2009 IME

"A matemática é o alfabeto com que Deus escreveu o mundo"
Galileu Galilei

Questão 01

Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\ \Delta\ Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.
Pode se afirmar que:

A) $(X \Delta Y) \cap (X \cap Y) = \varnothing$
B) $(X \Delta Y) \cap (X - Y) = \varnothing$
C) $(X \Delta Y) \cap (Y - X) = \varnothing$
D) $(X \Delta Y) \cup (X - Y) = X$
E) $(X \Delta Y) \cup (Y - X) = X$

Resolução:

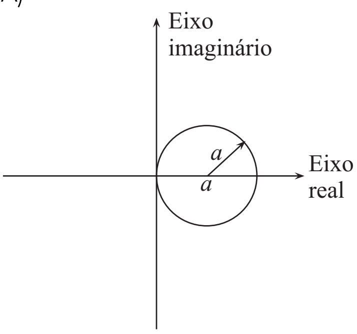
$$= (x \Delta y) \cap (x \cap y) = \left[(x-y) \cup (y-x)\right] \cap (x \cap y)$$
$$= \left[(x-y) \cap (x \cap y)\right] \cup \left[(y-x) \cap (x \cap y)\right]$$
$$= \varnothing \cup \varnothing$$
$$= \varnothing$$

Alternativa A

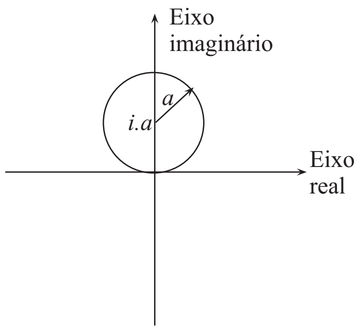
Questão 02

Seja $z = \rho \cdot e^{i\theta}$ um número complexo onde ρ e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento de z e i é a unidade imaginária. Sabe-se que
$\rho = 2a\cos\theta$, onde a é uma constante real positiva. A representação de z no plano complexo é

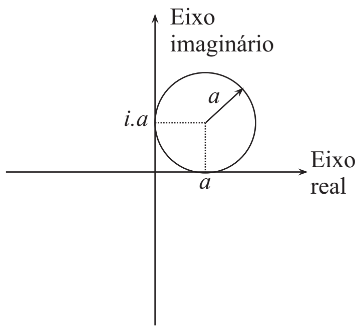
A)



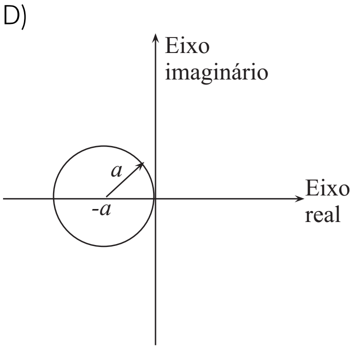
B)



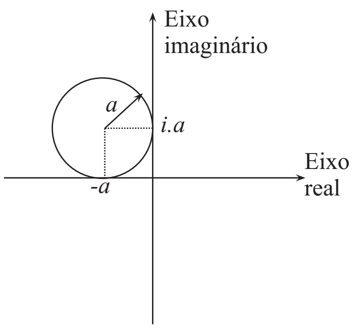
C)



D)



E)



Resolução:

Como ρ é o módulo e θ é o argumento, temos: $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, com $\rho = 2a\cos\theta$.

Portanto:

$$\begin{aligned}|z-a| &= |\rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) - a|\\ &= |(\rho\cos\theta - a) + i\rho\operatorname{sen}\theta|\\ &= \sqrt{\left[a\left(2\cos^2\theta - 1\right)\right]^2 + \left[2a\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right]^2}\\ &= \sqrt{a^2(\cos 2\theta)^2 + a^2(\operatorname{sen}2\theta)^2}\\ &= a.\end{aligned}$$

$\therefore |z-a| = a$ é, no plano complexo, uma circunferência de centro em $a + 0i$ e raio a.

Alternativa A

Questão 03

Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

A) -81

B) -27

C) -3

D) 27

E) 81

Resolução:

$A^4 + 3A^3 = 0$

$A^4 = -3A^3$

$A = -3I$, em que I é a matriz identidade de ordem 4.

$\det A = \det(-3I)$

$\det A = (-3)^4 \det I = 81 \cdot 1 = 81$

Alternativa E

Questão 04

Seja $\log 5 = m$, $\log 2 = p$ e $N = 125\sqrt[3]{\dfrac{1562.5}{\sqrt[5]{2}}}$. O valor de $\log_5 N$, em função de m e p é

A) $\dfrac{75m+6p}{15m}$

B) $\dfrac{70m-6p}{15m}$

C) $\dfrac{75m-6p}{15m}$

D) $\dfrac{70m+6p}{15m}$

E) $\dfrac{70m+6p}{15p}$

Resolução:

$$\log_5 N = \frac{\log N}{\log 5} = \frac{\log\left(125\sqrt[3]{\dfrac{1562,5}{\sqrt[5]{2}}}\right)}{m}$$

$$\log_5 N = \frac{\log 125 + \frac{1}{3}\log\left(\dfrac{1562,5}{\sqrt[5]{2}}\right)}{m} = \frac{3\log 5 + \frac{1}{3}\left(\log 1562,5 - \log\sqrt[5]{2}\right)}{m}$$

$$\log_5 N = \frac{3m + \frac{1}{3}\left(\log\left(\dfrac{5^5}{2}\right) - \frac{1}{5}\log 2\right)}{m}$$

$$\log_5 N = \frac{3m + \frac{1}{3}\left(5\log 5 - \log 2 - \frac{1}{5}\log 2\right)}{m}$$

$$\log_5 N = \frac{3m + \frac{1}{3}\left(5m - p - \frac{p}{5}\right)}{m} = \frac{3m + \frac{1}{3}\left(5m - \frac{6p}{5}\right)}{m}$$

$$\log_5 N = \frac{70m - 6p}{15m}$$

Alternativa B

Questão 05

Sabe-se que $y = \dfrac{2+2^{\cos 2x}}{2\left(1+4^{sen^2 x}\right)}$, $\forall x \in \Re$. Uma outra expressão para y é

A) 2
B) $2^{-\text{sen}^2 x}$
C) $2^{-2\,\text{sen}^2 x}$
D) $2^{-\cos^2 x}$
E) $2^{-2\cos^2 x}$

Resolução:

$$y = \frac{2+2^{\cos 2x}}{2\left(1+4^{sen^2 x}\right)} = \frac{2+2^{1-2sen^2 x}}{2\left(1+2^{2sen^2 x}\right)} = \frac{1+2^{-2sen^2 x}}{1+2^{2sen^2 x}}$$

$$y = \frac{\dfrac{2^{2sen^2 x}+1}{2^{2sen^2 x}}}{1+2^{2sen^2 x}} = \frac{1}{2^{2sen^2 x}}$$

$$y = 2^{-2\text{sen}^2\text{x}}$$

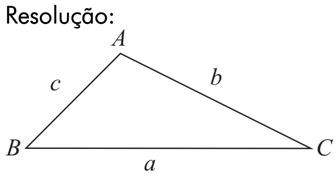
Alternativa C

Questão 06

Um triângulo ABC apresenta lados a, b e c. Sabendo que $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são, respectivamente, os ângulos opostos aos lados b e c, o valor de $\dfrac{tg\hat{B}}{tg\hat{C}}$ é

A) $\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}\,\dfrac{c}{b}$
B) $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$
C) $\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}$
D) $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}\,\dfrac{c}{b}$
E) $\dfrac{b}{c}$

Resolução:



$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos\hat{B} \Rightarrow \cos\hat{B} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\,\hat{C} \Rightarrow \cos\,\hat{C} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}} \Rightarrow \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}} = \frac{b}{c}$$

$$\frac{tg\hat{B}}{tg\hat{C}} = \frac{\dfrac{\text{sen}\hat{B}}{\cos\hat{B}}}{\dfrac{\text{sen}\hat{C}}{\cos\hat{C}}} = \frac{\text{sen}\hat{B}}{\text{sen}\hat{C}} \cdot \frac{\cos\hat{C}}{\cos\hat{B}} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$$

$$\frac{tg\hat{B}}{tg\hat{C}} = \frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$$

Alternativa B

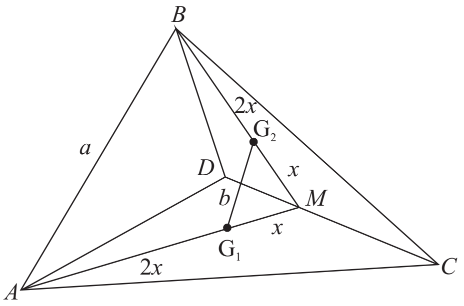
Questão 07

Os centros das faces de um tetraedro regular são os vértices de um tetraedro interno. Se a razão entre os volumes dos tetraedros interno e original vale $\dfrac{m}{n}$, onde m e n são inteiros positivos primos entre si, o valor de $m + n$ é

A) 20
B) 24
C) 28
D) 30
E) 32

Resolução:

Sejam a e b as medidas das arestas do maior e do menor tetraedro, respectivamente.



