"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

Seja o número complexo z que satisfaz a relação $2(z-i)^{2017} = (\sqrt{3}+i)(iz-1)^{2017}$. Determine z, sabendo-se que $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Resolução:

$$\frac{(z-i)^{2017}}{(iz-1)^{2017}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$\Rightarrow \left(\frac{z-i}{iz-1}\right)^{2017} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ Aplicando módulo:

$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{iz-1}\right|^{2017} = 1$

$\Rightarrow \left|\frac{z-i}{iz-1}\right| = 1$

$\Rightarrow |z-i| = |iz-1|$. Seja $y = x + yi$, segue:

$|x+yi-i| = |i(x+yi)-1|$

$\Rightarrow |x+i(y-1)| = |(-y-1)+ix|$. Por definição de módulo,

$\Rightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(-y-1)^2+x^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2-2y+1 = y^2+2y+1+x^2 \quad \Rightarrow y = 0.$

Assim, z é um número real.

Como $|z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tem-se $z = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Porém $z = +\frac{\sqrt{3}}{3}$ não convém, pois:

$$\frac{\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}-i\right)^{2017}}{\left(+\frac{i\sqrt{3}}{3}-1\right)^{2017}} = \left(\frac{+\sqrt{3}-3i}{i\sqrt{3}-3}\right)^{2017} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^{2017}$$

$$= \left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)^{2017} = \cos\frac{7\pi}{6}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6} \neq \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

Ao passo que $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ convém, pois:

$$\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-i\right)^{2017}}{\left(-\frac{i\sqrt{3}}{3}-1\right)^{2017}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{2017} = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^{2017} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

Assim, $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Questão 02

Resolva a inequação abaixo, onde x é uma variável real.

$$2|x^3| - 6x^2 + 3|x| + 2 < 0$$

Resolução:

Vamos analisar o comportamento da seguinte função:

$$f(a) = 2a^3 - 6a^2 + 3a + 2$$

cujas raízes são solução da equação:

$$2a^3 - 6a^2 + 3a + 2 = 0$$

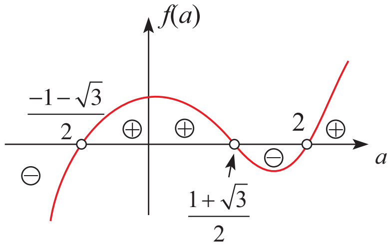
Por inspeção obtemos que 2 é raiz, sendo possível reduzir seu grau:

$$\begin{array}{r|l} 2a^3-6a^2+3a+2 & a-2 \\ \cline{2-2} \underline{-2a^3+4a^2} & 2a^2-2a-1 \\ -2a^2+3a+2 & \\ \underline{+2a^2-4a} & \\ -a+2 & \\ \underline{a-2} & \\ 0 & \end{array}$$

Dessa forma as outras duas raízes são soluções de $2a^2 - 2a - 1 = 0$

Logo: $\begin{cases} a_1 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\ a_2 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Graficamente temos



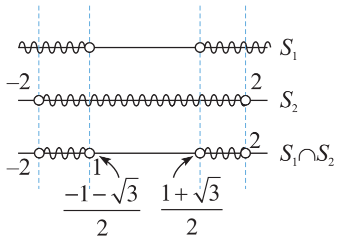
Como $a = |x|$ e procuramos apenas os valores menores que zero, somente o intervalo $1+\frac{\sqrt{3}}{2}<|x|<2$ é solução.

Assim:

$S_1 : |x| > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x > \frac{1+\sqrt{3}}{2} \; ou \; x < -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

$S_2 : |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$

O conjunto solução é a intersecção desses resultados



Logo: $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{1+\sqrt{3}}{2} < x < 2 \right\}$.

Questão 03

Sabendo que $|x| \le \frac{\pi}{6}$ e que x satisfaz a equação abaixo

$$\frac{3-\cos x(4\cos x+\operatorname{sen}x)}{10\operatorname{sen}^2 x-8\operatorname{sen}x\cos x}=\frac{1}{2}$$

Determine os possíveis valores de x.

