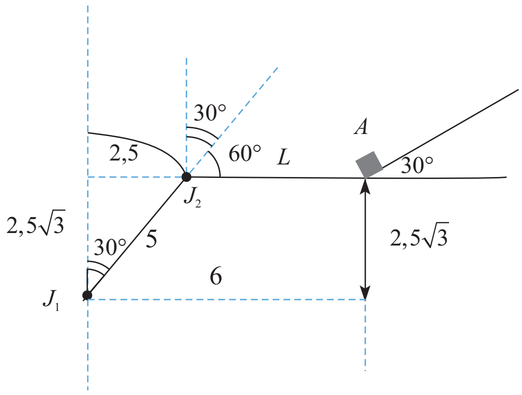
$$10 = \frac{5 \cdot t^2}{2} \quad \rightarrow t = 2\text{s}$$

Nesse tempo, a junção 1 terá rotacionado $\frac{\pi}{6}$ rad = 30°. Assim, a nova configuração é representada a seguir:

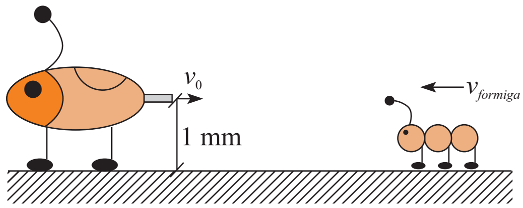
a) Pela configuração mostrada: $L = 3{,}5$ m

b) Já que o braço B2 girou o dobro de B1, $\omega_2 = 2\omega_1 \rightarrow \boxed{\omega_2 = \frac{\pi}{6} \text{ rad/s}}$

c)



Questão 09



Alguns animais têm mecanismos de defesa muito curiosos. Os besouros-bombardeiros, por exemplo, são insetos que disparam jatos de uma substância superquente pelos seus traseiros quando se sentem ameaçados. Seus corpos são equipados com duas glândulas nas extremidades de seus abdomens e essas estruturas contêm diferentes substâncias químicas. Quando os insetos são provocados, essas substâncias são combinadas em uma câmara de reação e são produzidas explosões na forma de um intenso jato - aquecido de $20\,°C$ para $100\,°C$ pelo calor da reação - para afugentar suas presas. A pressão elevada permite que o composto seja lançado para fora com velocidade de 240 cm/s. Uma formiga se aproxima do besouro, pela retaguarda deste e em linha reta, a uma velocidade média de $0{,}20$ cm/s e o besouro permanece parado com seu traseiro a uma distância de 1mm do chão. Quando pressente o inimigo, o besouro lança o jato em direção à formiga.

Determine:

a) o calor latente da reação das substâncias, em J/kg;
b) o rendimento da máquina térmica, representada pelo besouro;
c) a distância mínima, em cm, entre os insetos, para que o jato do besouro atinja a formiga; e
d) a velocidade, em cm/s, que a formiga adquire ao ser atingida pelo jato do besouro (assumindo que todo o líquido fique impregnado na formiga).

<u>Dados</u>:

- calores específicos das substâncias e do líquido borrifado: $c = 4{,}19 \times 10^3$ J/Kg.K ;
- massa da formiga: $m_{formiga} = 6{,}0$ mg;
- massa do besouro: $m_{besouro} = 290$ mg;
- massa do jato: $m_{jato} = 0{,}30$ mg;
- velocidade média da formiga: $v_{fomiga} = 0{,}20$ cm/s; e
- aceleração da gravidade: $g = 10$ m/s^2.