Na figura temos:

$$\frac{b}{a} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

Lembrando que m e n são primos entre si temos:

$m = 1$ e $n = 27$

$m + n = 28$

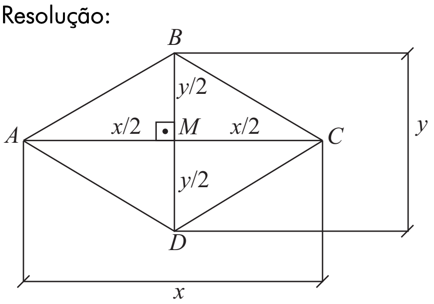
Alternativa C

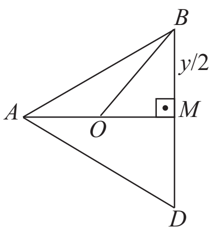
Questão 08

Os raios dos círculos circunscritos as triângulos ABD e ACD de um losango $ABCD$ são, respectivamente, $\frac{25}{2}$ e 25. A área do losango $ABCD$ é

A) 100
B) 200
C) 300
D) 400
E) 500

Resolução:





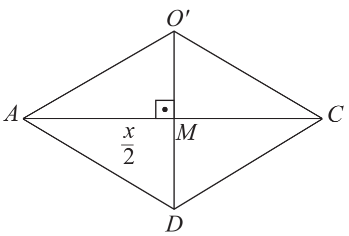
$$BO = AO = \frac{25}{2}$$

$$MO = \frac{x}{2} - \frac{25}{2} = \frac{x-25}{2}$$

No ΔBOM

$$\left(\frac{25}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-25}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 50x + y^2 = 0 \quad (1)$$



$$AO' = DO' = 25$$

$$MO' = 25 - \frac{y}{2} = \frac{50-y}{2}$$

No $\Delta AMO'$

$$25^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{50-y}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 = 100 \cdot y \quad (2)$$

De (1) e (2)

$100y - 50x = 0$

$x = 2y \quad (3)$

Voltando em (1)

$4y^2 - 100y + y^2 = 0$

$5y^2 - 100y = 0$

$y = 20$

Voltando em (3)

$x = 40$

Seja A a área pedida

$$A = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{40 \cdot 20}{2} = 400$$

Alternativa D

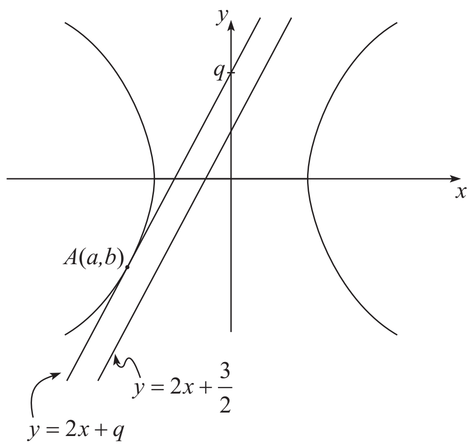
Questão 09

Seja $A(a,b)$ o ponto da cônica $x^2 - y^2 = 27$ mais próximo da reta $4x - 2y + 3 = 0$. O valor de $a + b$ é:

A) 9
B) 4
C) 0
D) –4
E) –9

Resolução:

A hipérbole de equação $x^2 - y^2 = 27$ e a reta $y = 2x + \frac{3}{2}$ não se tocam, logo o ponto $A(a,b)$ procurado é o ponto em que se apóia uma das tangentes à cônica paralela à reta dada, conforme mostra a figura.



$$\begin{cases} y = 2x + q \\ x^2 - y^2 = 27 \end{cases}, \text{ com } q > 0$$

$$x^2 - (2x+q)^2 = 27$$

$$x^2 - 4x^2 - 4qx - q^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 + 4qx + (q^2 + 27) = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta = 0$$

$$16q^2 - 12(q^2 + 27) = 0$$

$$4q^2 = 12 \cdot 27$$

$$q^2 = 81$$

$$q = 9$$

Voltando em (1):

$$3x^2 + 4 \cdot 9 \cdot x + (9^2 + 27) = 0$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$x = -6$$

$$y = 2 \cdot (-6) + 9 = -3$$

$A(-6,-3)$ e $a + b = (-6) + (-3) = -9$.

Alternativa E

Questão 10

Seja o sistema de equações lineares dadas por $\begin{cases} 6y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10 \\ y_1 + 6y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20 \\ y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + y_5 = 40 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 6y_4 + y_5 = 80 \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 6y_5 = 160 \end{cases}$. O valor de $7y_1 + 3y_5$ é:

A) 12
B) 24
C) 36
D) 48
E) 60

Resolução:

Adicionando todas as linhas temos:

$$10y_1 + 10y_2 + 10y_3 + 10y_4 + 10y_5 = 310$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 31 \qquad (1)$$

De (1) e a primeira equação do sistema:

$$5y_1 = -21$$
$$y_1 = -\frac{21}{5}$$

De (1) e a quinta equação do sistema:

$$5y_5 = 129$$
$$y_5 = \frac{129}{5}$$

Logo, $7y_1 + 3y_5 = -\frac{147}{5} + \frac{387}{5} = \frac{240}{5} = 48$

Alternativa D

Questão 11

Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Retiram-se, **com reposição**, 3 bolas desta urna, sendo α o número da primeira bola, β o da segunda e λ o da terceira. Dada a equação quadrática $\alpha x^2 + \beta x + \lambda = 0$, a alternativa que expressa a probabilidade das raízes desta equação serem reais é:

A) $\frac{19}{125}$

B) $\frac{23}{60}$

C) $\frac{26}{125}$

D) $\frac{26}{60}$

E) $\frac{25}{60}$

Resolução:

$$\alpha x^2 + \beta x + \lambda = 0$$
$$\Delta \geq 0$$
$$\beta^2 - 4\alpha\lambda \geq 0$$
$$\beta^2 \geq 4\alpha\lambda$$

Lembrando que α, β e λ são inteiros variando de 1 a 5 temos:

$i)$ $\beta = 2 \Rightarrow (\alpha,\lambda) = (1,1)$

$ii)$ $\beta = 3 \Rightarrow (\alpha,\lambda) = (1,1),(1,2),(2,1)$

$iii)$ $\beta = 4 \Rightarrow (\alpha,\lambda) = (1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(2,2)$

$iv)$ $\beta = 5 \Rightarrow (\alpha,\lambda) = (1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(2,2),(2,3),(3,2)$

Em um total de 24 casos distintos e equiprováveis com probabilidade $\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{125}$ cada um.

Seja P a probabilidade pedida:

$$P = 24 \cdot \frac{1}{125} = \frac{24}{125}$$

Não há alternativa correta.

Questão 12

É dada uma PA de razão r. Sabe-se que o quadrado de qualquer número par x, $x > 2$, pode ser expresso como a soma dos n primeiros números desta PA, onde n é igual à metade de x. O valor de r é:

A) 2

B) 4

C) 8

D) 10

E) 16

Resolução:

PA $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\cdot n}{2} = x^2$$
$$\frac{[a_1 + a_1 + (n-1)\cdot r]\cdot n}{2} = x^2$$
$$a_1 \cdot n + \frac{r\cdot n^2}{2} - \frac{r\cdot n}{2} = x^2$$
$$\left(a_1 - \frac{r}{2}\right)\cdot n + \frac{r}{2}\cdot n^2 = x^2$$

Lembrando que $n = \frac{x}{2}$ vem:

$\frac{r}{8}\cdot x^2 + \left(\frac{a_1}{2} - \frac{r}{4}\right)\cdot x = x^2$, para todo x par, $x > 2$.

$\frac{r}{8} = 1$ e $\frac{a_1}{2} - \frac{r}{4} = 0$

$r = 8$ e $a_1 = 4$.

Alternativa C

Questão 13

Se as curvas $y = x^2 + ax + b$ e $x = y^2 + cy + d$ se interceptam em quatro pontos distintos, a soma das ordenadas destes quatro pontos

A) depende apenas do valor de c.
B) depende apenas do valor de a.
C) depende apenas dos valores de a e c.
D) depende apenas dos valores de a e b.
E) depende dos valores de a, b, c e d.

Resolução:

$$\begin{cases} x = y^2 + cy + d \\ y = x^2 + ax + b \end{cases}$$
$$y = (y^2 + cy + d)^2 + a\cdot(y^2 + cy + d) + b$$
$$y = y^4 + c^2y^2 + d^2 + 2cy^3 + 2dy^2 + 2cdy + ay^2 + acy + ad + b$$
$$y^4 + 2cy^3 + (c^2 + 2d + a)\cdot y^2 + (2cd + ac - 1)\cdot y + (d^2 + ad + b) = 0$$

Sejam y_1, y_2, y_3 e y_4 as soluções reais dessa equação:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -2c$$

Alternativa A

Questão 14

O par ordenado (x, y), com x e y inteiros positivos, satisfaz a equação $5x^2 + 2y^2 = 11(xy - 11)$. O valor de $x + y$ é:

A) 160
B) 122
C) 81
D) 41
E) 11

Resolução:

Desenvolvendo a expressão

$$5x^2 + 2y^2 = 11 \cdot (xy - 11)$$
$$5x^2 + 2y^2 = 11xy - 121$$
$$5x^2 - 10xy + 2y^2 - xy = -121$$
$$5x \cdot (x - 2y) + y \cdot (2y - x) = -121$$
$$(5x - y) \cdot (x - 2y) = -121$$

Como x e y devem ser inteiros e positivos, temos que uma solução é $x = 27$ e $y = 14$.

Portanto $x + y = 27 + 14 = 41$.

