NOTAÇÕES

$\mathbb{R}$	: conjunto dos números reais
$\mathbb{N}$	: conjunto dos números naturais
$\mathbb{C}$	: conjunto dos números complexos
i	: unidade imaginária: $i^2 = -1$
$\lvert z \rvert$	: módulo do número $z \in \mathbb{C}$
det A	: determinante da matriz A
d (A, B)	: distância do ponto A ao ponto B
d (P, r)	: distância do ponto P à reta r
$\overline{AB}$	: segmento de extremidades nos pontos A e B
$\hat{A}$	: medida do ângulo do vértice $\hat{A}$
$[a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x \leq b\}$
$[a, b[$	$= \{x \in \mathbb{R} : \alpha \leq x < b\}$
$]a, b]$	$= \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x \leq b\}$
$]a,b[$	$= \{x \in \mathbb{R} : \alpha < x < b\}$
$(f \circ g)(x)$	$= f(g(x))$
$X \setminus Y$	$= \{x \in X \text{ e } x \notin Y\}$
$\sum_{k=0}^{n} a_k$	$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, sendo n inteiro não negativo

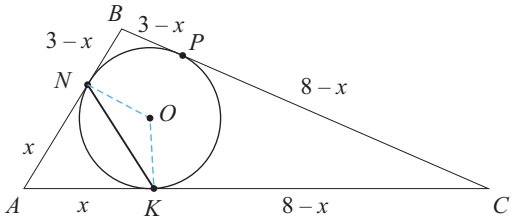
Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

Questão 01

Os lados de um triângulo de vértices A,Be C medem AB= 3 cm, BC= 7 cm e CA = 8 cm. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto N e o lado $\overline{CA}$ no ponto K. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$,em cm, é

A) ( ) 2 .
B) ( ) $2\sqrt{2}$.
C) ( ) 3 .
D) ( ) $2\sqrt{3}$.
E) ( ) $\frac{7}{2}$.

Comentário:



Seja $AN = x$. Por Tangência: $AK = x$.

Sabendo as medidas dos lados e usando tangência:

$$BN = BP = 3 - x$$
$$Ck = CP = 8 - x$$

Como

$$BC = 7$$
$$BP + PC = BC$$
$$3 - x + 8 - x = 7 \rightarrow \underline{x = 2}$$

Aplicando Lei dos Cossenos no ΔABC (ângulo $B\hat{A}C$):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\theta$$
$$49 = 9 + 64 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos\theta$$
$$48\cos\theta = 24 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 60^{\circ}$$

Como ΔANK é isósceles com $\theta = 60^{\circ} \Rightarrow \Delta ANK$ é equilátero.

Portanto, $NK = x = 2$

Alternativa A

Questão 02

Se x é um número real que satisfaz $x^3 = x + 2$, então x^{10} é igual a

A) ( ) $5x^2 + 7x + 9$.
B) ( ) $3x^2 + 6x + 8$.
C) ( ) $13x^2 + 16x + 12$.
D) ( ) $7x^2 + 5x + 9$.
E) ( ) $9x^2 + 3x + 10$.

Comentários:

Tem-se $x^3 = x + 2$. Portanto,

$$x^{10} = x \cdot x^9 = x \cdot \left(x^3\right)^3 = x \cdot (x+2)^3 =$$
$$= x\left(x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 4 + 8\right) =$$
$$= x\left(x^3 + 6x^2 + 12x + 8\right) =$$
$$= x\left(x + 2 + 6x^2 + 12x + 8\right) =$$
$$= x\left(6x^2 + 13x + 10\right) =$$
$$= 6x^3 + 13x^2 + 10x =$$
$$= 6(x+2) + 13x^2 + 10x =$$
$$= 6x + 12 + 13x^2 + 10x =$$
$$= 13x^2 + 16x + 12$$

Alternativa C

Questão 03

Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então $a + b$ é

A) ( ) 2.
B) ( ) 3.
C) ( ) 4.
D) ( ) 5.
E) ( ) 6.

Comentários:

(a,b) inteiros e em PG de razão $\frac{1}{2} \Rightarrow b = a \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$

Termo geral de binômio $(x+y)^n : T_{p+1} = \binom{n}{p} x^{n-p} \cdot y^p$

Logo, binômio

$$\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12} \Rightarrow T_{p+1} =$$
$$= \binom{12}{p} (ax)^{12-p} \cdot \left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^p =$$
$$= \binom{12}{p} a^{12-p} \cdot (-b)^p \cdot \frac{(x)^{12-p}}{(x)^{\frac{p}{2}}}$$

Termo independente de x

$$\Rightarrow 12 - p = \frac{p}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{3p}{2} = 12 \Rightarrow p = 8$$

Tem-se, portanto,

$$T_9 = \binom{12}{8} a^4 \cdot (-b)^8 = 7920$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{12} \cdot 11 \cdot \cancel{10} \cdot 9}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2} \cdot a^4 \cdot b^8 = 79\cancel{20}$$

Como

$$a = 2b \Rightarrow \cancel{11} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{16} b^{12} = \cancel{11} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{16}$$
$$b^{12} = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a = 2 \rightarrow a + b = 3$$

Alternativa B

Questão 04

Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = a\,x + b$ e $g(x) = c\,x + d$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$ e $c \neq 0$. Se $f^{-1} o\, g^{-1} = g^{-1} o\, f^{-1}$, então uma relação entre as constantes a, b, c e d é dada por

A) ( ) $b + ad = d + bc$.
B) ( ) $d + ba = c + db$.
C) ( ) $a + db = b + cd$.
D) ( ) $b + ac = d + ba$.
E) ( ) $c + da = b + cd$.