Resolução:

a) O calor liberado pela reação química das substâncias é convertido no aquecimento e na ejeção do jato.
Durante esse processo, existe um movimento do besouro no sentido oposto ao do jato, quando sua velocidade poderia ser determinada pela conservação do momento linear.
Contudo, como as ordens de grandezas das massas do besouro e do jato são bem distintas, a velocidade do besouro será desprezada.

$$Q_L = Q_s + E_c$$

$$m_{Subst.}L = m_{Jato} \cdot c \cdot \Delta\theta + \frac{m_{Jato} \cdot V^2}{2}$$

Considerando $m_{Subst.} = m_{Jato}$

$$L = c \cdot \Delta\theta + \frac{v^2}{2} = (4{,}19 \cdot 10^3) \cdot 80 + \left(\frac{2{,}4}{2}\right)^2$$

$$L = 3{,}35 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$$

b) O rendimento da máquina térmica é dado por:

$$\eta = \frac{\tau}{Q}$$

Considerando o trabalho como energia útil utilizada para a ejeção do jato, temos:

$$\tau = \Delta Ec = \frac{1}{2} \cdot m_{Jato} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-6}(2{,}4)^2$$

$$\tau = 8{,}64 \cdot 10^{-7} \text{ J}$$

A quantidade de calor Q envolvida é

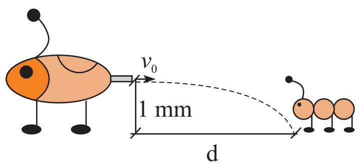
$$Q = m_{Subst} \cdot L = 0{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 3{,}35 \cdot 10^5$$

$$Q = 1{,}00 \cdot 10^{-1} \text{ J}$$

Por fim:

$$\eta = \frac{8{,}64 \cdot 10^{-7}}{1{,}00\ 10^{-1}} = 8{,}64 \cdot 10^{-6} = 0{,}00086\ \%$$

c)



Tempo de queda do jato:

$$t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{10}} = 10^{-2}\sqrt{2}\text{ s}$$

Desta forma a distância d é:

$$d = v \cdot t_q = 240 \cdot 10^{-2} \cdot (10^{-2}\sqrt{2}) = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

d) Considerando desprezível a altura da formiga, e a componente de velocidade do jato $v_y \ll v_x$, temos por conservação do momento linear que:

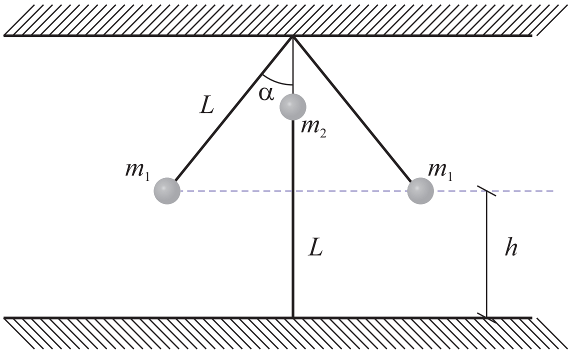
$$Q_0 = Q_j$$

$$m_{Jato} \cdot v_{Jato} = (m_{Jato} + m_{Formiga}) \cdot v_f$$

$$0{,}3 \cdot 10^{-6} \cdot 240 \cdot 10^{-2} = (0{,}3 \cdot 10^{-6} + 6 \cdot 10^{-6}) \cdot v_f$$

$$v_f = 0{,}11 \text{ m/s ou } 11 \text{ cm/s}$$

Questão 10



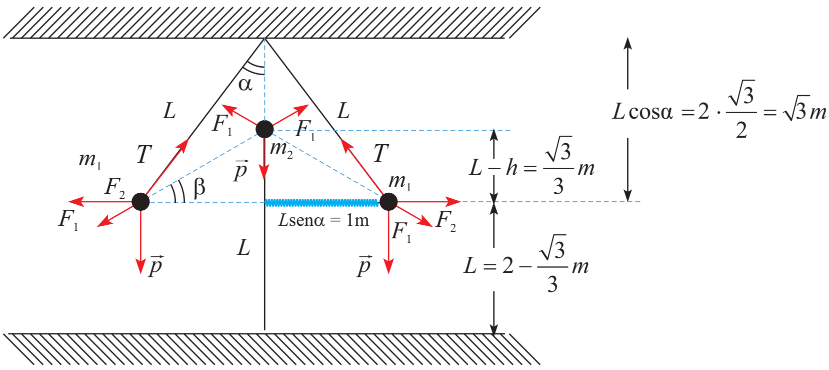
A figura acima mostra um sistema em equilíbrio composto por três corpos presos por tirantes de comprimento L cada, carregados com cargas iguais a Q. Os corpos possuem massas m_1 e m_2, conforme indicados na figura. Sabendo que o tirante conectado à massa m_2 não está tensionado, determine os valores de m_1 e m_2 em função de k e Q.

