"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

Sabe-se que:

$a = [a] + \{a\}, \ \forall a \in \mathbb{R}$, onde $[a]$ é a parte inteira de a

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 4,2 \\ y + [z] + \{x\} = 3,6 \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}, \quad \text{com } x,\ y \text{ e } z \in \mathbb{R}$$

Determine o valor de $x - y + z$

Resolução:

Para o sistema dado, podemos fazer:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 4,2 & (1) \\ y + [z] + \{x\} = 3,6 & (2) \\ z + [x] + \{y\} = 2 & (3) \end{cases}$$

Adicionando as linhas, temos:

$2x + 2y + 2z = 9,8$

$x + y + z = 4,9 \qquad (4)$

Agora, fazendo $(1) + (2)$:

$x + y + z + [y] + \{x\} = 7,8$

$4,9 + [y] + \{x\} = 7,8$

$[y] + \{x\} = 2,9$

$\therefore\ [y] = 2$ e $\{x\} = 0,9$

$(1) + (3)$:

$x + y + z + [x] + \{z\} = 6,2$

$4,9 + [x] + \{z\} = 6,2$

$[x] + \{z\} = 1,3$

$\therefore\ [x] = 1,0$ e $\{z\} = 0,3$

$(2) + (3)$:

$x + y + z + [z] + \{y\} = 5,6$

$4,9 + [z] + \{y\} = 5,6$

$[z] + \{y\} = 0,7$

$\therefore\ [z] = 0$ e $\{y\} = 0,7$

Logo,

$x = [x] + \{x\} = 1,9$

$y = [y] + \{y\} = 2,7$

$z = [z] + \{z\} = 0,3$

$x - y + z = 1,9 - 2,7 + 0,3 = -0,5$

Questão 02

Um triângulo isósceles possui seus vértices da base sobre o eixo das abscissas e o terceiro vértice, B, sobre o eixo positivo das ordenadas. Sabe-se que a base mede b e seu ângulo oposto $\hat{B} = 120^\circ$. Considere o lugar geométrico dos pontos cujo quadrado da distância à reta suporte da base do triângulo é igual ao produto das distâncias as outras duas retas que suportam os dois outros lados.
Determine a(s) equação(ões) do lugar geométrico e identifique a(s) curva(s) descrita(s).

Resolução:

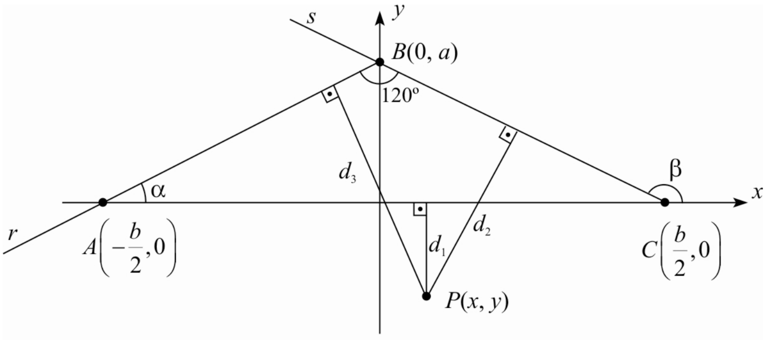


Figura 1

Sejam r e s as retas suportes de AB e BC, respectivamente

$$\left.\begin{array}{l}\beta = \alpha + 120^\circ \\ \alpha + \beta = 180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}\alpha = 30^\circ \\ \beta = 150^\circ\end{array}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{a}{b/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \frac{b\sqrt{3}}{6}$$

Equações de r e s

$$r:\ y = x \cdot \text{tg}\alpha + a \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{b\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x - \sqrt{3}y + \frac{b}{2} = 0$$

$$s:\ y = x \cdot \text{tg}\beta + a \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{b\sqrt{3}}{6} \Rightarrow x + \sqrt{3}y - \frac{b}{2} = 0$$

Da figura 1, temos:

$$d_1 = |y|, \quad d_2 = \left|\frac{x - \sqrt{3}y + b/2}{2}\right| \quad \text{e} \quad d_3 = \left|\frac{x + \sqrt{3}y - b/2}{2}\right|$$