Comentários:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow x = a \cdot f^{-1}(x) + b \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$$
$$g(x) = cx + d \Rightarrow x = c \cdot g^{-1}(x) + d \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x - d}{c}$$
$$f^{-1} \text{o}\, g^{-1} = g^{-1} \text{o}\, f^{-1} \Rightarrow \frac{\left(\frac{x-d}{c}\right) - b}{a} = \frac{\left(\frac{x-b}{a}\right) - d}{c} \Rightarrow \frac{x - d - bc}{\cancel{a}\,\cancel{c}} =$$
$$= \frac{x - b - ad}{\cancel{a}\,\cancel{c}} \Rightarrow b + ad = d + bc$$

Alternativa A

Questão 05

Sejam $x_1, \ldots, x_5$ e $y_1, \ldots, y_5$ números reais arbitrários e A = (a_{ij}) uma matriz 5 x 5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j$, $1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

A) ( ) 1.
B) ( ) 2.
C) ( ) 3.
D) ( ) 4.
E) ( ) 5.

Comentários:

Tem-se que

$$A = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 & x_1 + y_3 & x_1 + y_4 & x_1 + y_5 \\ x_2 + y_1 & x_2 + y_2 & x_2 + y_3 & x_2 + y_4 & x_2 + y_5 \\ x_3 + y_1 & x_3 + y_2 & x_3 + y_3 & x_3 + y_4 & x_3 + y_5 \\ x_4 + y_1 & x_4 + y_2 & x_4 + y_3 & x_4 + y_4 & x_4 + y_5 \\ x_5 + y_1 & x_5 + y_2 & x_5 + y_3 & x_5 + y_4 & x_5 + y_5 \end{bmatrix}$$

Representando por $|A|$ o determinante da matriz A, adicionando-se, às linhas 2, 3, 4 e 5, o produto da linha 1 por -1, tem-se que

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_1+y_3 & x_1+y_4 & x_1+y_5 \\ x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 & x_3-x_1 \\ x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 & x_4-x_1 \\ x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 & x_5-x_1 \end{vmatrix}$$

Adicionando-se, agora, às colunas 2, 3, 4 e 5, o produto da primeira coluna por -1, tem-se que

$$|A| = \begin{vmatrix} x_1+y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_4-y_1 & y_5-y_1 \\ x_2-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5-x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Com isso, conclui-se que o determinante de A é zero, o que significa que a matriz A não tem característica 5.

Realizando-se as mesmas operações, justificaria-se que o determinante de qualquer submatriz de ordem 4 e qualquer submatriz de ordem 3 também seria igual a zero, o que implica que a característica não é 4 e nem 3.

Agora, sendo

$$X = \begin{bmatrix} x_i+y_j & x_i+y_{j+1} \\ x_{i+1}+y_j & x_{i+1}+y_{j+1} \end{bmatrix},$$

observa-se que

$$|X| = \begin{vmatrix} x_i+y_j & y_{j+1}-y_j \\ x_{i+1}-x_i & 0 \end{vmatrix},$$

ou ainda,

$$|X| = -(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j).$$

Considerando que $x_1, x_2, \ldots, x_5$ e $y_1, y_2, \ldots, y_5$ são arbitrários, $|X|$ não é, necessariamente, igual a zero. Assim, o maior valor possível de r é 2.

Alternativa B

Questão 06

Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo $m > n$. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é 15/11. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

A) ( ) 2 e 11.
B) ( ) 3 e 10.
C) ( ) 4 e 9.
D) ( ) 5 e 8.
E) ( ) 6 e 7.

Comentários:

O número de quadriláteros coincide com o número de escolhas de dois pontos de r e dois pontos de s. Desse modo, o número de quadriláteros é

$$C_{m,2} \cdot C_{n,2} = \frac{m \cdot (m-1) \cdot n \cdot (n-1)}{4}.$$

O número de triângulos coincide com o número de escolhas de dois pontos de r e um ponto de s mais o número de escolhas de um ponto de r e dois pontos de s. Desse modo, o número de triângulos é

$$C_{m,2} \cdot C_{n,1} + C_{m,1} \cdot C_{n,2} = \frac{m \cdot n \cdot (m+n-2)}{2}.$$

Com isso,

$$\frac{\dfrac{m\cdot(m-1)\cdot n\cdot(n-1)}{4}}{\dfrac{m\cdot n(m+n-2)}{2}}=\frac{15}{11},$$

ou ainda,

$$11\cdot(m-1)\cdot(n-1)=30\cdot(m+n-2).$$

Considerando que $n=13-m$,

$$m^2-13m+42=0,$$

o que implica $m=6$ ou $m=7$.

Com $m=6$, $n=7$ e, com $m=7$, $n=6$. Assim, já que $m>n$, $n=6$ e $m=7$.

Alternativa E

Questão 07

Considere a definição: duas circunferências são *ortogonais* quando se interceptam em dois pontos distintos e nesses pontos suas tangentes são perpendiculares. Com relação às circunferências $C_1 : x^2 + (y + 4)^2 = 7$, $C_2 : x^2 + y^2 = 9$ e $C_3 : (x- 5)^2 + y^2 = 16$, podemos afirmar que

A) ( ) somente C_1 e C_2 são ortogonais.
B) ( ) somente C_1 e C_3 são ortogonais.
C) ( ) C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.
D) ( ) C_1, C_2 e C_3 são ortogonais duas a duas.
E) ( ) não há ortogonalidade entre as circunferências.