Alternativa D

Questão 15

Sejam f uma função bijetora de uma variável real, definida para todo conjunto dos números reais e as relações h e g, definidas por:

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to \left(x^2, x - f(y)\right) \text{ e } g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x, y) \to \left(x^3, x - f(y)\right)$$

Pode-se afirmar que:

A) h e g são sobrejetoras.

B) h é injetora e g sobrejetora.

C) h e g não são bijetoras.

D) h e g não são sobrejetoras.

E) h não é injetora e g é bijetora.

Resolução:

Tomando como contra exemplo, para justificar que h não é injetora, $f(x) = x$.

Deste modo:

$h(1,6) = h(-1,4)$, pois:

$$h(1,6) = \left(1^2, 1 - f(6)\right) \qquad h(-1,4) = \left((-1)^2, -1 - f(4)\right)$$
$$h(1,6) = (1, 1 - 6) \qquad h(-1,4) = (1, -1 - 4)$$
$$h(1,6) = (1, -5) \qquad h(-1,4) = (1, -5)$$

Ou seja, h não é injetora.

Para a função g, temos que $g\left(\mathbb{R}^2\right) = \mathbb{R}^2$, ou seja, é sobrejetora.

Se $g(x_1, y_1) = g(x_2, y_2)$, segue:

$$\left(x_1^3, x_1 - f(y_1)\right) = \left(x_2^3, x_2 - f(y_2)\right)$$

* $x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad (i)$

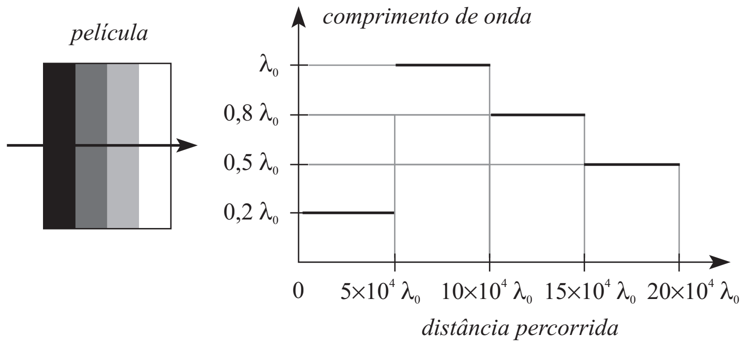
* $x_1 - f(y_1) = x_2 - f(y_2)$, de (i) segue que:

$f(y_1) = f(y_2)$, como f é bijetora, temos que $y_1 = y_2$.

$\therefore (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, daí g é injetora, de onde segue que é bijetora.

Alternativa E

Questão 16



Um raio de luz de freqüência 5×10^{14} Hz passa por uma película composta por 4 materiais diferentes, com características em conformidade com a figura acima. O tempo gasto para o raio percorrer toda a película, em ηs, é

A) $0{,}250$
B) $0{,}640$
C) $0{,}925$
D) $1{,}000$
E) $3{,}700$

Resolução:

Em todos os materiais a freqüência da onda será a mesma e sua velocidade pode então ser calculada da forma:

$$v_R = f\cdot\lambda_R\ ,$$

E o tempo para atravessar a película será:

$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \Delta t_4$, sendo $\Delta t = \dfrac{\Delta s}{v}$.

Logo temos:

$$\Delta t = \frac{l}{f\cdot\lambda_1} + \frac{l}{f\cdot\lambda_2} + \frac{l}{f\cdot\lambda_3} + \frac{l}{f\cdot\lambda_4}$$

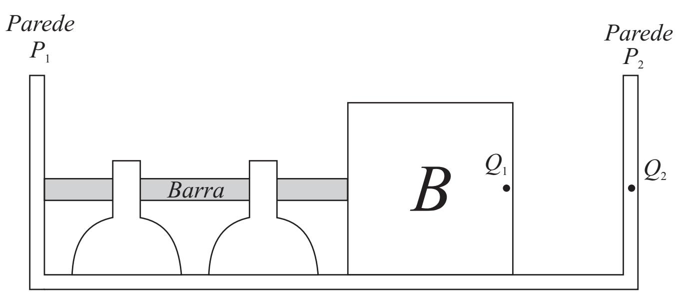
$$\Delta t = \frac{5\cdot10^4\cdot\lambda_0}{f\cdot0{,}2\cdot\lambda_0} + \frac{5\cdot10^4\cdot\lambda_0}{f\cdot\lambda_0} + \frac{5\cdot10^4\cdot\lambda_0}{f\cdot0{,}8\cdot\lambda_0} + \frac{5\cdot10^4\cdot\lambda_0}{f\cdot0{,}5\cdot\lambda_0}\text{ , com } f = 5\cdot10^{14}\text{ Hz}$$

$$\Delta t = 5\cdot10^{-10} + 1\cdot10^{-10} + 1{,}25\cdot10^{-10} + 2\cdot10^{-10} = \left(0{,}5+0{,}1+0{,}125+0{,}2\right)\cdot10^{-9}$$

$$\Delta t = 0{,}925\ \eta s\ .$$

Alternativa C

Questão 17



A figura representa uma barra metálica de comprimento $L = 12\,\text{m}$, inicialmente na temperatura de 20°C, exatamente inserida entre a parede P_1 e o bloco B feito de um material isolante térmico e elétrico. Na face direita do bloco B está engastada uma carga Q_1 afastada $20\,\text{cm}$ da carga Q_2 engastada na parede P_2. Entre as duas cargas existe uma força elétrica de F_1 newtons.

Substitui-se a carga Q_2 por uma carga $Q_3 = 2Q_2$ e aquece-se a barra até a temperatura de 270°C. Devido a esse aquecimento, a barra sofre uma dilatação linear que provoca o deslocamento do bloco para a direita. Nesse instante a força elétrica entre as cargas é $F_2 = 32F_1$.

Considerando que as dimensões do bloco não sofrem alterações e que não exista qualquer força elétrica entre as cargas e a barra, o coeficiente de dilatação térmica linear da barra em $°C^{-1}$, é:

A) $2,0\times10^{-5}$

B) $3,0\times10^{-5}$

C) $4,0\times10^{-5}$

D) $5,0\times10^{-5}$

E) $6,0\times10^{-5}$

Resolução:

As forças F_2 e F_1 podem então ser escritas de forma:

$F_2 = 32F_1$, ou, $\frac{kQ_1(2Q_2)}{d_2^2} = 32\cdot\frac{kQ_1\cdot Q_2}{d_1^2}$

Que resulta:

$d_1^2 = 16\cdot d_2^2$

$d_1 = 4d_2 \Rightarrow d_2 = 5\text{cm}$

A aproximação das cargas ocorreu devido à dilatação da barra:

$\Delta L = d_1 - d_2 = 20 - 5 = 15\text{cm}$

Então, para a dilatação escrevemos:

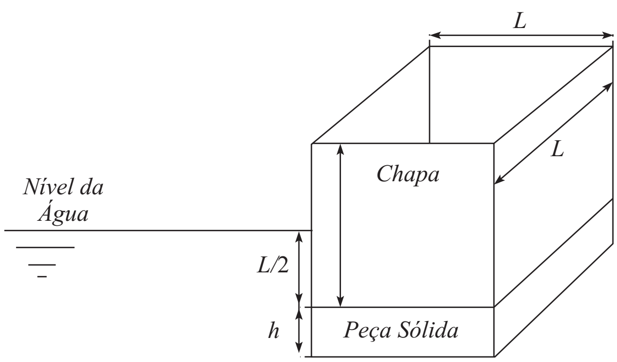
$\Delta L = L_0\cdot\alpha\cdot\Delta\theta$

$15\cdot10^{-2} = 12\cdot\alpha\cdot(270-20)$

$\alpha = 5\cdot10^{-5}\,°C^{-1}$

Alternativa D

Questão 18



Uma chapa de metal com densidade superficial de massa ρ foi dobrada, formando as quatro faces laterais de um cubo de aresta L. Na parte inferior, fixou-se uma peça sólida em forma de paralelepípedo com dimensões $h\times L\times L$ e massa específica μ_P, de maneira a compor o fundo de um recipiente. Este é colocado em uma piscina e 25% do seu volume é preenchido com água da piscina, de massa específica μ_a. Observa-se que em equilíbrio, o nível externo da água corresponde à metade da altura do cubo, conforme ilustra a figura. Neste caso, a dimensão h da peça sólida em função dos demais parâmetros é

A) $\frac{16\rho - L\mu_a}{4(\mu_a - \mu_p)}$

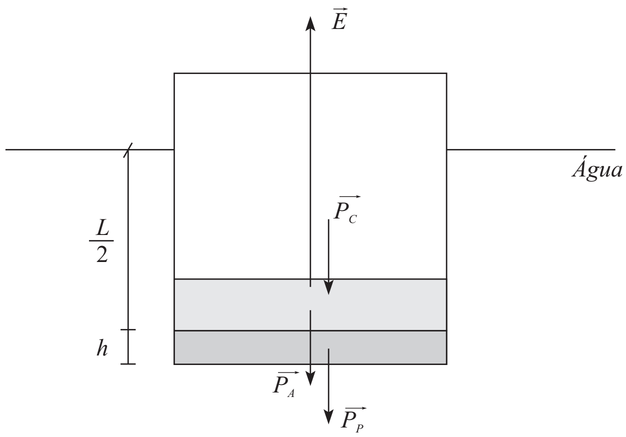
B) $\frac{8\rho - L\mu_a}{2(\mu_a - \mu_P)}$