De $d_1^2 = d_2 \cdot d_3$, temos:

$$|y|^2 = \left|\frac{x - \sqrt{3}y + b/2}{2}\right| \cdot \left|\frac{x + \sqrt{3}y - b/2}{2}\right| \Rightarrow x^2 - \left(\sqrt{3}y - b/2\right)^2 = \pm 4y^2$$

i) $x^2 - 7y^2 + b\sqrt{3}y = \frac{b^2}{4}$

$$x^2 - 7\left[y^2 - \frac{b\sqrt{3}y}{7} + \left(\frac{b\sqrt{3}}{14}\right)^2\right] = \frac{b^2}{4} - \frac{3}{7} \cdot \frac{b^2}{4}$$

$$x^2 - 7\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{14}\right)^2 = \frac{b^2}{7}$$

$$\frac{x^2}{\frac{b^2}{7}} - \frac{\left(y - \frac{b\sqrt{3}}{14}\right)^2}{\frac{b^2}{49}} = 1$$

Hipérbole de centro em $\left(0,\ \frac{b\sqrt{3}}{14}\right)$ e semi-eixos iguais a $\frac{b}{\sqrt{7}}$ e $\frac{b}{7}$.

ii) $x^2 + y^2 + b\sqrt{3}y = \frac{b^2}{4}$

$$x^2 + y^2 + b\sqrt{3}y + \frac{3b^2}{4} = b^2$$

$$x^2 + \left(y + \frac{b\sqrt{3}}{2}\right)^2 = b^2$$

Circunferência com centro em $\left(0,\ -\frac{b\sqrt{3}}{2}\right)$ e raio igual a b.

Questão 03

Sabe-se que $z_1\overline{z}_2 = \dfrac{z_3}{z_4}$ e $|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$, sendo z_1, z_2, z_3 e z_4 números complexos diferentes de zero.

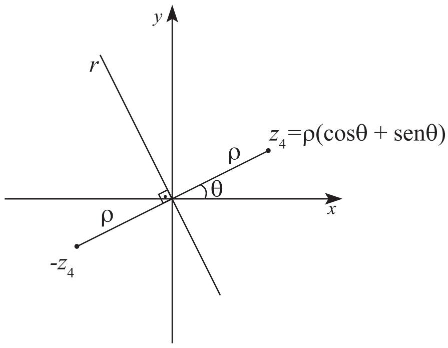
Prove que z_1 e z_2 são ortogonais.

Obs.: números complexos ortogonais são aqueles cujas representações gráficas são perpendiculares entre si e $\overline{z}$ é o número complexo conjugado de z.

Resolução:

$$|z_3 + z_4| - |z_3 - z_4| = 0$$
$$|z_3 - (-z_4)| = |z_3 - z_4|$$

A distância do afixo de z_3 ao de $-z_4$ é igual à distância do afixo de z_3 ao de z_4, ou seja, z_3 está sobre a reta mediatriz do segmento que une os afixos de $-z_4$ e z_4.



r é a mediatriz citada.

Como $z_3 \neq 0$, podemos escrever:

$$z_3 = \rho'\left[\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Escrevendo z_1 e z_2 na forma trigonométrica:

$$z_1 = \rho_1(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)$$
$$z_2 = \rho_2(\cos\beta + i\text{sen}\beta) \Rightarrow \overline{z}_2 = \rho_2(\cos(-\beta) + i\text{sen}(-\beta))$$

Lembrando que $z_1 \cdot \overline{z}_2 = \dfrac{z_3}{z_4}$ vem:

$$\rho_1(\cos\alpha + i\text{sen}\alpha)\cdot\rho_2[\cos(-\beta) + i\text{sen}(-\beta)] = \frac{\rho'\left[\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)\right]}{\rho(\cos\theta + i\text{sen}\theta)}$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2[\cos(\alpha - \beta) + i\text{sen}(\alpha - \beta)] = \frac{\rho'}{\rho}\left[\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) + i\text{sen}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\rho'}{\rho} \text{ e } \alpha - \beta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore\ \alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo, z_1 e z_2 são ortogonais.

c.q.d.

Questão 04

Dada a função $F: IN^2 \to IN$, com as seguintes características:

$F(0,\ 0) = 1;$

$F(n,\ m+1) = q \cdot F(n,\ m)$, onde q é um número real diferente de zero;

$F(n+1,\ 0) = r + F(n,\ 0)$, onde r é um número real diferente de zero.