Comentários:

O centro e o raio da circunferência C_1 são, respectivamente, $O_1=(0,-4)$ e $R_1=\sqrt{7}$.

O centro e o raio da circunferência C_2 são, respectivamente, $O_2=(0,0)$ e $R_2=3$.

O centro e o raio da circunferência C_3 são, respectivamente, $O_3=(5,0)$ e $R_3=4$.

Considerando que

$$d(O_1,O_2)<R_1+R_2 \text{ e } [d(O_1,O_2)]^2=R_1^2+R_2^2,$$

C_2 é ortogonal a C_1.
Considerando que

$$d(O_2,O_3)<R_2+R_3 \text{ e } [d(O_2,O_3)]^2=R_2^2+R_3^2,$$

C_2 é ortogonal a C_3.
Considerando que

$$d(O_1,O_3)<R_1+R_3 \text{ e } [d(O_1,O_3)]^2>R_1^2+R_3^2,$$

C_1 e C_3 não são ortogonais.
Assim, C_2 é ortogonal a C_1 e a C_3.

Alternativa C

Questão 08

As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

A) ( ) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

B) ( ) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

C) ( ) $\sqrt{2}$

D) ( ) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$

E) ( ) $3\sqrt{2}$

Comentários:

Tem-se que

$$1+Z+Z^2+...+Z^7=\frac{Z^8-1}{Z-1},$$

Com $Z \neq 1$.

Disso,

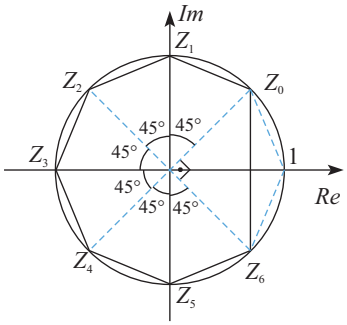
$$\frac{Z^8-1}{Z-1}=0,$$

Com $Z \neq 1$. Isso implica

$$Z=\sqrt[8]{1},$$

Com $Z \neq 1$.

A figura ilustra as representações geométricas das sete raízes do polinômio.



Da figura, conclui-se que a área do polígono equivale à área de um triângulo retângulo de catetos medindo 1 mais as áreas de seis triângulos isósceles de laterais medindo 1 e ângulo entre elas medindo 45°.

Assim, a área do polígono é

$$S=\frac{1\cdot 1}{2}+6\cdot\frac{1\cdot 1\cdot sen\,45^{\circ}}{2}=\frac{1+3\sqrt{2}}{2}.$$

Alternativa D

Questão 09

Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

A) ( ) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{1}{2}$.

B) ( ) $\frac{1}{2}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 1$

C) ( ) $1<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq\frac{3}{2}$

D) ( ) $\frac{3}{2}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 2$

E) ( ) $2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

Comentários:

Tem-se que

$$\frac{1}{a}=\log_\pi 2 \text{ e } \frac{1}{b}=\log_\pi 5.$$

Com isso,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\log_\pi 10.$$

Tem-se, ainda, que

$$\pi<\sqrt{10},$$

o que implica

$$\log_{10}\pi<\log_{10}\sqrt{10},$$

Ou ainda,

$$\log_\pi 10>\log_{\sqrt{10}}10.$$

Considerando que

$$\log_\pi 10=\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \text{ e } \log_{\sqrt{10}}10=2,$$

Conclui-se que

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}>2.$$

Alternativa E

Questão 10

O lugar geométrico das soluções da equação $x^2 + bx + 1 = 0$, quando $|b| < 2$, $b \in \mathbb{R}$, é representado no plano complexo por

A) ( ) dois pontos.
B) ( ) um segmento de reta.
C) ( ) uma circunferência menos dois pontos.
D) ( ) uma circunferência menos um ponto.
E) ( ) uma circunferência.

Comentários:

Com $|b|< 2$, o discriminante da equação é negativo, o que indica que as soluções serão imaginárias.
Sendo

$$x=\alpha+\beta i, \text{ com } \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \text{ tem-se que}$$
$$(\alpha+\beta i)^2+b\cdot(\alpha+\beta i)+1=0,$$

Ou ainda,

$$(\alpha^2-\beta^2+b\alpha+1)+(2\alpha\beta+b\beta)i=0.$$

Disso,

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta^2+b\alpha+1=0\\ \beta(2\alpha+b)=0\end{cases}$$

Com $\beta\cdot(2\alpha+b)=0$, $\beta=0$ ou $\alpha=-\frac{b}{2}$.Com $\beta=0$ e $\alpha^2-\beta^2+b\alpha+1=0$, $\alpha^2+b\alpha+1=0$, mas esta equação tem nenhuma solução real. Isso implica que não há solução para $\beta=0$.

Com $\alpha=-\frac{b}{2}$ e $\alpha^2-\beta^2+b\alpha+1=0$,

$$\beta^2=\frac{4-b^2}{4}$$

ou ainda,

$$|\beta|=\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}.$$

Com isso, a equação $x^2+b\alpha+1=0$, com $|b|<2$, tem duas soluções com afixos $\left(-\frac{b}{2},\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}\right)$ e $\left(-\frac{b}{2},-\frac{\sqrt{4-b^2}}{2}\right)$.