C) $\frac{16\rho + L\mu_a}{2(\mu_a - \mu_P)}$

D) $\frac{8\rho + L\mu_a}{4(\mu_a - \mu_P)}$

E) $\frac{16\rho - L\mu_a}{2(\mu_a - \mu_P)}$

Resolução:



No equilíbrio, o empuxo do fluido deslocado deve ser igual à soma dos pesos de todas as massas que compõem o corpo (metal, peça sólida e água):

$$E = P_C + P_P + P_A$$

$$\mu_a \cdot g \cdot L^2 \cdot \left(\frac{L}{2} + h\right) = 4 \cdot \rho \cdot L^2 \cdot g + \mu_P \cdot g \cdot h \cdot L^2 + \mu_a \cdot g \cdot L^2 \cdot \frac{L}{4}$$

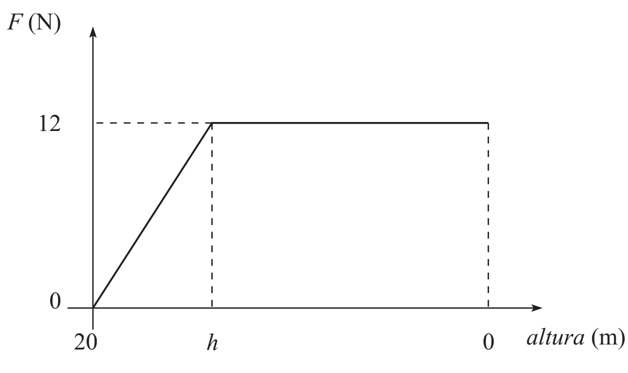
$$\mu_a\left(\frac{L}{2} + h\right) = 4\rho + \mu_p \cdot h + \mu_a \cdot \frac{L}{4}$$

$$h = (\mu_a - \mu_P) = 4\rho - \frac{\mu_a \cdot L}{4}$$

$$h = \frac{16\rho - L\mu_a}{4(\mu_a - \mu_P)}$$

Alternativa A

Questão 19



Um objeto com massa de $1\,\text{kg}$ é largado de altura de $20\,\text{m}$ e atinge o solo com velocidade de $10\,\text{m/s}$. Sabe-se que a força F de resistência do ar que atua sobre o objeto varia com a altura, conforme o gráfico acima. Considerando que $g = 10\,\text{m/s}^2$, a altura h, em metros, em que a força de resistência do ar passa a ser constante é

A) 4
B) 5
C) 6
D) 8
E) 10

Resolução:

Enquanto a partícula desce, o peso realiza trabalho motor e a resistência do ar, trabalho resistente; que pode ser calculado pela área do gráfico.

Assim, aplicando o TEC (Teorema da Energia Cinética):

$$\Delta E = W_R$$

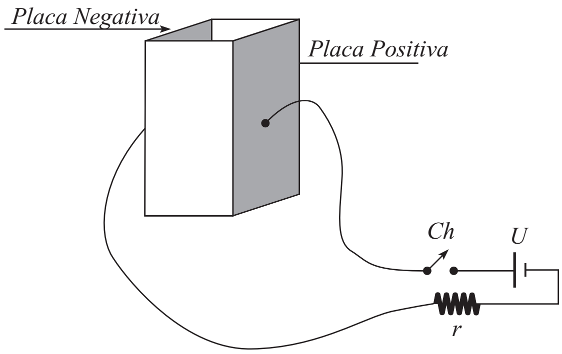
$$E_{cf} - E_{c0} = W_P - W_{AR}$$

$$\frac{mV_f^{\,2}}{2} = m \cdot g \cdot (20) - (20 + h) \cdot \frac{12}{2}$$

$$\frac{10^2}{2} = 200 - (20 + h) \cdot 6 \therefore h = 5\,\text{m}$$

Alternativa B

Questão 20



Um reservatório possui duas faces metálicas que se comportam como placas de um capacitor paralelo. Ao ligar a chave Ch, com o reservatório vazio, o capacitor fica com uma carga Q_1 e com uma capacitância C_1. Ao repetir a experiência com o reservatório totalmente cheio com um determinado líquido, a carga passa a ser Q_2 e a capacitância C_2. Se a relação Q_1 / Q_2 é $0{,}5$, a capacitância no momento em que o líquido preenche metade do reservatório é

A) C_1

B) $3/4\,C_2$

C) C_2

D) $3/2\,C_2$

E) $3/4\,C_1$

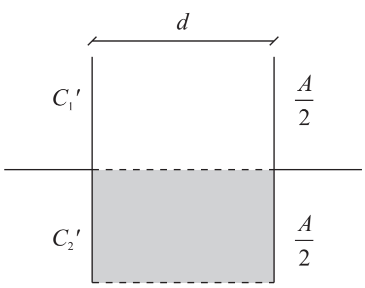
Resolução:

As capacitâncias C_1 e C_2 valem, respectivamente; $C_1 = \varepsilon_1 \cdot \frac{A}{d}$ e $C_2 = \varepsilon_2 \cdot \frac{A}{d}$.

Como no capacitor $C = \frac{Q}{U}$ e U é constante, temos:

$$Q = CU \quad \text{e} \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_1 U}{C_2 U} = \frac{\frac{\varepsilon_1 \cdot A}{d}}{\frac{\varepsilon_2 \cdot A}{d}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = 0{,}5 \therefore \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$$

Quando o líquido preenche o capacitor pela metade, podemos considerar dois capacitores em paralelo conforme a figura.



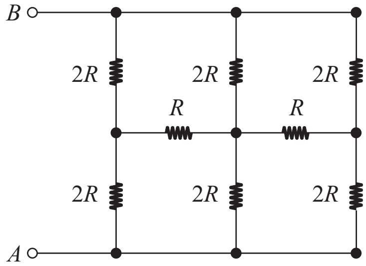
Assim a nova capacitância será:

$$C_f = C_1' + C_2' = \frac{\varepsilon_1 \cdot \left(A/2\right)}{d} + \frac{\varepsilon_2 \cdot \left(A/2\right)}{d}$$

$$C_f = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_1 \cdot A}{d} + \frac{2\varepsilon_1 \cdot A}{d} \right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot A}{d} = \frac{3}{2} \cdot C_1 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\varepsilon_2 \cdot A}{2 \cdot d} \right) = \frac{3}{4} \cdot C_2$$

Alternativa B

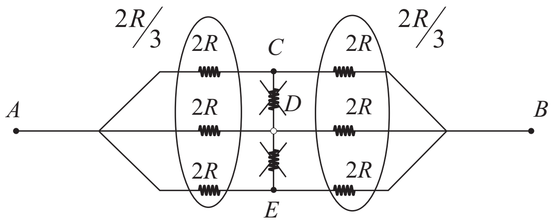
Questão 21



A resistência equivalente entre os terminais A e B da figura acima é

A) $1/3\ R$
B) $1/2\ R$
C) $2/3\ R$
D) $4/3\ R$
E) $2\ R$

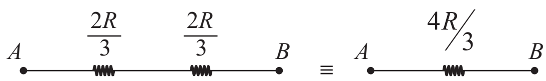
Resolução:
Podemos reescrever o circuito da seguinte forma:



Onde, pela simetria, $U_{AC} = U_{CB}$, $U_{AD} = U_{DB}$, $U_{AE} = U_{EB}$.

Assim, $V_C = V_D = V_E$ e resulta:

E resulta:



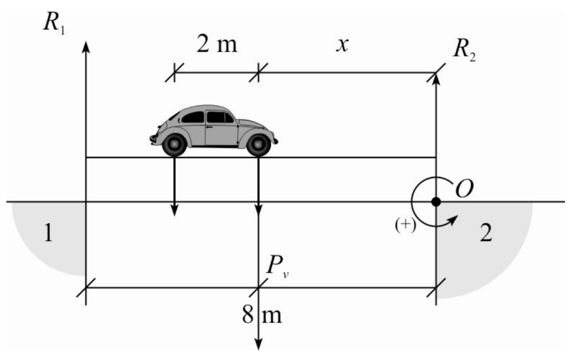
Alternativa D

Questão 22

Uma viga de $8{,}0\,\text{m}$ de comprimento, apoiada nas extremidades, tem peso de 40kN. Sobre ela, desloca-se um carro de 20kN de peso, cujos 2 eixos de roda distam entre si $2{,}0\,\text{m}$. No instante em que a reação vertical em um apoio é $27{,}5\text{kN}$, um dos eixos do carro dista, em metros do outro apoio

A) $1{,}0$
B) $1{,}5$
C) $2{,}0$
D) $2{,}5$
E) $3{,}0$

Resolução:



Supondo que o peso do carro esteja igualmente distribuído nos dois eixos, temos, no equilíbrio:

$$\sum \tau_o = 0$$

$$-R_1 \cdot (8) + \frac{P_C}{2} \cdot (x+2) + \frac{P_C}{2} \cdot x + P_V \cdot 4 - R_2 \cdot 0 = 0$$

$$-27{,}5 \cdot \text{k} \cdot 8 + 10\text{k} \cdot (x+2) + 10R \cdot x + 40\text{k} \cdot 4 = 0$$

$$-220 \cdot \text{k} + 20\text{k} \cdot x + 20\text{k} + 160\text{k} = 0$$

$$20x = 40$$

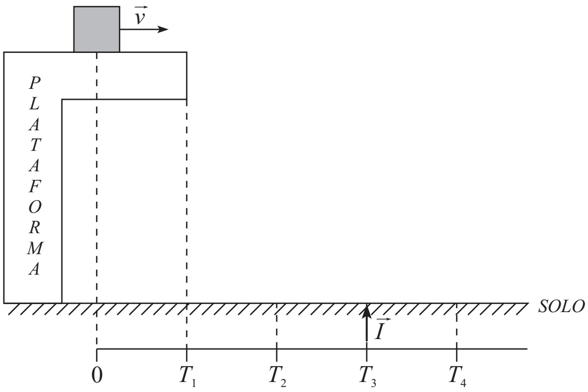
$$x = 2{,}0\,\text{m}$$

Então, a distância do outro eixo até o apoio 2 vale:

$$x = 2{,}0m$$

Alternativa C

Questão 23

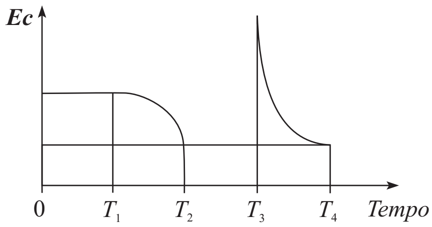


Na figura dada, o bloco realiza o movimento descrito a seguir:

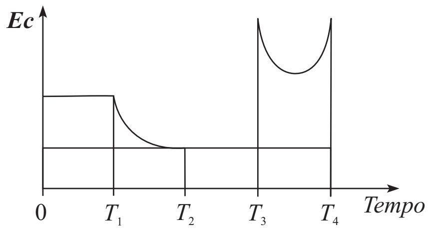
- Em $t = 0$, desloca-se para a direita, com velocidade constante;
- Em $t = t_1$, cai da plataforma;
- Em $t = t_2$, atinge o solo e continua a se mover para a direita, sem quicar;
- Em $t = t_3$, é lançado para cima, pela ação do impulso $\vec{I}$;
- Em $t = t_4$, volta a atingir o solo.

Nestas condições, a opção que melhor representa graficamente a energia cinética do bloco em função do tempo é:

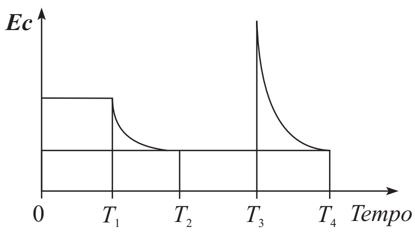
A)



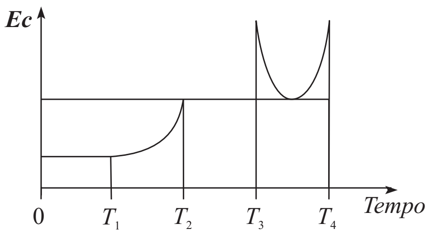
D)



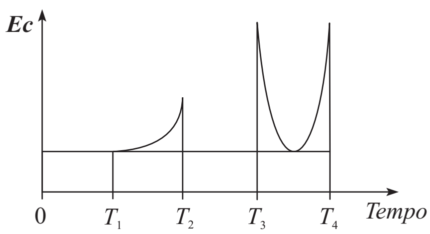
B)



E)



C)



Resolução:

1) De 0 a T_1: O vetor velocidade é constante e a energia vale,

$$E_1 = \frac{mv^2}{2}.$$

Assim, o gráfico é uma reta horizontal.

2) De T_1 a T_2: A velocidade horizontal é constante $\vec{v}$, mas a velocidade vertical varia com o tempo da forma:

$$v_y = 0 + gt.$$

Assim, a energia cinética total vale:

$$E_2 = \frac{m}{2} \cdot \left[v^2 + (gt)^2 \right],$$

que é uma parábola com concavidade voltada para cima.

3) De T_2 a T_3: Em $T = T_2$, o corpo não quica, então perde instantaneamente a componente v_y. Assim, até T_3 a energia é constante e vale:

$$E_3 = \frac{mv^2}{2}.$$

4) De T_3 a T_4: O corpo recebe o impulso $\vec{I}$ e adquire componente vertical da velocidade $v_{y_0} = \frac{I}{m}$.

A energia então vale:

$$E_4 = \frac{m}{2} \cdot \left[v^2 + \left(\frac{I}{m} - gt \right)^2 \right],$$

que é uma parábola com concavidade para cima, sendo que em $T = \frac{T_3 + T_4}{2}$ devemos ter $E_4 = \frac{mv^2}{2}$, já que $v_y = 0$.

Alternativa C

Questão 24

Considere o sistema acima, onde um objeto PP' é colocado sobre um carrinho de massa m que se move, em movimento harmônico simples e sem atrito, ao longo do eixo óptico de um espelho esférico côncavo de raio de curvatura R. Este carrinho está preso a uma mola de constante k fixada ao centro do espelho, ficando a mola relaxada quando o objeto passa pelo foco do espelho. Sendo x a distância entre o centro do carrinho e o fogo F, as expressões da freqüência w de inversão entre imagem real e virtual e do aumento M do objeto são

A) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $M = \frac{R}{2x}$

B) $w = \sqrt{\frac{m}{k}}$ e $M = \frac{R(R+2x)}{2x\left(\frac{R}{2}+x\right)}$

C) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $M = \frac{R(R+x)}{4x\left(\frac{R}{2}+x\right)}$

D) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $M = -\frac{2x}{R}$

E) $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$ e $M = \frac{R+2x}{4x\left(\frac{R}{2}-x\right)}$

Resolução:

A imagem passa de real para virtual quando o carrinho passa pelo foco que é a posição de equilíbrio . Assim, a freqüência de inversão é a mesma do sistema massa-mola.

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

O aumento pode ser calculado por:

$$M = \frac{i}{\theta} = \frac{-p'}{p}$$

onde: $\frac{2}{R} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{p}$ e $p = x + \frac{R}{2}$

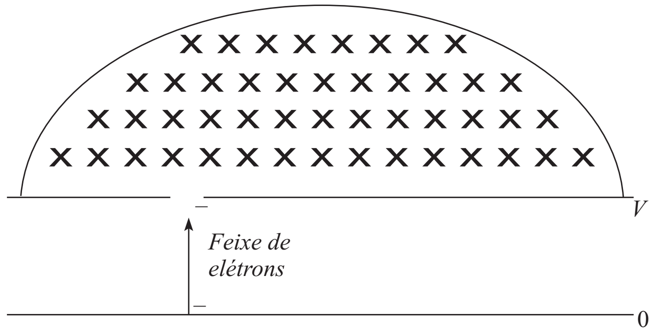
Assim:

$$\frac{1}{p'}=\frac{2}{R}-\frac{1}{x+R/2}=\frac{2x+R-R}{R\cdot\left(x+\frac{R}{2}\right)}=\frac{2x}{R\cdot\left(x+\frac{R}{2}\right)}\therefore p'=R\cdot\frac{\left(x+\frac{R}{2}\right)}{2x}$$

Por fim: $M=\dfrac{\dfrac{-R\cdot\left(x+R/2\right)}{2x}}{x+R/2}=-\dfrac{R}{2x}$

Alternativa A

Questão 25



Um feixe de elétrons passa por um equipamento composto por duas placas paralelas, com uma abertura na direção do feixe, e penetra em uma região onde existe um campo magnético constante. Entre as placas existe uma d.d.p. igual a V e o campo magnético é perpendicular ao plano da figura.

Considere as seguintes afirmativas:

I. O vetor quantidade de movimento varia em toda a trajetória.
II. Tanto o trabalho da força elétrica quanto o da força magnética fazem a energia cinética variar.
III. A energia potencial diminui quando os elétrons passam na região entre as placas.
IV. O vetor força elétrica na região entre as placas e o vetor força magnética na região onde existe o campo magnético são constantes.

As afirmativas corretas são apenas:

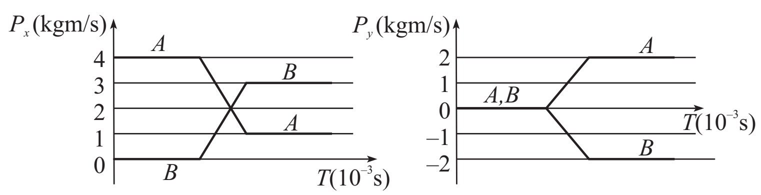
A) I e II
B) I e III
C) II e III
D) I, II e IV
E) II, III e IV

Resolução:

I. (V) Na região entre as placas o vetor quantidade de movimento varia em módulo, pois o movimento do elétron é acelerado.
II. (F) A força magnética, por ser perpendicular à velocidade, não realiza trabalho.
III. (V) A energia potencial elétrica diminui, pois a energia cinética aumenta.
IV. (F) O vetor força magnética, embora tenha módulo constante, varia em direção e sentido.

Alternativa B

Questão 26



Das partículas A e B de massas $m_A=0{,}1\text{kg}$ e $m_B=0{,}2\text{kg}$ sofrem colisão não frontal. As componentes x e y do vetor quantidade de movimento em função do tempo são apresentadas nos gráficos acima.