Determine o valor $\sum_{i=0}^{2009} F(i,\ i),\ i \in IN.$

Resolução:

i) $F(0,\ 0) = 1$

$F(1,\ 0) = r + F(0,\ 0) = r + 1$

$F(2,\ 0) = r + F(1,\ 0) = r + r + 1 = 2r + 1$

$F(3,\ 0) = r + F(2,\ 0) = r + 2r + 1 = 3r + 1$

$\vdots$

$F(k,\ 0) = k \cdot r + 1$

ii) $F(1,\ 1) = q \cdot F(1,\ 0) = q \cdot (r+1)$

$F(2,\ 2) = q \cdot F(2,\ 1) = q \cdot q \cdot F(2,\ 0) = q^2 \cdot (2r+1)$

$F(3,\ 3) = q \cdot F(3,\ 2) = q \cdot q \cdot F(3,\ 1) = q \cdot q \cdot q \cdot F(3,\ 0) = q^3 \cdot (3r+1)$

$\vdots$

$F(k,\ k) = q^k (k \cdot r + 1)$, que é a fórmula do termo geral.

Logo, podemos escrever:

$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,\ i) = \sum_{i=0}^{2009} q^i \cdot (i \cdot r + 1) = 1 + q \cdot (r+1) + q^2 \cdot (2r+1) + \ldots + q^{2009} \cdot (2009r + 1)$$

$$= \underbrace{1 + q + q^2 + \ldots + q^{2009}}_{S_1} + r \cdot \underbrace{\left(q + 2q^2 + \ldots + 2009 \cdot q^{2009}\right)}_{S_2} \quad ①$$

iii) $S_1 = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{2009} = \dfrac{1 \cdot \left(q^{2010} - 1\right)}{q - 1}$

iv) $S_2 = q + 2q^2 + \ldots + 2009 \cdot q^{2009}$

$q \cdot S_2 = q^2 + 2q^3 + \ldots + 2009 \cdot q^{2010}$

$S_2 - q \cdot S_2 = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{2009} - 2009 \cdot q^{2010}$

$S_2 (1 - q) = \dfrac{q\left(q^{2009} - 1\right)}{q - 1} - 2009 \cdot q^{2010}$

$S_2 = \dfrac{2009 \cdot q^{2010}}{q - 1} - \dfrac{q\left(q^{2009} - 1\right)}{(q-1)^2}$

$S_2 = \dfrac{2009 \cdot q^{2011} - 2010 \cdot q^{2010} + q}{(q-1)^2}$

Voltando em ①:

$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,\ i) = \frac{q^{2010} - 1}{q - 1} + \frac{r\left(2009 \cdot q^{2011} - 2010 \cdot q^{2010} + q\right)}{(q-1)^2}$$

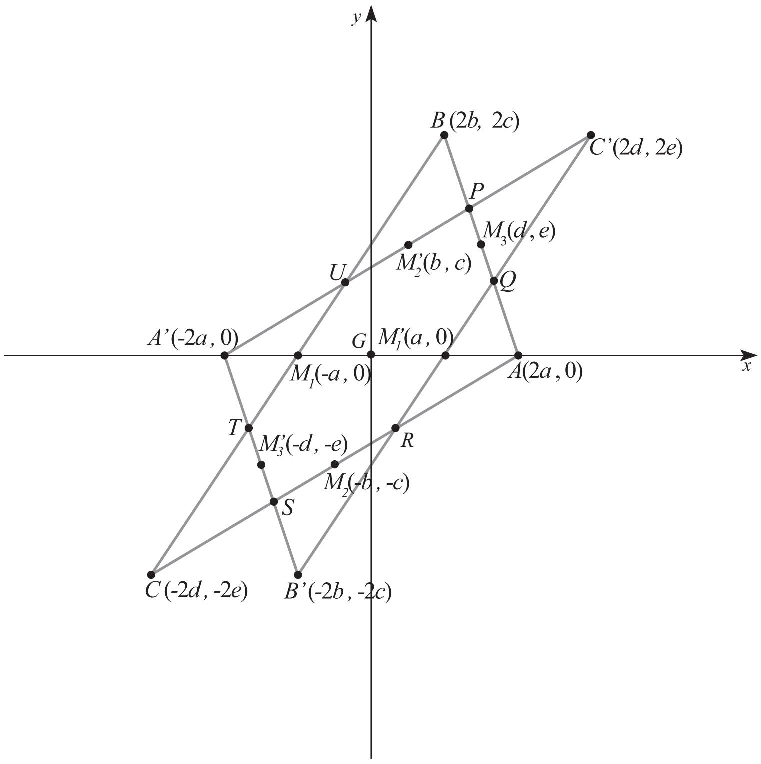
$$\sum_{i=0}^{2009} F(i,\ i) = \frac{(2009 \cdot r + 1) \cdot q^{2011} - (2010r + 1) \cdot q^{2010} + r \cdot q - q + 1}{(q-1)^2}$$