Sendo

$$\alpha=-\frac{b}{2} \text{ e } \beta=-\frac{\sqrt{4-b^2}}{2} \text{ ou } \alpha=-\frac{b}{2} \text{ e } \beta=-\frac{\sqrt{4-b^2}}{2},$$

Tem-se que

$$\alpha^2+\beta^2=1.$$

Como $\alpha=-\frac{b}{2}$ e $-2<b<2$, conclui-se que $-1<\alpha<1$. Assim, o lugar geométrico das soluções da equação é definido conjunto

$$\left\{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2:\alpha^2+\beta^2=1,-1<\alpha<1\right\},$$

que corresponde à circunferência com centro na origem e raio 1, exceto os pontos (-1,0) e (1,0).

Alternativa C

Questão 11

Em um triângulo de vértices A, B e C são dados $\hat{B}=\pi/2,\hat{C}=\pi/3$ e o lado BC = 1 cm. Se o lado $\overline{AB}$ é o diâmetro de uma circunferência, então a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência, em cm^2, é

A) ( ) $\frac{\pi}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{16}$

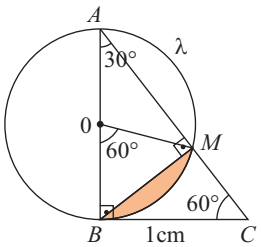
B) ( ) $\frac{5\sqrt{3}}{5}-\frac{\pi}{8}$

C) ( ) $\frac{5\pi}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{16}$

D) ( ) $\frac{5\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{8}$

E) ( ) $\frac{5\pi}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{16}$

Comentários:



I) $\hat{B}=\frac{\pi}{2},\hat{C}=\frac{\pi}{3}$ e $\hat{A}=\frac{\pi}{6}$,pois $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$

II) Do Δ ABC temos que $\overline{AB}=\sqrt{3}$ cm e $\overline{AC}=2$ cm

III) Seja M $\in \overline{AC}$ tal que M é a intersecção da circunferência λ de centro 0, com o segmento de reta $\overline{AC}$. Perceba que o ΔAMB é retângulo em M, desse fato, temos que $\overline{BM}=\frac{\sqrt{3}}{2}cm$ e $\overline{AM}=\frac{3}{2}cm$

IV) $[ABC]=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}{2}\Rightarrow[ABC]=\frac{\sqrt{3}}{2}cm^2$

V) $[AMB]=\frac{\overline{BM}\cdot\overline{AM}}{2}\Rightarrow[AMB]=\frac{3\sqrt{3}}{8}cm^2$

VI) A área da região hachurada (H) é dada por:

$$H=\frac{\pi\cdot(\overline{OM})^2}{6}-[MOB]$$

Obs.: $\overline{OM}=\frac{\overline{AB}}{2}$ e o ΔMOB é equilátero.

$$H=\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow H=\frac{\pi}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{16}$$

Portanto a área da parte do triângulo ABC externa à circunferência é

$$[ABC]-[AMB]-H=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{8}-\left[\frac{\pi}{8}-\frac{3\sqrt{3}}{16}\right]=\frac{5\sqrt{3}}{16}-\frac{\pi}{8}$$

Notação: [ABC] = Área do triângulo ABC.

Alternativa D

Questão 12

Com relação à equação $\frac{tg^3x-3tgx}{1-3tg^2x}+1=0$, podemos afirmar que

A) ( ) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é igual a 0.

B) ( ) no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 0.

C) ( ) a equação admite apenas uma solução real.

D) ( ) existe uma única solução no intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

E) ( ) existem duas soluções no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},0\right]$.

Comentários:

Dada a equação

$$\frac{tg^3(x)-3tg(x)}{1-3tg^2(x)}+1=0 \qquad (*)$$

(I) De (*) temos que $1-3tg^2(x)\neq0\Rightarrow tg(x)\neq\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

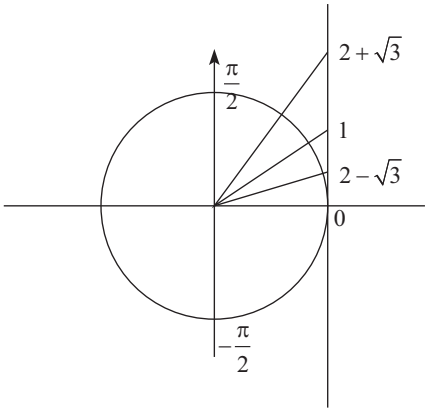
(II) Resolvendo (*)

$$\frac{tg^3(x)-3tg(x)}{1-3tg^2(x)}+1=0\Rightarrow\frac{tg^3(x)-3tg(x)+1-3tg^2(x)}{1-3tg^2(x)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg^3(x)-3tg(x)+1-3tg^2(x)=0$$
$$\Leftrightarrow[1+tg^3(x)]-3tg(x)[1+tg(x)]=0$$
$$\Leftrightarrow[1+tg(x)][1-tg(x)+tg^2(x)]-3tg(x)[1+tg(x)]=0$$
$$\Leftrightarrow[1+tg(x)][tg^2(x)-4tg(x)+1]=0\Rightarrow1+tg(x)=0 \text{ ou } tg^2(x)-4tg(x)+1=0$$

(III) $1-tg(x)=0\Rightarrow tg(x)=-1$

(IV) $tg^2(x)-4tg(x)+1=0 \Rightarrow tg(x)=2+\sqrt{3}$ ou $tg(x)=2-\sqrt{3}$



A partir do argumento concluímos que no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ a soma das soluções é maior que 5.