Resolução:

$6-8\cos^2 x-2\operatorname{sen}x\cos x=10\operatorname{sen}^2 x-8\operatorname{sen}x\cos x$

$\Rightarrow 6+6\operatorname{sen}x\cos x=8\operatorname{sen}^2 x+2\operatorname{sen}^2 x+8\cos^2 x$

$\Rightarrow 6+6\operatorname{sen}x\cos x=2\operatorname{sen}^2 x+8$

$\Rightarrow 6\operatorname{sen}x\cos x=2\cdot(\operatorname{sen}^2 x+1)$

$\Rightarrow 3\cdot\operatorname{sen}x\cos x=\operatorname{sen}^2 x+1$. Elevado ao quadrado,

$9\operatorname{sen}^2 x\cdot\cos^2 x=\operatorname{sen}^4 x+2\operatorname{sen}^2 x+1$

$\Rightarrow 9\cdot\operatorname{sen}^2 x\cdot(1-\operatorname{sen}^2 x)=\operatorname{sen}^4 x+2\operatorname{sen}^2 x+1$

$\Rightarrow 10\operatorname{sen}^4 x-7\operatorname{sen}^2 x+1$. Seja $y=\operatorname{sen}^2 x$,

$10y^2-7y+1=0$

Cujas soluções são $y`=\frac{1}{2}$ e $y``=\frac{1}{5}$.

Regressando à variável x, segue:

$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}\Rightarrow \operatorname{sen}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Cujos valores associados de x nos quadrantes 1 e 4 são $\pm\frac{\pi}{4}$, e não obedecem a $|x|\le\frac{\pi}{6}$. Não convém.

$\operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{5}\Rightarrow \operatorname{sen}x=\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Como $\left|\frac{\sqrt{5}}{5}\right|<\left|\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right|$, $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $\operatorname{sen}x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ obedecem à restrição do módulo. Porém $\operatorname{sen}x=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ não pode obedecer à equação $3\operatorname{sen}x\cos x=1+\operatorname{sen}^2 x$ porque, nos quadrantes delimitados, $\cos x\ge 0$.

Assim, $\operatorname{sen}x=\frac{\sqrt{5}}{5}$ e $x=arc\operatorname{sen}\frac{\sqrt{5}}{5}$

Questão 04

Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a<b<c$.

Sabendo-se que $b=b^{\log_a b}-a$, determine:

a) Os valores de a, b e c.

b) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

Resolução:

a) $(\log_d a, \log_d b, log_d c)$ é P.G.

Assim, $\log_d b=q\cdot\log_d a \Rightarrow b=a^q$

e $\log_d c=q\cdot\log_d b \Rightarrow c=b^q \Rightarrow c=a^{q^2}$.

Logo, $(a,b,c)=\left(a, a^q, a^{q^2}\right)$.

Como $b=b^{\log_a b}-a$,

$b=b^{\log_a a^q}-a$,

$b=b^q-a \Rightarrow b=c-a$

Então $\begin{cases} b=c-a \\ b=\dfrac{c+a}{2}\end{cases} \Rightarrow c=3a$ e $b=2a$

Assim $(a,b,c) = (a,2a,3a)$.

Substituindo $(a, 2a, 3a)$ na equação $b = b^{\log_a b} - a$

$$2a = (2a)^{\log_a 2a} - a \Rightarrow 3a = (2a)^{\log_a 2a}$$

$$\Rightarrow 3a = 2^{\log_a 2a} \cdot a^{\log_a 2a} \Rightarrow 3a = 2^{\log_a 2a} \cdot 2a$$

$$\Rightarrow 2^{\log_a 2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \log_a 2a = \log_2 \frac{3}{2}.$$

Por definição, $2a = a^{\log_2 \frac{3}{2}} \Rightarrow a^{1-\log_2 \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow a^{\log_2 \frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \left(2^{-1}\right)^{\frac{1}{\log_2 \frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow a = 2^{-\log_{4/3} 2}$$