Questão 05

Seja G o ponto de intersecção das medianas de um triângulo ABC com área S. Considere os pontos A', B' e C' obtidos por uma rotação de 180° dos pontos A, B e C, respectivamente, em torno de G. Determine, em função de S, a área formada pela união das regiões delimitadas pelos triângulos ABC e $A'B'C'$.

Resolução:

Marcando no plano cartesiano e lembrando que G divide cada uma das medianas na proporção de 2 para 1, temos:



$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{B'C'}$ e $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$

$\therefore\ S_{A'B'C'} = S_{ABC} = S$

O triângulo $C'PQ$ é semelhante ao triângulo $C'A'B'$ na razão de 1 para 3 (note que $\overrightarrow{M_3C'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{M'_3C'}$), logo

$$S_{C'PQ} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot S_{C'A'B'} = \frac{S}{9}$$

De modo análogo:

$$S_{B'RS} = \frac{S}{9} \text{ e } S_{A'TU} = \frac{S}{9}$$

Seja S' a área pedida:

$$S' = S_{ABC} + S_{C'PQ} + S_{B'RS} + S_{A'TU} = S + \frac{S}{9} + \frac{S}{9} + \frac{S}{9}$$

$$\therefore\ S' = \frac{4S}{3}.$$

Questão 06

Resolva a seguinte inequação, para $0 \le x < 2\pi$:

$$\frac{3\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 4\operatorname{sen} x - \left(1+4\sqrt{2}\right)\operatorname{sen} x\cos x + 4\cos x - \left(2+2\sqrt{2}\right)}{2\operatorname{sen} x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

Resolução:

$$\frac{3\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x + 4\operatorname{sen} x - \left(1+4\sqrt{2}\right)\operatorname{sen} x\cos x + 4\cos x - \left(2+2\sqrt{2}\right)}{2\operatorname{sen} x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + 2\left(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x\right) + 4\operatorname{sen} x - 4\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} x\cos x + 4\cos x - 2\sqrt{2} - 2}{2\operatorname{sen} x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x + 2\left(2\operatorname{sen} x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x + 2\cos x - \sqrt{2}\right)}{2\operatorname{sen} x + 2\cos x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x - \sqrt{2}} > 2$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x\cos x}{2\operatorname{sen} x + 2\cos x - 2\sqrt{2}\operatorname{sen} x\cos x - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\dfrac{1-\cos 2x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{2}}{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\operatorname{sen} 2x - \sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{1-\left(\cos 2x + \operatorname{sen} 2x\right)}{2\left\{2\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\left[\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]\right\}} > 0$$

$$\frac{1-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{2}\left[\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]} > 0$$

$$f(x) = \frac{1-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\left[1-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]} > 0$$

Estudo do sinal de $f(x)$:

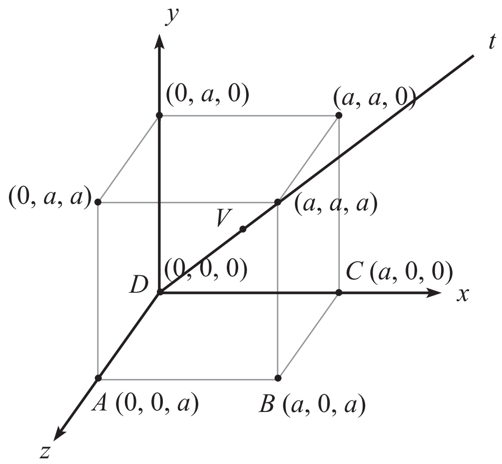
	0 a $\pi/4$	$\pi/4$ a $3\pi/4$	$3\pi/4$ a π	π a $5\pi/4$	$5\pi/4$ a $7\pi/4$	$7\pi/4$ a 2π
$1-\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$:	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$
$\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$:	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$
$1-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$:	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$:	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\therefore\ S = \left(\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\pi;\ \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4};\ 2\pi\right)$$