Alternativa B

Questão 13

Sejam A e B matrizes quadradas *n x n* tais que A + B = A . B e I_n a matriz identidade *n x n*. Das afirmações:

I. I_n - B é inversível;
II. I_n - A é inversível;
III. A . B = B . A.

é (são) verdadeira(s)
A) ( ) Somente I.
B) ( ) Somente II .
C) ( ) Somente III.
D) ( ) Somente I e II.
E) ( ) Todas.

Comentários:
A + B = AB
Manipulando essa expressão:

$$A+B+AB \Rightarrow A-AB=-B \Rightarrow A(I-B)=-B \Rightarrow A(I-B)+I=I-B$$
$$\Rightarrow I-B-A(I-B)=I \Rightarrow (I-A)(I-B)=I$$
$$\det(I-A)\cdot\det(I-B)=1 \Rightarrow \det(I-A)\neq 0 \quad \Rightarrow (I-B) \text{ e } (I-A) \text{ são inversíveis.}$$
$$\det(I-B)\neq 0 \quad \Rightarrow \text{I e II são verdadeiras.}$$

Como $(I-A)(I-B)=I \Rightarrow (I-A)$ é imersa de $(I-B)$.
Logo, $(I-A)(I-B)=I$

$$\cancel{I}-A-B+BA=\cancel{I} \Rightarrow BA=A+B=AB \Rightarrow \text{III é verdadeira.}$$

Alternativa E

Questão 14

Se o sistema $\begin{cases} x+y+z & =0 \\ 2a^2y+(2a^4-a)z & =0 \\ x+ay+(a^3-1)z & =0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

A) ( ) $0,-1,\frac{-1-\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

B) ( ) $0,-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

C) ( ) $0,-1,\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

D) ( ) $0,-1,-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}$.

E) ( ) $0,-1,1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}$.

Comentários:

Se o sistema $\begin{cases} x+yz & =0 \\ 2a^2y+(2a^4-a)z & =0 \\ x+ay+(a^3-1)z & =0 \end{cases}$ admite infinitas soluções, então

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2a^2 & 2a^4-a \\ 1 & a & a^3-1 \end{vmatrix}=0$$

Resolvendo o determinante acima:

$$1\cdot 2a^2\cdot(a^3-1)+1\cdot(2a^4-a)\cdot 1+1\cdot a\cdot 0-1\cdot 2a^2\cdot 1-1\cdot 0\cdot(a^3-1)-1\cdot a\cdot(2a^4-a)=0$$
$$2\cancel{a^5}-2a^2+2a^4-a-2a^2-2\cancel{a^5}+a^2=0$$
$$2a^4-3a^2-a=0$$
$$a\cdot(2a^3-3a-1)=0 \Rightarrow a=0 \text{ ou } 2a^3-3a-1=0 \quad (*)$$

Note que -1 é raiz de (*), aplicando Briot Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & 0 & -3 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow (*)=(a+1)\cdot(2a^2-2a-1) \quad \text{e } (*)=0 \Rightarrow (a+1)(2a^2-2a-1)=0 \Rightarrow a+1=0 \text{ ou } 2a^2-2a-1=0.$$

Resolvendo $2a^2-2a-1=0$ temos que $a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ ou $a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Os possíveis valores de a são $0,-1,\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Alternativa B

Questão 15

Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinómio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det \mathrm{A}$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

A) ( ) $\frac{1}{2}$.

B) ( ) $\frac{1}{3}$.

C) ( ) $\frac{1}{5}$.

D) ( ) $\frac{1}{7}$.

E) ( ) $\frac{1}{11}$.

Comentários:

Seja $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $p(x) = \det \mathrm{A}$. Para calcular o $\det \mathrm{A}$ vamos utilizar o teorema de Laplace.

Escolhendo a 1° linha temos

$$\det \mathrm{A} = a_{11} \cdot \mathrm{A}_{11} + a_{12} \cdot \mathrm{A}_{12} + a_{13} \cdot \mathrm{A}_{13} + a_{14} \cdot \mathrm{A}_{14}$$

Onde A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij} e $\mathrm{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$.

$$\det \mathrm{A} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x^2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} + x^3 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$\det \mathrm{A} = -1 - 9x^2 + 11x^3$. Como $p(x) = \det \mathrm{A}$ temos que

$p(x) = 11x^3 - 9x^2 - 1$

Obs.: Dado $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, pelas relações de Girard temos que $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$

Portanto o produto *(p)* das raízes de *p(x)* é dado por

$$p = -\frac{d}{a} \Rightarrow p = -\frac{(-1)}{11} \Rightarrow p = \frac{1}{11}$$

Alternativa E

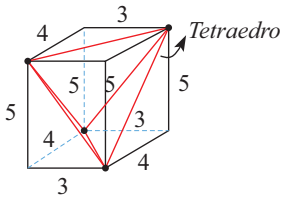
Questão 16

Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

A) 10.
B) 12.
C) 15.
D) 20.
E) 30.

Comentários:

Paralelepípedo:



Tem-se:

$$V_{Tetraedro} = V_{Paralelepípedo} - 4 \cdot V_{Triedro}$$

$$V_{Tetraedro} = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3} \cdot 4 \cdot 5}{2} = 60 - 40$$

$$V_{Tetraedro} = 20\,\text{cm}^3$$

Alternativa D

Questão 17

Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se $MN = CN = 2\text{ cm}$, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

A) $\frac{\sqrt{60}}{3}$.