Considere as seguintes afirmativas:

I. A energia cinética total é conservada.

II. A quantidade de movimento total é conservada.
III. O impulso correspondente à partícula B é $2\mathrm{i}+4\mathrm{j}$.
IV. O impulso correspondente à partícula A é $-3\mathrm{i}+2\mathrm{j}$.

As afirmativas corretas são apenas:

A) I e II
B) I e III
C) II e III
D) II e IV
E) III e IV

Resolução:

I. (F)

$$E_{co} = \frac{m_A v_{Ax}^2}{2} = \frac{0{,}1 \cdot 40^2}{2} \qquad \varepsilon_{co} = 80\,\mathrm{J}$$

$$E_{cf} = E_{cA} + E_{cB}$$

$$E_{cf} = \frac{0{,}1\cdot 10^2}{2} + \frac{0{,}1\cdot 20^2}{2} + \frac{0{,}2\cdot 15^2}{2} + \frac{0{,}2\cdot 10^2}{2}$$

$E_{cf} = 57{,}5\,\mathrm{J}$ Sendo assim, a energia cinética não se conserva.

II. (V) Antes da colisão:

$$\left.\begin{array}{l} Q_{Ax} = 4{,}0\,\mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ Q_{Bx} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_x = 4{,}0\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{Ay} = 0 \\ Q_{By} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow Q_y = 0$$

Após a colisão:

$$\left.\begin{array}{l} Q_{Ax} = +1{,}0\,\mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ Q_{Bx} = +3{,}0\,\mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_x = 4{,}0\,\mathrm{kg}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{Ay} = +2{,}0\,\mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\ Q_{By} = -2{,}0\,\mathrm{kg}\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \end{array}\right\} \Rightarrow Q_y' = 0$$

A quantidade de movimento se conservou.

III. (F) $\vec{I} = \vec{I_x} + \vec{I_y}$

Além de que: $\vec{I}_x = \Delta\vec{Q}_x$ e $\vec{I}_y = \Delta\vec{Q}_y$

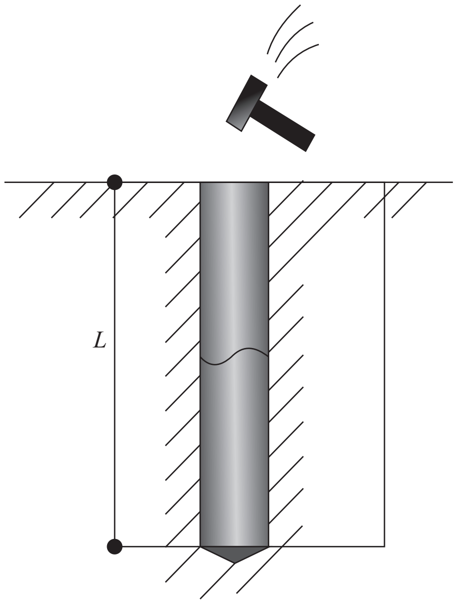
Sendo assim:

$\vec{I}_B = \Delta\vec{Q}_x + \Delta\vec{Q}_y = 3\vec{\mathrm{i}} - 2\,\vec{\mathrm{j}}$

IV. (V) $\vec{I}_A = \Delta\vec{Q}_x + \Delta\vec{Q}_y = -3\vec{\mathrm{i}} + 2\,\vec{\mathrm{j}}$

Alternativa D

Questão 27



Uma estaca de comprimento L de um determinado material homogênio foi cravada no solo. Suspeita-se que no processo de cravação a estaca tenha sido danificada, sofrendo possivelmente uma fisssura abrangendo toda sua seção transversal conforme ilustra a figura acima. Para tirar a dúvida, foi realizada uma percussão em seu topo com uma marreta. Após t_1 segundos da percussão , observou-se um repique (pulso) no topo da esta e, t_2 segundos após o primeiro repique, percebeu-se um segundo e último repique de intensidade significativa (também no topo da estaca), sendo $t_1 \neq t_2$.

Admitindo-se que a estaca esteja danificada em um único ponto, a distância do topo da estaca em que se encontra a fissura é

A) $\frac{Lt_1}{t_2}$

B) $\frac{Lt_1}{3t_2}$

C) $\frac{Lt_1}{t_1+t_2}$

D) $\frac{Lt_2}{t_1+t_2}$

E) $\frac{Lt_2}{2t_1}$

Resolução:

O primeiro repique reflete na fissura e demora um tempo total t_1:

$$v = \frac{2d}{t_1} \qquad (1)$$

O segundo reflete na base da estaca e demora um tempo total $t = t_1 + t_2$:

$$v = \frac{2L}{t_1+t_2} \qquad (2)$$

Igualando (1) e (2):

$$\frac{2d}{t_1} = \frac{2L}{t_1+t_2} \qquad \therefore \; d = \frac{Lt_1}{t_1+t_2}$$

Alternativa C

Questão 28

Ao analisar um fenômeno térmico em uma chapa de aço, um pesquisador constata que o calor transferido por unidade de tempo é diretamente proporcional à área da chapa e à diferença de temperatura entre as superfícies da chapa. Por outro lado, o pesquisador verifica que o calor transferido por unidade de tempo diminui conforme a espessura da chapa aumenta. Uma possível unidade da constante de proporcionalidade associada a este fenômeno no sistema SI é

A) $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-3} \cdot K^{-1}}$

B) $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s \cdot K}$

C) $\mathrm{m \cdot s \cdot K^{-1}}$

D) $\mathrm{m^2 \cdot s^{-3} \cdot K}$

E) $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1} \cdot K^{-1}}$

Resolução:

Do enunciado tem-se que:

$$\Phi = \mathbb{C} \cdot \frac{\mathrm{A}\,\Delta T}{L}$$

E escrevendo as grandezas conhecidas, temos:

$$[\Phi] = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$$

$$[\mathrm{A}] = \mathrm{m^2}$$

$$[\Delta T] = \mathrm{K}$$

$$[L] = \mathrm{m}$$

Então, substituindo :

$$\frac{\mathrm{kg}\,\cancel{\mathrm{m^2}}}{\mathrm{s^3}} = [\mathbb{C}] \cdot \frac{\cancel{\mathrm{m^2}}\,\mathrm{K}}{\mathrm{m}}$$

$$[\mathbb{C}] = \mathrm{kg\,m \cdot s^{-3} K^{-1}}$$

Alternativa A

Questão 29

Um planeta de massa m e raio r gravita ao redor de uma estrela de massa M em uma órbita circular de raio R e período T. Um pêndulo simples de comprimento L apresenta, sobre a superfície do planeta, um período de oscilação t.
Dado que a constante de gravitação universal é G e que a aceleração da gravidade, na superfície do planeta, é g, as massas da estrela e do planeta são, respectivamente:

A) $\dfrac{4\pi^2 r^2 R}{T^2 G}$ e $\dfrac{4\pi^2 L r^2}{t^2 G}$

B) $\dfrac{4\pi^2 R^3}{T^2 G}$ e $\dfrac{4\pi^2 L r}{t^2 G}$

C) $\dfrac{4\pi^2 R^3}{T^2 G}$ e $\dfrac{4\pi^2 L r^2}{t^2 G}$

D) $\dfrac{4\pi^2 r R^2}{T^2 G}$ e $\dfrac{4\pi^2 L^3}{t^2 G}$

E) $\dfrac{4\pi^2 r R^2}{T^2 G}$ e $\dfrac{4\pi^2 L^2 r}{t^2 G}$

Resolução:

Para o pêndulo no planeta temos:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{Lr^2}{Gm}} \therefore \frac{t^2}{4\pi^2} = \frac{Lr^2}{Gm} \Rightarrow m = \frac{4\pi^2 \cdot Lr^3}{Gt^2}$$

Para a órbita do planeta temos:

$$F_G = F_{CP} \Rightarrow G\frac{M\,\cancel{m}}{R^2} = \cancel{m} \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R \therefore M = \frac{4\pi^2 \cdot R^3}{GT^2}$$

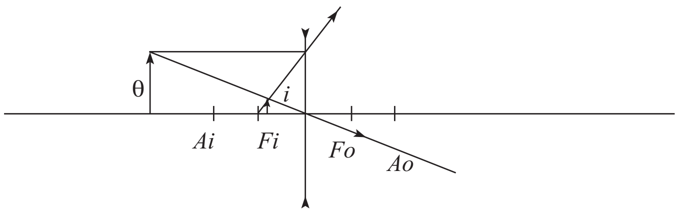
Alternativa C

Questão 30

Um corpo está a $40\,\text{cm}$ de distância de uma lente cuja distância focal é $-10\,\text{cm}$. A imagem deste corpo é

A) real e reduzida.
B) real e aumentada.
C) virtual e reduzida.
D) virtual e aumentada.
E) real e invertida.

Resolução:
A situação proposta é a seguinte:



Da figura obtida conclui-se que a imagem conjugada é virtual, direita e menor que o objeto.

Alternativa C

Questão 31

Considere as seguintes afirmativas:

I. A molécula de SO_2 é linear e possui hibridação sp.
II. O hexafluoreto de enxofre possui estrutura octaédrica.
III. Em virtude da posição do átomo de carbono na Tabela Periódica, pode-se afirmar que não existem compostos orgânicos contendo orbitais híbridos sp^3d ou sp^3d^2.
IV. O número total de orbitais híbridos é sempre igual ao número total de orbitais atômicos puros empregados na sua formação.