Questão 07

Seja um cubo de base $ABCD$ com aresta a. No interior do cubo, sobre a diagonal principal, marca-se o ponto V, formando-se a pirâmide $VABC$. Determine os possíveis valores da altura da pirâmide $VABCD$, em função de a, sabendo que a soma dos quadrados das arestas laterais da pirâmide é igual a ka^2, sendo k um número primo.
Obs.: as arestas laterais da pirâmide são VA, VB, VC e VD.

Resolução:



t é a reta suporte de uma diagonal principal. Se V é ponto de t, então $V(h, h, h)$, em que h é a altura da pirâmide $VABCD$.

$$VA^2 + VB^2 + VC^2 + VD^2 = k \cdot a^2$$
$$h^2 + h^2 + (h-a)^2 + (h-a)^2 + h^2 + (h-a)^2 + (h-a)^2 + h^2 + h^2 + h^2 + h^2 + h^2 = k \cdot a^2$$
$$8h^2 + 4(h-a)^2 = ka^2$$
$$8h^2 + 4h^2 - 8ha + 4a^2 - ka^2 = 0$$
$$12h^2 - 8a \cdot h + a^2(4-k) = 0$$
$$h = \frac{8a \pm \sqrt{64a^2 - 48 \cdot a^2(4-k)}}{24} = \frac{8a \pm 4a\sqrt{4-3(4-k)}}{24}$$
$$h = a\left(\frac{2 \pm \sqrt{3k-8}}{6}\right)$$

Lembrando que k é primo e $0 < h < a$, temos as seguintes soluções para h.

i) $k = 3$

$$h = a\left(\frac{2 \pm 1}{6}\right) \Rightarrow h = \frac{a}{2} \text{ ou } h = \frac{a}{6}$$

ii) $k = 5$

$h = a\left(\dfrac{2+\sqrt{7}}{6}\right)$, pois a outra raiz é negativa.

iii) $k = 7$

$h = a\left(\dfrac{2+\sqrt{13}}{6}\right)$, pois a outra raiz é negativa.

Questão 08

Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

- os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\binom{n}{n-i+1}$;
- os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;
- todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e de $\det(M)$ o determinante de uma matriz M, encontre as raízes da equação $\det(x \cdot I - A) = 0$.

Resolução:

De acordo com a definição, temos que $\det(x \cdot I - A) = 0$, tem a seguinte notação tabular:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n-1} \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x + \binom{n}{1} \end{vmatrix} = 0$$

Definindo: $A_1 = x + \binom{n}{1}$, $A_k = x \cdot A_{k-1} + \binom{n}{k}$, temos que $\det(x \cdot I - A) = A_n$, pois:

$$A_2 = \begin{vmatrix} x & \binom{n}{2} \\ -1 & A_1 \end{vmatrix} \Rightarrow A_2 = x \cdot A_1 + \binom{n}{2}$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} x & 0 & \binom{n}{3} \\ -1 & x & \binom{n}{2} \\ 0 & -1 & x + \binom{n}{1} \end{vmatrix} \Rightarrow A_3 = x \cdot A_2 + \binom{n}{3}.$$

$$A_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \\ -1 & x & 0 & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x + \binom{n}{1} \end{vmatrix} = x \cdot A_{n-1} + (-1)^{1+n} \cdot \binom{n}{n} \cdot B,$$

onde B é o determinante da matriz de ordem $(n-1)$:

$$B = \begin{vmatrix} -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

$$\therefore A_n = x \cdot A_{n-1} + \binom{n}{n} \cdot (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1}$$

$$A_n = x \cdot A_{n-1} + \binom{n}{n}.$$

Como $A_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} = (x+1)^n$, pois:

$$A_1 = \binom{n}{0} x + \binom{n}{1}$$

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} = x\left(\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} x^{n-j}\right) + \binom{n}{n} = x \cdot A_{n-1} + \binom{n}{n}.$$

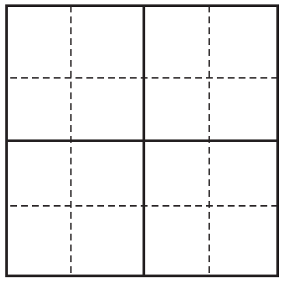
Resolvendo $\det(x \cdot I - A) = 0$, temos:

$\det(x \cdot I - A) = A_n = (x+1)^n = 0$, de onde segue que $x = -1$ é raiz da equação com multiplicidade n.