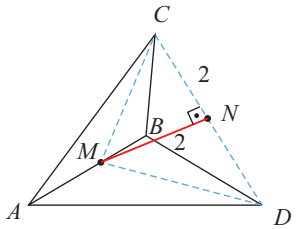
B) $\frac{\sqrt{50}}{3}$.

C) $\frac{\sqrt{40}}{3}$.

D) $\frac{\sqrt{30}}{3}$.

E) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Comentários:



Tem-se que os ΔABC e ΔABD são equiláteros e congruentes (lado AB comum).
Logo, $CM = MD \Rightarrow \Delta CMD$ isósceles de base CD. Como MN é mediana $\Rightarrow MN \perp CD$

Portanto, ΔMNC é retângulo e isósceles pois, $MN = CN = 2 \Rightarrow CM = MD = 2\sqrt{2}$

No ΔABC , CM é altura. Sendo $AC = l \Rightarrow CM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{2} \rightarrow l = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

Como $AC = AD \Rightarrow \Delta ACD$ é isósceles $\Rightarrow AN \perp CD \Rightarrow AN$ é altura relativa a CD

Por Pitágoras:

$$h^2 + 2^2 = l^2$$

$$h^2 + 4 = \frac{16 \cdot 6}{9}$$

$$h^2 = \frac{60}{9}$$

$$h = \frac{\sqrt{60}}{3}$$

Alternativa A

Questão 18

Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$.

Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

A) -96.
B) -85.
C) 63.
D) 99.
E) 115.

Comentários:

Dada a propriedade da PA apresentada, para todo $n \in N$, tem-se:

$n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 2 + 5 = 7$

$n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 18 \Rightarrow a_2 = 11$

Logo, a razão r da PA é $r = 4$

Aplicando Teorema de Jacobi na matriz pedida:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + r & a_1 + 2r \\ a_1 + 3r & a_1 + 4r & a_1 + 5r \\ a_1 + 6r + 2 & a_1 + 7r & a_1 + 8r \end{vmatrix} \underset{\text{Coluna 2} - \text{Coluna 1}}{\overset{\text{Coluna 3} - \text{Coluna 2}}{=}} \begin{vmatrix} a_1 & r & r \\ a_1 + 3r & r & r \\ a_1 + 6r + 2 & r - 2 & r \end{vmatrix} =$$

$$\underset{\text{Linha 2} - \text{Linha 1}}{\overset{\text{Linha 3} - \text{Linha 2}}{=}} \begin{vmatrix} a_1 & r & r \\ 3r & 0 & 0 \\ 3r + 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -6r^2 = -6 \cdot 16 = -96$$

Alternativa A

Questão 19

São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

A) $\frac{8}{15}$.

B) $\frac{7}{15}$.

C) $\frac{6}{15}$.

D) 1.

E) $\frac{17}{15}$.

Comentários:

3 *brancas*	2 *brancas*
3 *pretas*	1 *preta*
Caixa 1	*Caixa* 2

$$P_1 = 1 - P(\text{Tirar duas bolas brancas})$$

$$P_1 = 1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{9}{15}$$

$$P_2 = P(\text{branca/C1 e branca/C2}) + P(\text{preta/C1 e preta/C2})$$

$$P_2 = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{15} \Rightarrow P_1 + P_2 = \frac{17}{15}$$

Alternativa E

Questão 20

Para que o sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = c^2 \end{cases}$ admita apenas soluções reais, todos os valores reais de c pertencem ao conjunto

A) $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[$.

B) $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right[$.

C) $\left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$.

D) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

E) $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

Comentários:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = c^2 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} (x+y)^3 = 1 \\ x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 1 \\ c^2 + 3xy(x+y) = 1 \\ c^2 + 3xy = 1 \end{array}$$

Como $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Logo,

$$c^2 + 3x(1-x) = 1$$

$$3x^2 - 3x + 1 - c^2 = 0$$

Para admitir apenas soluções reais: $\Delta \geq 0$

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 3 \cdot \left(1 - c^2\right) \geq 0$$
$$12\left(c^2 - 1\right) \geq -9$$
$$c^2 - 1 \geq -\frac{3}{4}$$
$$c^2 \geq \frac{1}{4} \longrightarrow c \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } c \geq \frac{1}{2}$$

Alternativa E

AS QUESTOES DISSERTATIVAS, NUMERADAS DE 21 A 30,
DEVEM SER RESOLVIDAS E RESPONDIDAS NO CADERNO DE SOLUÇOES.

Questão 21

Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão –5. Determine o número de vértices do poliedro.

Comentários:
Sendo A o número de arestas, T o número de faces triangulares e Q o número de faces quadrangulares,

$$T = A - 5 \text{ e } Q = A - 10.$$

Considerando que

$$\frac{3 \cdot T + 4 \cdot Q}{2} = A,$$

tem-se que

$$\frac{3 \cdot (A - 5) + 4(A - 10)}{2} = A,$$

o que implica $A = 11$. Com $A = 11$, $T = 6$ e $Q = 1$. Com $T = 6$ e $Q = 1$, o número de faces do poliedro é 7. Sendo V o número de vértices do poliedro, pela relação de Euler,

$$V + 7 = 11 + 2,$$

o que implica $V = 6$. O número de vértices do poliedro é 6.