Assim, $(a, b, c) = \left(2^{-\log_{\frac{4}{3}} 2}, 2 \cdot 2^{-\log_{\frac{4}{3}} 2}, 3 \cdot 2^{-\log_{\frac{4}{3}} 2}\right)$

b) A razão da progressão aritmética é r = a, já calculado anteriormente.
Quanto à razão da progressão geométrica:

$$b = a^q \Rightarrow 2a = a^q$$

$$\Rightarrow \log_2(2a) = \log_2 a^q \Rightarrow 1 + \log_2 a = q \cdot \log_2 a$$

$$\Rightarrow 1 - \log_{\frac{4}{3}} 2 = q \cdot \left(-\log_{\frac{4}{3}} 2\right)$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{4}{3}} \frac{2}{3} = q \cdot \log_{\frac{4}{3}} \frac{1}{2} \Rightarrow q = \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow q = \log_2 \frac{3}{2}$$

No entanto, esta é a razão da progressão utilizada momentaneamente na alternativa "a", que é: $(\log_d a, \log_d b, \log_d c)$. A progressão do enunciado é feita pelos inversos destes termos, motivo pelo qual sua razão também é inversa. Denominando q' a razão da progressão perguntada:

$$q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}}$$

Questão 05

Um ônibus escolar transporta n crianças. Sejam A o evento em que dentro do ônibus tenham crianças de ambos os sexos e B o evento em que há no máximo uma menina dentro do ônibus. Determine o valor de n para que os eventos A e B sejam independentes.

Resolução:

A probabilidade de todos as crianças serem meninos é $\frac{1}{2^n}$. A probabilidade de todas serem meninas também é $\frac{1}{2^n}$. Com isso,

$$p(A) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n},$$

ou, ainda,

$$p(A) = \frac{2^n - 2}{2^n}.$$

A probabilidade de todas as crianças serem meninos é $\frac{1}{2^n}$. A probabilidade de exatamente uma criança ser menina é $\frac{n}{2^n}$. Com isso,

$$p(B) = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n},$$

ou, ainda,

$$p(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

A probabilidade de ocorrer o evento A e o evento B equivale à probabilidade de haver exatamente uma menina no ônibus. Com isso,

$$p(A \cap B) = \frac{n}{2^n}.$$

Para que A e B sejam independentes, $p(A) \cdot p(B) = p(A \cap B)$. Assim,

$$\frac{2^n - 2}{2^n} \cdot \frac{n+1}{2^n} = \frac{n}{2^n},$$

ou ainda,

$$2^{n-1} = n + 1.$$

Considerando que a igualdade só ocorre para $n = 3$, para que os eventos A e B sejam independentes, $n = 3$.

Questão 06

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, com k real.

Determine a faixa de valores de k para que exista uma matriz de números reais P tal que as condições abaixo sejam atendidas simultaneamente:

a) $A^TP + PA = I$ em que A^T é a transposta da matriz A e I é a matriz identidade;

b) P seja simétrica;

c) $p_{11} > 0$, em que p_{11} é o elemento da linha 1 e coluna 1 de P; e

d) $|P| > 0$, em que $|P|$ é o determinante da matriz P.

Resolução:

Como det $P > 0$, então P é uma matriz quadrada.

Seja P uma matriz simétrica $P=\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$, devemos ter $a > 0$ e $ab^2 - c^2 > 0$ para cumprir as condições *c*) e *d*). Com isso, falta apenas cumprir a condição *a*).

Equacionando $A^TP + PA = I$, teremos:

$$\begin{bmatrix} k & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando as devidas operações matriciais, obteremos:

$$\begin{bmatrix} 2ka+8c & -3a+4b+(k+2)c \\ -3a+4b+(k+2)c & 4b-6c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo a igualdade matricial:

$$\begin{cases} 2ka+8c=1 & (*_1) \\ -3a+4b+(k+2)c=0 & (*_2) \\ 4b-6c=1 & (*_3) \end{cases}$$

Fazendo 3 . $(*_1)$ + 4 . $(*_3)$, obtemos:

$$\begin{cases} 6ka+24c=3 \\ 16b-24c=4 \end{cases} \downarrow + \rightarrow 6ka+16b=7 \ (*_5)$$

Fazendo $6(*_2) + (k+2) \cdot (*_3)$, obtemos:

$$\begin{cases} -18a+24b+6\cdot(k+2)c=0 \\ 4(k+2)b-6\cdot(k+2)c=k+2 \end{cases} \downarrow + \rightarrow -18a+(32+4k)b=k+2 \ (*_6)$$