Dados:

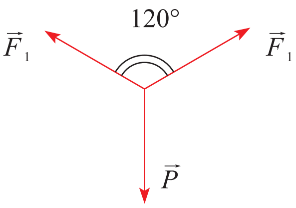
- constante dielétrica do meio: $k\ [\mathrm{Nm^2/C^2}]$;
- carga elétrica dos corpos: $Q\ [\mathrm{C}]$;
- comprimento dos tirantes: $L = 2\ \mathrm{m}$;
- altura: $h = \left(2 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\mathrm{m}$;
- aceleração da gravidade: $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$; e
- $\alpha = 30°$

Resolução:

Sistema de forças e medidas



Analisando a geometria do problema, percebemos que a massa "m_2" está exatamente no baricentro do triângulo (que é equilátero: $\beta = 30$). Assim, analisando o diagrama de corpo livre de "m_2":



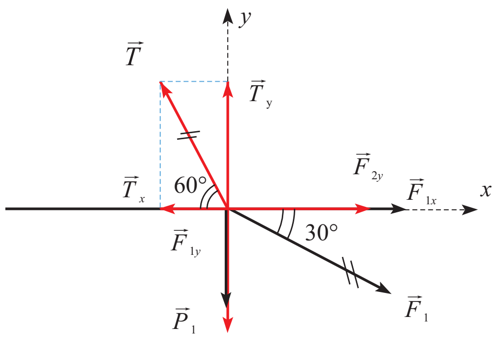
$$P = F_1$$

$$m_2 \cdot g = \frac{K \cdot Q^2}{d_1^2}$$

$d_1 \rightarrow$ distância entre "m_1" e "m_2"

$$m_2 \cdot 10 = \frac{K \cdot Q^2}{\left(\dfrac{\sqrt{3}/3}{\text{sen}\,\beta}\right)^2} \rightarrow \boxed{m_2 = \frac{3k \cdot Q^2}{40}}$$

Fazendo agora o sistema de forças de "m1" (da direita):



$$F_{Rx} = 0$$
$$F_{1x} + F_2 = T_x$$
$$\frac{K \cdot Q^2}{d_1^2} \cdot \cos 30° + \frac{KQ^2}{d_2^2} = T \cdot \cos 60°$$

$d_2 \rightarrow$ distância entre as massas "m_1"

$$K \cdot Q^2 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\right) = T \cdot \frac{1}{2}$$
$$\boxed{T = KQ^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right)}$$

$$Fr_x = 0$$
$$T_y = F_{1y} + P_1$$
$$T \cdot \text{sen } 60° = F_1 \times \text{sen } 30° + m_1 \cdot g$$
$$K \cdot Q^2 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}KQ^2 - \frac{1}{2} + m_1 \cdot 10$$
$$m_1 \cdot 10 = \frac{KQ^2}{2}\left(\frac{9}{4} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$\boxed{m_1 = \frac{KQ^2}{40}\left(3 + \sqrt{3}\right)}$$

Física
Anderson
Bernadelli
Igor
Moisés

Colaborador
Cirillo Sales

Digitação e Diagramação
Márcia Santana
Pollyanna Chagas

Revisor
Celso Faria

Desenhista
Rodrigo Ramos

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Supervisão Editorial
Aline Alkmin

A Resolução Comentada das provas do IME
*poderá ser obtida diretamente no site do **GRUPO OLIMPO**.*

As escolhas que você fez nesta prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br