Questão 22

Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial: $3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$.

Comentários:

Tem-se que

$$3^{x-2} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} \leq \frac{1081}{18},$$

ou ainda,

$$\frac{3^x}{9} + 3 \cdot 3^x + 9 \cdot 3^x + 27 \cdot 3^x + 81 \cdot 3^x \leq \frac{1081}{18}.$$

Disso,

$$3^x \leq \frac{1}{2},$$

ou melhor,

$$3^x \leq 3^{\log_3 \frac{1}{2}}$$

Assim, $x \leq \log_3 \frac{1}{2}$ e o conjunto solução da inequação é

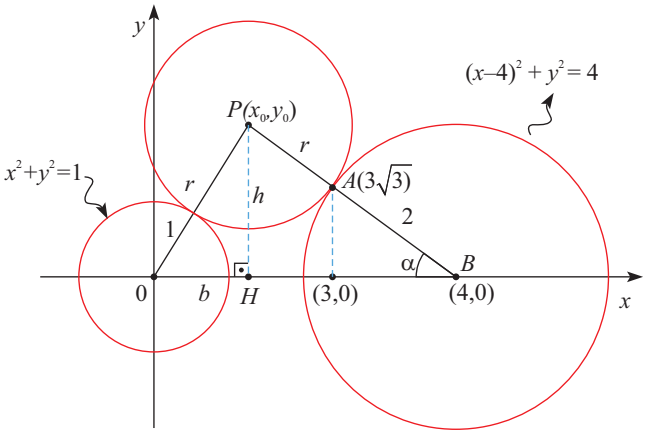
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq \log_3 \frac{1}{2} \right\}.$$

Questão 23

No plano cartesiano são dadas as circunferências $C_1: x^2+y^2=1$ e $C_2:(x-4)^2+y^2=4$. Determine o centro e o raio de uma circunferência C tangente simultaneamente a C_1 e C_2, passando pelo ponto $A=(3,\sqrt{3})$.

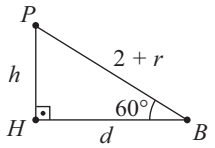
Comentários:

Observe que o ponto $A=(3,\sqrt{3})$ pertence a C_2, pois satisfaz sua equação: $(3-4)^2+\sqrt{3}^2=(-1)^2+\sqrt{3}^2=4$. Uma representação da circunferência desconhecida, então, é:



Observe que $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\alpha=60^\circ$.

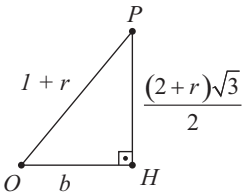
Chamando H ao pé da altura baixada por P:



Segue: $d=\dfrac{2+r}{2}$

$$h=\frac{(2+r)\sqrt{3}}{2}$$

E o triângulo ΔOPH fica:



Com: $b=4-d$

$$b=4-\left(\frac{2+r}{2}\right)$$

$$b=\frac{8-2-r}{2}=\frac{6-r}{2}$$

Aplicando Pitágoras: $\left(\dfrac{(2+r)\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{6-r}{2}\right)^2=(1+r)^2$

$$\therefore\quad r=\frac{11}{2}.$$

Segue: $h=y_0\Rightarrow y_0=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ e $b=x_0\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{4}$.

Assim, o centro é $P\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{15\sqrt{3}}{4}\right)$ e o raio é $r=\dfrac{11}{2}$.

Questão 24

Seja $z = \cos\frac{\pi}{7} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{7}$. Pedem-se:

a) Use a propriedade $z^k = \cos\frac{k\pi}{7} + i\,\text{sen}\frac{k\pi}{7}$, $k \in \mathbb{N}$, para expressar $\cos\frac{\pi}{7}$, $\cos\frac{3\pi}{7}$ e $\cos\frac{5\pi}{7}$ em função de z.

b) Determine a e b tais que $\frac{a}{b} = \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7}$.

Comentários:

a) Sendo $z = \cos\frac{\pi}{7} + i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{7}$,

temos que $\bar{z} = z^{-1} = \cos\frac{\pi}{7} - i \cdot \text{sen}\frac{\pi}{7}$.

Assim, $z + \bar{z} = 2\cos\frac{\pi}{7}$.

Segue que $\cos\frac{\pi}{7} = \frac{z+\bar{z}}{2}$ ou, identicamente,

$$\cos\frac{\pi}{7} = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

Analogamente, $z^3 = \cos\frac{3\pi}{7} + i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{7}$ e

$$z^{-3} = \cos\frac{3\pi}{7} - i \cdot \text{sen}\frac{3\pi}{7}.$$

e portanto, $\cos\frac{3\pi}{7} = \frac{z^3 + z^{-3}}{2}$

Analogamente, tem-se $\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{z^5 + z^{-5}}{2}$.

b) Uma forma interessante de se obter o resultado desejado é analisar a equação trigonométrica:
$\cos(3x) = -\cos(4x)$

Cujas soluções são:

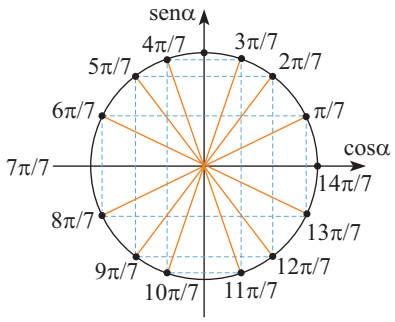
$\boxed{\text{I}}$ $3x = (\pi - 4x) + k \cdot 2\pi$ ou $\boxed{\text{II}}$ $3x = (\pi - 4x) + k \cdot 2\pi$