A afirmativas corretas são apenas:

A) I
B) I e III
C) I e IV
D) II e IV
E) II, III e IV

Resolução:

I. ERRADO. A molécula de SO_2 apresenta geometria angular e hibridação sp^2.

II. CORRETO. O hexafluoreto de enxofre (SF_6) apresenta 6 pares de elétrons ligantes ao redor do átomo central de enxofre, dispostos na forma octaédrica , determinando para a molécula geometria idêntica, ou seja, octaédrica.

III. ERRADO. Em compostos orgânicos do tipo $P(CH_3)_5$ - pentametil-fósforo e $S(CH_3)_6$ - hexametil-enxofre podemos encontrar átomos de fósforo e enxofre com hibridazação do tipo sp^3d e sp^3d^2, respectivamente.

IV. CORRETO. Considerando que a hibridação é o resultado da união de orbitais, serão produzidos tantos orbitais híbridos quantos forem orbitais envolvidos no processo .

Alternativa D

Questão 32

No processo de refino eletrolítico do cobre utilizam-se eletrodos deste metal e solução aquosa de sulfato de cobre (II). Neste processo é correto afirmar que

A) no catodo obtém-se cobre impuro e ocorre liberação de oxigênio.
B) no anodo obtém-se cobre puro e ocorre a liberação de hidrogênio.
C) o cobre é depositado no anodo e dissolvido no catodo.
D) o cobre é dissolvido no anodo e depositado no catodo.
E) ocorre apenas liberação de hidrogênio e oxigênio.

Resolução:
Durante o processo eletrólise aquosa do $CuSO_4$ (sulfato de cobre II), utilizando eletrodos de cobre, observa-se a ocorrência da oxidação do cobre metálico constituinte do anodo, caracterizando o seu desgaste (dissolução) e ao mesmo tempo, a redução dos íons cobre II - Cu^{2+} - no catodo, com conseqüente deposição de cobre metálico

Alternativa D

Questão 33

Uma massa x de $CaCO_3$ reagiu com 50 mL de HCl $0,20\text{ M}$ aquoso, sendo o meio reacional, posteriormente, neutralizado com 12 mL de $NaOH$ aquoso. Sabe-se que 20 mL desta solução foram titulados com 25 mL do HCl $0,20\text{ M}$ .A massa x de $CaCO_3$ é (Dados: massas atômicas $Ca = 40\text{ u.m.a.}$; $Ca = 12\text{ u.m.a.}$.; $O = 16\text{ u.m.a.}$.)

A) $0,07\text{ g}$
B) $0,35\text{ g}$
C) $0,70\text{ g}$
D) $3,50\text{ g}$
E) $7,00\text{ g}$

Resolução:
Sabendo que parte do HCl foi utilizado para reagir com o $CaCO_3$ e que outra parte foi neutralizado posteriormente por uma solução de $NaOH$, concluímos que há excesso de solução de HCl. Para que possamos determinar o excesso de HCl, temos que utilizar a relação entequiométrica da reação entre o HCl e o $NaOH$.
- Determinação da concentração da solução de $NaOH$ utilizada na neutralização do excesso de HCl:
Da titulação, temos:

$$1HCl + 1NaOH \longrightarrow 1NaCl + 1H_2O$$

25mL $\quad 20\text{mL}$
$0,2\text{M}$

$$0,2\text{ mol de }HCl \longrightarrow 1L\text{ de solução}$$
$$k \longrightarrow 0,025\text{ L de solução}$$

$$k = 0,05\text{ mol de }HCl$$

$$0,05\text{ mol de }NaOH \longrightarrow 0,02L\text{ de solução}$$
$$y \longrightarrow 1\text{ L de solução}$$
$$y = 0,25\text{ mol/L de }NaOH$$

- Determinação da quantidade de HCl em excesso.

$$0,25\text{ mol de }NaOH \longrightarrow 1L\text{ de solução}$$
$$z \longrightarrow 0,012\text{ L de solução}$$

$$z = 0,003\text{ mol de }NaOH$$

Logo, $0,003\text{ mol}$ de HCl equivale ao excesso
- Determinação da quantidade total de HCl:

$$0,2\text{ mol de }HCl \longrightarrow 1L\text{ de solução}$$
$$w \longrightarrow 0,05\text{ L de solução}$$

$$w = 0,01\text{ mol de }HCl$$

Sabendo que o excesso de HCl equivale $0,003\text{ mol}$, podemos afirmar que a quantidade de HCl que efetivamente reagiu com o $CaCO_3$ é dada por: $0,01 - 0,003 = 0,007\text{ mol}$
- Determinação da massa de $CaCO_3$:

$$1CaCO_3 + 2HCl \rightarrow 1CaCl_2 + 1H_2O + 1CO_2$$

Levando em consideração que a relação estequiométrica entre o $CaCO_3$ e o HCl é de 1 : 2, e que o número de mols do HCl é igual a $0,007\text{ mol}$, concluímos que o número de mols do $CaCO_3$ dever ser igual a $0,0035\text{ mol.}$ Sendo assim:

$$1\text{ mol de }CaCO_3 \longrightarrow 100\text{ g}$$
$$0,0035\text{ mol de }CaCO_3 \longrightarrow x$$
$$x = 0,35\text{ de }CaCO_3$$

Alternativa B

Questão 34

O osso humano é constituído por uma fase mineral e uma fase orgânica, sendo a primeira correspondente a cerca de 70% da massa óssea do ser humano. Dentre os minerais conhecidos, a hidroxiapatia, $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$, é o mineral de estrutura cristalina e estequiometria mais próxima à dos nanocristais constituintes da fase mineral dos tecidos ósseos.

Considere que os átomos de cálcio estão na fase mineral dos tecidos ósseos e que o esqueleto de um indivíduo corresponde a um terço do seu peso. O número de átomos de cálcio em uma pessoa de $60\ \text{kg}$ é

(Dados: massas atômicas $Ca = 40$ u.m.a. ; $P = 31$ u.m.a. ; $O = 16$ u.m.a. ; $H = 1$ u.m.a. ;

(Número de Avogadro = $6{,}02\times10^{23}$)

A) $8{,}39\times10^{24}$

B) $2{,}52\times10^{25}$

C) $8{,}39\times10^{25}$

D) $1{,}20\times10^{26}$

E) $2{,}52\times10^{26}$

Resolução:

Cálculo da massa óssea:

$$60\ \text{kg} \longrightarrow 1$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{3}$$
$$x = 20\ \text{kg}$$

Cálculo da parte mineral:

$$20\ \text{kg} \longrightarrow 100\%$$
$$y \longrightarrow 70\%$$
$$y = 14\ \text{kg}$$

Cálculo do número de átomos de cálcio.

Sabendo que a massa molar da hidroxiapatita é igual a:

$$Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2 = 40\cdot10 + 95\cdot6 + 17\cdot2 = 400 + 570 + 34 = 1004\ \text{g/mol}$$

$$1004\ \text{g de } Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2 \longrightarrow 10\cdot6{,}02\cdot10^{23}\ \text{átomos de } Ca$$
$$14000\ \text{g de } Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2 \longrightarrow z$$
$$z = 8{,}39\cdot10^{25}\ \text{átomos de } Ca$$

Alternativa C

Questão 35

Foram introduzidos 10 mols de uma substância X no interior de um conjunto cilindro-pistão adiabático, sujeito a uma pressão constante de $1\ \text{atm}$. X reage espontânea e irreversivelmente segundo a reação:

$$X(s) \rightarrow 2Y(g) \qquad \Delta H = -200\ \text{cal}$$

Considere que a temperatura no início da reação é $300\ K$ e que as capacidades caloríficas molares das substâncias X e Y são constantes e iguais a $5{,}0\ \text{cal}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot L^{-1}$ e $1{,}0\ \text{cal}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, respectivamente. O volume final do conjunto cilindro-pistão é

(Dado: $R = 0{,}082\ \text{atm}\cdot\text{L}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{L}^{-1}$)

A) $410{,}0\ \text{L}$

B) $492{,}0\ \text{L}$

C) $503{,}4\ \text{L}$

D) $656{,}0\ \text{L}$

E) $820{,}0\ \text{L}$

Resolução:
1) Cálculo do número de mols de y formado.

$1\,X_{(s)} \longrightarrow 2\,Y_{(g)}$

1 mol _______ 2 mol

10 mol _______ x

$x = 20 \text{ mol}$

2) Cálculo do calor liberado na reação

$1X \longrightarrow 2Y \qquad \Delta H = -200 \text{ cal}$

$1 \text{ mol}(X)$ _______ 200 cal

$10 \text{ mol}(X)$ _______ z

$z = 2000 \text{ cal}$

3) Cálculo da variação de temperatura (ao final considerar apenas o composto Y)
a) Variação da temperatura

$Q = nC\Delta T$

$2000 \text{ cal} = 20(1)\Delta T \;\therefore\; \Delta T = 100\ K$

b) Temperatura final

$\Delta T = T_f - T_i$

$100 = T_f - 300$

$T_f = 400K$

4) Cálculo do volume final

$PV = nRT$

$1\,V = 20 \cdot 0{,}082 \cdot 400$

$V = 656\ L$

Alternativa D

Questão 36

Assinale a alternativa correta.