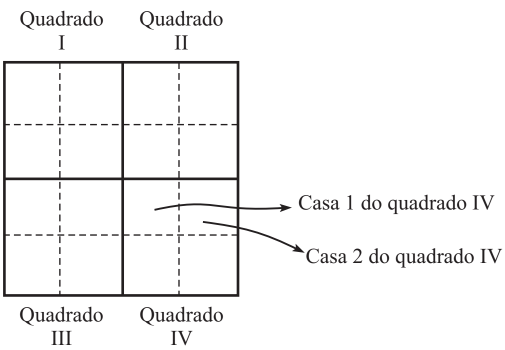
Questão 09

A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1, 2, 3 e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



Resolução:



Usando a notação estabelecida acima, temos $4! = 24$ maneiras de preencher o quadrado I.
Como a casa 1 do quadrado IV é livre, temos 4 possibilidades de escolher seu ocupante.
Montado o quadrado I e escolhido o elemento da casa 1 do quadrado IV, teremos, automaticamente outras quatro casas definidas, como no exemplo:

1	2		
3	4	2	1
	3	1	
	1		

Finalmente, temos três possibilidades para preencher a última casa (casa 4) do quadrado IV e com isto todas as casas ficarão determinadas.
Logo: $24 \cdot 4 \cdot 3 = 288$.

Questão 10

Seja a uma constante real positiva. Resolva a equação $\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}=2\sqrt{2}x$, para $x\in\mathbb{R}$ e $0\le x\le a$.

Resolução:

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2-x^2}}+\sqrt{3a}\sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}}{a}=\frac{2\sqrt{2}\,x}{a}$$

$$\frac{\sqrt{a}\sqrt{a+\sqrt{a^2+x^2}}}{\sqrt{a}\ \sqrt{a}}+\frac{\sqrt{3a}\ \sqrt{a-\sqrt{a^2-x^2}}}{\sqrt{a}\ \sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{2}\,x}{a}$$

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a}}+\sqrt{3}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a}}=\frac{2\sqrt{2}x}{a}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}+\sqrt{3}\sqrt{1-\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=2\sqrt{2}\,\frac{x}{a}$$

Fazendo $\frac{x}{a}=sen\,\theta$, com $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}+\sqrt{3}\sqrt{1-\sqrt{1-\text{sen}^2\theta}}=2\sqrt{2}\,\text{sen}\theta$$

$$\left(\sqrt{1+\cos\theta}+\sqrt{3}\sqrt{1-\cos\theta}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\,\text{sen}\theta\right)^2$$

$$1+\cos\theta+2\sqrt{3}\sqrt{1-\cos^2\theta}+3\left(1-\cos\theta\right)=8\,\text{sen}^2\theta$$

$$4-2\cos\theta+2\sqrt{3}\,\text{sen}\theta=8\,\text{sen}^2\theta$$

$$4-8\,\text{sen}^2\theta=2\cos\theta-2\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta$$

$$1-2\text{sen}^2\theta=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen}\theta$$

$$\cos(2\theta)=\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

Voltando na substituição $\frac{x}{a}=\text{sen}\,\theta$:

$$x=a\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$$

$$x=\frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Professores
Bruno Werneck
Manim
Marcelo Moraes
Ney Marcondes
Rodrigo Bernadelli
Zé Carlos

Colaboradores
Aline Alkmin
Anderson (IME)
Henrique
Orlando (IME)
Paula Esperidião
Pedro Gonçalves

Digitação e Diagramação
Érika de Rezende
Nayara
Val Pinheiro

Desenhistas
Isabella
Lucas Lemes
Mariana Fiusa
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Alicio Roberto

Supervisão Editorial
Alicio Roberto
Bruno Werneck
João Neto
José Diogo
Marcelo Moraes
Rodrigo Bernadelli

*A **Resolução Comentada** das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO** Pré-Vestibular, ou pelo telefone **(62) 3251 – 9009

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

opirus

EDITORA

olimpo