Fazendo 3 . $(*_5)$ + k . $(*_6)$, teremos:

$$\begin{cases} 18ka+48b=21 \\ -18ka+(32k+4k^2)6=k^2+2k \end{cases} + \downarrow \rightarrow b=\frac{k^2+2k+21}{4k^2+32k+48}$$

Substituindo nas equações anteriores, obtemos:

$$a=\frac{16+k}{2k^2+16k+24} \qquad c=\frac{3-2k}{2k^2+16k+24}$$

Para cumprir a condição $a > 0$, temos:

$$\frac{16+k}{2k^2+16k+24} > 0$$

Então, nessa condição, $-16 < k < -6$ ou $k > -2$.

Para cumprir a condição $ab - c^2 > 0$, vamos equacionar e colocar os denominadores das frações na forma $a_n(x-r_1)(x-r_2)$:

$$\frac{(16+k)}{2\cdot(k+2)(k+6)} \cdot \frac{(k^2+2k+21)}{4\cdot(k+2)(k+6)} - \frac{(3-2k)^2}{4\cdot(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

Tirando o MMC dos denominadores e simplificando, teremos:

$$\frac{k^3+10k^2+77k+318}{8\cdot(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

Por inspeção, percebemos que -6 é raiz do numerador.

Dividindo o polinômio do numerador por $k+6$, temos:

$$\frac{(k+6)\cdot(k^2+4k+53)}{8\cdot(k+2)^2(k+6)^2} > 0$$

$$\frac{k^2+4k+53}{8\cdot(k+2)^2(k+6)} > 0$$

A equação do numerador é sempre positiva (pois tem

$\Delta < 0$ e para $k = 1$ é positiva), e 8 $(k + 2)^2$ também é sempre positivo.
A solução da inequação é, portanto, $k > -6$ e $k \neq -2$.
Unindo as duas condições:

$$\begin{cases} -16 < k < -6 \text{ ou } k > -2 \\ k > -6 \text{ e } k \neq -2 \end{cases} \rightarrow k > -2$$

Conjunto solução:

$$\{k \in \mathbb{R} / k > -2\}$$

Questão 07

Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

Resolução:

$$qr = pqr - 35p - 11pq$$
$$qr = p \cdot (qr - 35 - 11q)$$

Que pode ser dividido em vários casos, considerando primos em $\mathbb{Z}$.

① $\begin{cases} p = q \\ r = qr - 35 - 11q \end{cases}$

$$qr - r - 35 - 11q = 0$$
$$r(q-1) - 35 - 11q + 11 - 11 = 0$$
$$r(q-11) - 11(q-1) = 46$$
$$(r-11)(q-1) = 46$$

Dividindo em casos:

1) $r - 11 = 1$	$q - 1 = 46$
2) $r - 11 = -1$	$q - 1 = -46$
3) $r - 11 = 2$	$q - 1 = 23$
4) $r - 11 = -2$	$q - 1 = -23$
5) $r - 11 = 23$	$q - 1 = 2$
6) $r - 11 = -23$	$q - 1 = -2$
7) $r - 11 = 46$	$q - 1 = 1$
8) $r - 11 = -46$	$q - 1 = -1$

Nenhum dos quais admite solução com q,r primos.

② $\begin{cases} p = -q \\ r = -qr + 35 + 11q \end{cases} \Rightarrow qr + r - 35 - 11q = 0$

$$\Rightarrow r(q+1) - 11(q+1) = 24$$
$$\Rightarrow (r-11)(q+1) = 24.$$

Dividindo em casos:

1) $r - 11 = 1$	$q + 1 = 24 \Rightarrow$	não convém
2) $r - 11 = -1$	$q + 1 = -24 \Rightarrow$	não convém
3) $r - 11 = 2$	$q + 1 = 12 \Rightarrow$	$(p, q, r) = (-11, 11, 13)$
4) $r - 11 = -2$	$q + 1 = -12 \Rightarrow$	não convém
5) $r - 11 = 3$	$q + 1 = 8 \Rightarrow$	não convém
6) $r - 11 = -3$	$q + 1 = -8 \Rightarrow$	não convém
7) $r - 11 = 4$	$q + 1 = 6 \Rightarrow$	não convém
8) $r - 11 = -4$	$q + 1 = -6 \Rightarrow$	$(p, q, r) = (7, -7, 7)$
9) $r - 11 = 6$	$q + 1 = 4 \Rightarrow$	$(p, q, r) = (-3, 3, 17)$
10) $r - 11 = -6$	$q + 1 = -4 \Rightarrow$	$(p, q, r) = (5, -5, 5)$
11) $r - 11 = 8$	$q + 1 = 3 \Rightarrow$	$(p, q, r) = (-2, 2, 19)$
12) $r - 11 = -8$	$q + 1 = -3 \Rightarrow$	não convém
13) $r - 11 = 12$	$q + 1 = 2 \Rightarrow$	não convém
14) $r - 11 = -12$	$q + 1 = -2 \Rightarrow$	não convém
15) $r - 11 = 24$	$q + 1 = 1 \Rightarrow$	não convém
16) $r - 11 = -24$	$q + 1 = -1 \Rightarrow$	$(p, q, r) = (2, -2, -13)$

③ $\begin{cases} p = r \\ q = qr - 35 - 11q \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} qr - 12q = 35 \\ q \cdot (r - 12) = 35 \end{matrix}$

Novamente em casos,

1) $q = 5$ $\quad r - 12 = 7 \Rightarrow (p, q, r) = (19, 5, 19)$

2) $q = -5$ $\quad r - 12 = -7 \Rightarrow (p, q, r) = (5, -5, 5)$

3) $q = 7$ $\quad r - 12 = 5 \Rightarrow (p, q, r) = (17, 7, 17)$

4) $q = -7$ $\quad r - 12 = -5 \Rightarrow (p, q, r) = (7, -7, 7)$

④ $\begin{cases} p = -r \\ q = -qr + 35 + 11q \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} qr - 10q = 35 \\ q \cdot (r - 10) = 35 \end{matrix}$

Dividindo em casos,

1) $q = 5$ $\quad r - 10 = 7 \Rightarrow (p, q, r) = (-17, 5, 17)$

2) $q = -5$ $\quad r - 10 = -7 \Rightarrow (p, q, r) = (-3, -5, 3)$

3) $q = 7$ $\quad r - 10 = 5 \Rightarrow$ não convém

4) $q = -7$ $\quad r - 10 = -5 \Rightarrow (p, q, r) = (-5, -7, 5)$

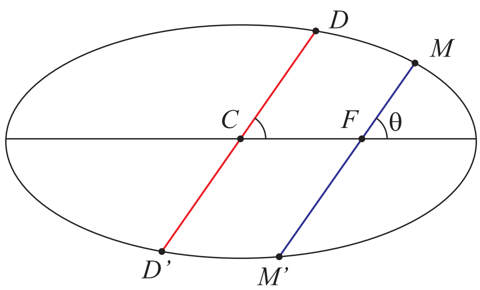
Que são, assim, as ternas (p, q, r) que satisfazem a equação.

Obs.: Considerando primos em $\mathbb{Z}^+$, as soluções são apenas duas: (19, 5, 19) e (17, 7, 17).
Considerando primos em $\mathbb{Z}$, as soluções são todas as descritas anteriormente.

Questão 08

Considere a elipse abaixo, onde DD' é uma corda passando pelo seu centro, MM' uma corda focal e o eixo maior da elipse é $2a$. Prove que:

$$DD'^2 = MM'.2a$$



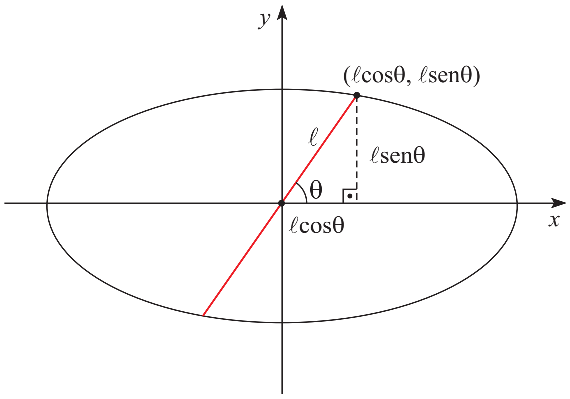
Resolução:

Temos que provar que $DD'^2 = 2a \cdot MM'$.