A) Um veículo de testes para redução de poluição ambiental, projetado para operar entre $-40\ ^{o}\text{C}$ e $50\ ^{o}\text{C}$, emprega H_2 e O_2, os quais são estocados em tanques a 13 MPa. Pode-se afirmar que a lei dos gases ideais não é um aproximação adequada para o comportamento dos gases no interior dos tanques. (Dado: $1 \text{ atm} = 101{,}3 \text{ kPa}$).
B) A pressão de vapor de um líquido independe da temperatura.
C) Um recipiente de 500 mL, inicialmente fechado e contendo um líquido em equilíbrio com seu vapor, é aberto. Pode-se afirmar que a pressão de vapor do líquido aumentará.
D) Na equação $\text{PV} = \text{nRT}$, o valor numérico de R é constante e independe do sistema de unidades empregado.
E) De acordo com o princípio de Avogadro, pode-se afirmar que, dadas as condições de temperatura e pressão, o volume molar gasoso depende do gás considerado.

Resolução:
Para que um determinado gás apresente um comportamento aproximado de um gás ideal é necessário que a temperatura seja a mais elevada possível e a pressão seja a mais baixa possível.

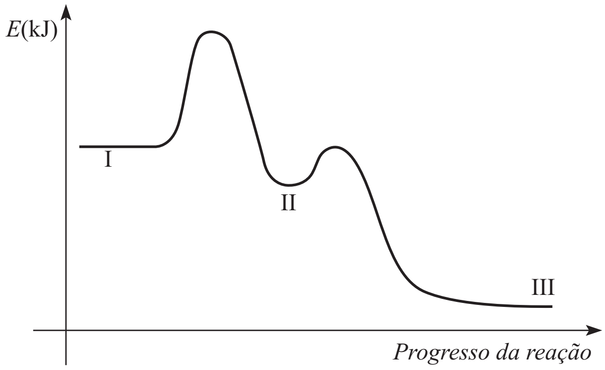
Alternativa A

Questão 37

Considere a seqüência de reações e o perfil energético associados ao processo de oxidação do dióxido de enxofre.

Etapa 1 (elementar): $SO_2(g) + NO_2(g) \rightarrow SO_3(g) + NO(g)$

Etapa 2: $2NO(g) + O_2(g) \rightarrow 2NO_2(g)$



A alternativa que apresenta corretamente os compostos no estágio II, o catalisador e a lei de velocidade para a reação global é

	Estágio II	Catalisador	Lei de Velocidade
A)	NO , O_2	NO	$k[SO_2]^2[O_2]$
B)	SO_3 , NO , O_2	NO_2	$k[SO_2]^2[O_2]$
C)	SO_3 , NO , O_2	NO_2	$k[SO_2][O_2]$
D)	NO , O_2	NO	$k[SO_2][NO_2]$
E)	SO_3 , NO , NO_2	O_2	$k[SO_2][NO_2]$

Resolução:
Compostos do estágio II: NO , O_2 e SO_3
Catalisador: NO_2

$$SO_2 + NO_2 \longrightarrow SO_2 + \cancel{NO}$$
$$(\div 2) \quad 2\cancel{NO} + 1O_2 \longrightarrow 2NO_2$$

$$SO_2 + \frac{1}{2}\,O_2 \longrightarrow SO_3$$

$v =$ depende da etapa lenta
$v = k[SO_2]^1[NO_2]^1$

Alternativa C

Questão 38

Assinale a alternativa correta.

A) Nas reações de decaimento radioativo, a velocidade de reação independe da concentração de radioisótopo e, portanto, pode ser determinada usando-se apenas o tempo de meia vida de isótopo.

B) O decaimento nuclear de ${}^{238}_{92}U$ pode gerar ${}^{206}_{82}Pb$ através da emissão de 8 partículas α e 6 partículas β.

C) A vulcanização é o processo usado para aumentar a rigidez de elastômeros por intermédio da hidrogenação das suas insaturações.

D) Copolímeros são polímeros formados pela reação de dois monômeros diferentes, com eliminação de uma substância mais simples.

E) O craqueamento é o processo que tem por objetivo "quebrar" as frações mais pesadas de petróleo gerando frações mais leves. Durante o craqueamento, são produzidos hidrocarbonetos de baixa massa molecular, como o etano e o propano. Estas moléculas são usadas como monômeros em uma variedade de reações para formar plásticos e outros produtos químicos.

Resolução:
$${}^{238}_{92}U \longrightarrow x\ {}^{4}_{2}\alpha + y\ {}^{0}_{-1}\beta + {}^{206}_{82}Pb$$
Balanço de massa
$238 = 4x + y(0) + 206$
$32 = 4x$
$x = 8$ partículas α

Balanço de carga

$92 = 2x + (-1)y + 82$

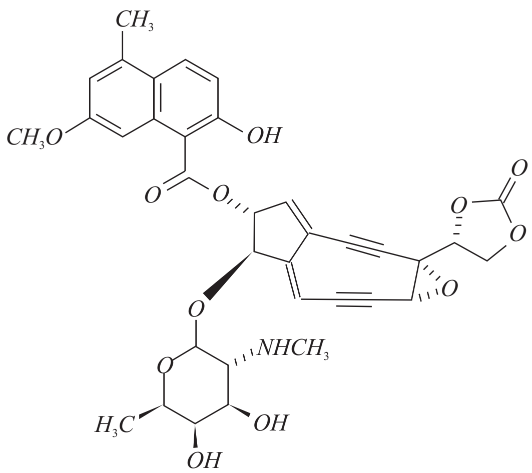
$10 = 2(8) - y$

$y = 6$ partículas β

Alternativa B

Questão 39

A neocarzinostatina é uma molécula da família das enediinas que são produtos naturais isolados de microrganismos e apresentam poderosa atividade anti-tumoral, por serem capazes de agir como intercalantes nas moléculas de DNA, interrompendo, dessa forma, o rápido crescimento celular característico das células tumorais.



Analisando a estrutura da neocarzinostatina acima, pode-se afirmar que esta forma canônica da mol

A) 256 isômeros ópticos e 11 ligações π.

B) 512 isômeros ópticos e 11 ligações π.

C) 256 isômeros ópticos e 13 Ligações π.

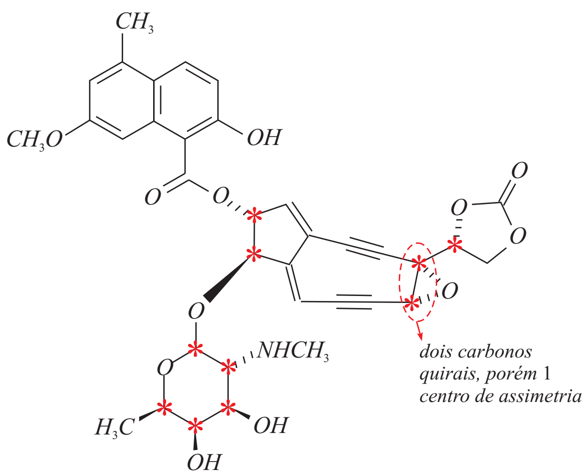
D) 512 isômeros ópticos e 13 ligações π.

E) 1024 isômeros ópticos e 13 ligações π.

Resolução:

De acordo com a representação, temos 10 carbonos quirais (estereogêneos), mas somente 9 centros de assimetria.

Observação: Os dois carbonos quirais da função epóxi só contribuem com um centro de assimetria.



Logo:

$n = 9$, carbonos quirais

$I = 2^n \longrightarrow I = 2^9 \longrightarrow I = 512$ isômeros ópticos

Número de ligações $pi = 13$

Alternativa D

Questão 40

Assinale a alternativa correta.

A) Os carboidratos, também conhecidos como glicídios, são ésteres de ácidos graxos superiores.
B) Os carboidratos mais simples são os monossacarídeos que, em virtude de sua simplicidade estrutural, podem ser facilmente hidrolisados.
C) Os lipídios são macromoléculas altamente complexas, formadas por centenas ou milhares de ácidos graxos que se ligam entre si por intermédio de ligações peptídicas.
D) As enzimas constituem uma classe especial de glicídios indispensável à vida, pois atuam como catalisadores em diversos processos biológicos.
E) A seqüência de aminoácidos em uma cadeia protéica é denominada estrutura primária da proteína.

Resolução:
a) Carboidratos não são ésteres.
b) Monossacarídeos não sofrem hidrólise.
c) Lipídios não se ligam por intermédio de ligações peptídicas.
d) As enzimas não são glicídios.
e) A seqüência de aminoácidos em uma cadeia protéica é denominada estrutura primária da proteína.

Alternativa E

Professores:

Física
Rodrigo Bernadelli
Walfredo

Matemática
Marcelo
Manim
Ney Marcondes

Química
Duda
Dalton
Neto
Tasso
Thé

Colaboradores
Aline Alkmin
Anderson (IME)
Henrique
José Diogo
Orlando (IME)
Paula Esperidião
Pedro Gonçalves

Digitação e Diagramação
Antônio A. Vitor
Nayara
Nathália Meyer
Plínio Rosa
Val Pinheiro

Desenhistas
Isabella
Leandro Bessa
Vinicius Ribeiro

Projeto Gráfico
Vinicius Ribeiro

Assistente Editorial
Alicio Roberto

Supervisão Editorial
Alicio Roberto
Bruno Werneck
Rodrigo Bernadelli
Marcelo Moraes

A ***Resolução Comentada*** *das provas do IME poderá ser obtida diretamente no*

OLIMPO *Pré-Vestibular, ou pelo telefone* ***(62) 3251 – 9009***

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

opirus
EDITORA

olimpo