Seja $DD' = 2\ell \rightarrow 4\ell^2 = 2a \cdot MM' \leftrightarrow \ell^2 = \dfrac{a \cdot MM'}{2}$.

Que é o que temos que provar.

1) Calculando ℓ^2:



Como $(\ell\cos\theta,\ \ell\,\text{sen}\,\theta)$ está na elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \ell^2\cos^2\theta b^2 + \ell^2\,\text{sen}^2\,\theta a^2 = a^2b^2$$

Então $\ell^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\text{sen}^2\theta + b^2\cos^2\theta}$

2) Calculando $\dfrac{a \cdot MM'}{2}$.

Sabemos que toda corda focal é dada por:

$$MM' = \frac{2pe}{1 - e^2 \cos^2 \theta}$$

onde

p = distância do foco à diretriz mais próxima.

e = excentricidade.

Dado que $p = \dfrac{b^2}{c}$, $\rho = \dfrac{c}{a}$, substituindo:

$$MM' = \frac{2\frac{b^2}{c}\frac{c}{a}}{1 - \frac{c^2}{a^2} \cdot \cos^2 \theta} = \frac{\frac{2b^2}{a}}{\frac{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}{a^2}} = \frac{2b^2 a}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

Então:

$$\frac{a \cdot MM'}{2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \theta}$$

Para provar que $\ell^2 = \dfrac{a \cdot MM'}{2}$, basta provar que

$$a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos\theta = a^2 - c^2 \cos^2\theta$$

$$\leftrightarrow$$

$$a^2 \underbrace{(1 - \operatorname{sen}^2\theta)}_{\cos^2\theta} = \underbrace{(b^2 + c^2)}_{a^2} \cos^2\theta$$

$$\leftrightarrow$$

$$a^2 \cos^2\theta = a^2 \cos^2\theta$$

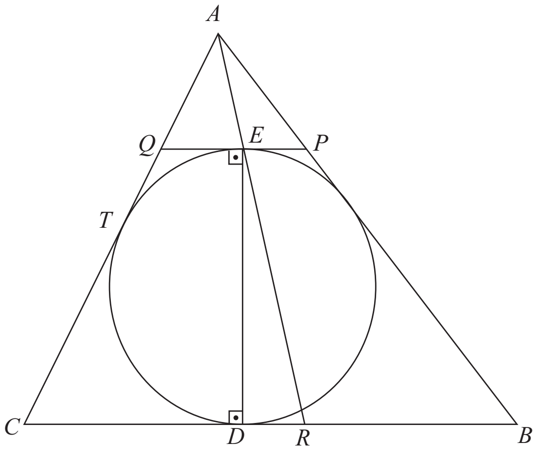
c.q.d

Questão 09

Considere um triângulo ABC onde $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, $c > b$. O círculo inscrito a esse triângulo tangencia BC em D e DE é um diâmetro desse círculo. A reta que tangencia o círculo e que passa por E intercepta AB em P e AC em Q. A reta AE intercepta BC no ponto R. Determine os segmentos de reta EQ e DR em função dos lados do triângulo: a, b e c.

Resolução:

Considere a figura.



O perímetro do triângulo AQP é $b + c - a$ e o do triângulo ABC é $a + b + c$. Com isso, a razão de semelhança do triângulo AQP, em relação ao triângulo ABC é

$$\frac{b+c-a}{a+b+c}.$$

Dessa semelhança,

$$\frac{\overline{AQ}}{b} = \frac{b+c-a}{a+b+c},$$

o que implica

$$\overline{AQ} = \frac{b^2 + bc - ab}{a+b+c}.$$

Considerando que $\overline{AQ}+\overline{QC}=b$, tem-se que

$$\overline{QC}=\frac{2ab}{a+b+c}.$$

Tem-se que $\overline{TC}=\frac{a+b-c}{2}$. Com isso,

$$\overline{QT}=\frac{2ab}{a+b+c}-\frac{a+b-c}{2},$$

ou ainda,

$$\overline{QT}=\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b+c)}.$$

Mas $\overline{EQ}=\overline{QT}$, o que implica

$$\overline{EQ}=\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b+c)}.$$

A razão de semelhança do triângulo AQE em relação ao triângulo ACR também é dada por

$$\frac{b+c-a}{a+b+c}.$$

Assim,

$$\frac{\overline{EQ}}{\overline{DR}+\overline{CD}}=\frac{b+c-a}{a+b+c}$$

Levando-se em conta que $\overline{CD}=\overline{TC}$, tem –se que

$$\frac{\frac{(a+c-b)(b+c-a)}{2(a+b+c)}}{\overline{DR}+\frac{a+b-c}{2}}=\frac{b+c-a}{a+b+c},$$

ou ainda,

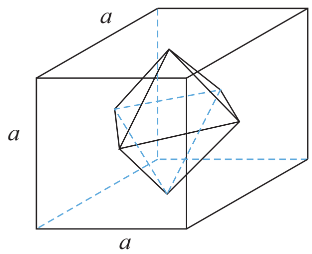
$$\overline{DR}=c-b.$$

Questão 10

Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces desse octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

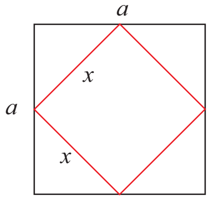
Resolução:

Seja "a" a aresta do 1° cubo



O volume do primeiro cubo será: $V_{C_1}=a^3$.

Fazendo uma vista superior, temos:

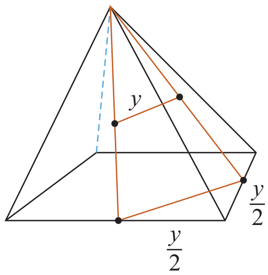


onde x é a aresta da base quadrada das duas pirâmides que compõem o octaedro. Logo: $x=\left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{2}$

O volume do primeiro octaedro será:

$$V_{O_1}=2\left(\frac{1}{3}x^2\cdot h\right)=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{a}{2}\right)\sqrt{2}\right]^2\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^3}{6}$$

Para o primeiro cubo inscrito nesse octaedro, consideraremos seu lado igual a y.



Note que os pontos que determinam o segmento de comprimento y são os baricentros dos triângulos das faces.
Desta forma:

$$\frac{2h}{y} = \frac{3h}{\frac{x}{2}\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{x\cdot\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 3} = \frac{x\sqrt{2}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{a}{3}$$

O volume do segundo cubo será:

$$V = y^3 = \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \frac{a^3}{27}$$

Da mesma forma que foi feito anteriormente, podemos dizer que o lado z do próximo octaedro será

$$z = \frac{y\sqrt{2}}{2} \Rightarrow z = \frac{a\sqrt{2}}{6}$$

Seu volume vale portanto:

$$V_{\theta_2} = 2\cdot\frac{1}{3}\ \ 2^2\left(\frac{y}{2}\right) = 2\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}\right)^2\cdot\frac{a}{2\cdot 3} = \frac{a^3}{162}$$

A razão entre dois volumes consecutivos será:

- Para o cubo: $\frac{a^3/27}{a^3} = \frac{1}{27}$
- Para o octaedro: $\frac{a^3/162}{a^3/6} = \frac{1}{27}$

A soma dos infinitos sólidos será:

$$S_{CUBO} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^3/27}{1-1/27} = \frac{a^3}{26}$$

$$S_{OCTAEDRO} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a^3/6}{1-1/27} = \frac{q_a 3}{52}$$

Somando-se todos eles: $S = \frac{a^3}{26} + \frac{qa^3}{52} = \frac{11a^3}{52}$

Logo: $\frac{S}{a^3} = \frac{11}{52}$

Matemática
Anderson
Lafayette
Mateus
Salviano

Colaboradores
Aline Alkmin
Cirillo Sales

Digitação e Diagramação
Kleuber Humberto
Márcia Santana

Revisor
Celso Faria

Desenhista
Rodrigo Ramos

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Supervisão Editorial
Aline Alkmin
Rodrigo Bernadelli

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3922-7501

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpo.com.br