$\therefore x = \frac{\pi}{7} + k \cdot \frac{2\pi}{7}$ ou $x = -\pi + k \cdot 2\pi$

Com k inteiro arbitrário. Para $x > 0$, as soluções são

$\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}, \frac{7\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}$ $(\ldots)$

Analisando a distribuição dos arcos $\frac{n \cdot \pi}{7}$ no círculo trigonométrico, observa-se que seus valores de cosseno são limitados:



De modo que se observa que $\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\frac{9\pi}{7}$; $\cos\frac{3\pi}{7} = \cos\frac{11\pi}{7}$; $\cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{13\pi}{7}$ e, assim por diante.

Desenvolvendo algebricamente $\cos(3x) = -\cos(4x)$, temos:

- $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\cos(4x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

Assim, adotando $\cos x = y$, a equação se torna

$4y^3 - 3y = -(8y^4 - 8y^2 + 1)$

$\therefore\ 8y^4 + 4y^3 - 8y^2 - 3y + 1 = 0$

Cujas quatro raízes, calculadas anteriormente, são:

$$\cos\frac{\pi}{7}, \cos\frac{3\pi}{7}, \cos\frac{5\pi}{7} \text{ e } \cos\frac{7\pi}{7} = -1.$$

Aplicando a relação soma de Girard:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = -\frac{4}{8}$$

$$\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} + (-1) = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} + \cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

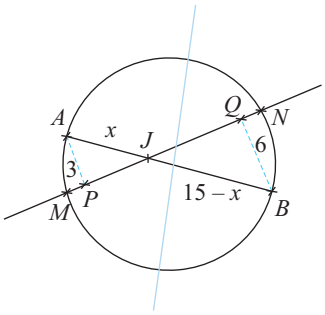
Assim, $a = 1$ e $b = 2$ satisfazem às condições do enunciado.

Questão 25

Uma reta r separa um plano π em dois semiplanos π_1 e π_2. Considere pontos A e B tais que $A \in \pi_1$ e $\in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3$, $d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em π passa pelos pontos A e B e encontra r nos pontos M e N. Determine a menor distância possível entre os pontos M e N.

Comentários:

Considere a figura.



Da semelhança dos triângulos APJ e BQJ, tem-se que

$$\frac{x}{15-x} = \frac{3}{6},$$

o que implica $x = 5$. Com isso, $AJ = 5$ e $JB = 10$.

Com a potência do ponto J,

$$AJ \cdot JB = MJ \cdot JN,$$

ou ainda,

$$MJ \cdot JN = 50.$$

Com a desigualdade das médias,

$$\frac{MJ + JN}{2} \geq \sqrt{MJ \cdot JN},$$

ou ainda,

$$\frac{MN}{2} \geq 5\sqrt{2}.$$

Isso implica $MN \geq 10\sqrt{2}$. Assim, a menor distância possível entre M e N é $10\sqrt{2}$.

Questão 26

De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0 \le k - r \le 6$ e $0 \le k \le 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma $\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r}\binom{6}{6-r}$.

Comentários:

a) Considerando $k \le 6$, o número de maneiras possíveis é:

$$n = \binom{6}{0}\cdot\binom{10}{k} + \binom{6}{1}\cdot\binom{10}{k-1} + \ldots + \binom{6}{k}\cdot\binom{10}{0}$$

$$n = \sum_{i=0}^{k} \cdot \binom{6}{i}\cdot\binom{10}{k-i}$$

E o número de maneiras favoráveis é:

$$f = \binom{6}{k-r}\cdot\binom{10}{r}$$

De modo que a probabilidade é $P = \dfrac{\binom{6}{k-r}\cdot\binom{10}{r}}{\sum_{i=0}^{k} \cdot \binom{6}{i}\cdot\binom{10}{k-i}}$

Já considerando $k \ge 6$, ainda dentro das condições dadas, os casos possíveis são:

$$n = \binom{6}{0}\cdot\binom{10}{k} + \binom{6}{1}\cdot\binom{10}{k-1} + \ldots + \binom{6}{6}\cdot\binom{10}{k-6}$$

$$n = \sum_{i=0}^{6} \cdot \binom{6}{i}\cdot\binom{10}{k-i}$$

E a probabilidade, $P = \dfrac{\binom{6}{k-r}\cdot\binom{10}{r}}{\sum_{i=0}^{6} \cdot \binom{6}{i}\cdot\binom{10}{k-i}}$

Ambas podendo ser sumarizadas em

$$P = \frac{\binom{6}{k-r}\cdot\binom{10}{r}}{\sum_{i=0}^{\min(6,k)} \cdot \binom{6}{i}\cdot\binom{10}{k-i}}$$

b) Aproveitando-se do resultado anterior, considere-se o caso em que são retiradas $k = 6$ bolas. O número de maneiras possíveis será

$$n = \binom{10}{0}\cdot\binom{6}{6} + \binom{10}{1}\cdot\binom{6}{5} + \ldots + \binom{10}{6}\cdot\binom{6}{0}$$

Que é a expressão cujo cálculo é solicitado.

Para $k = 6$, sabe-se que a probabilidade de retirar 0 brancas é $P = \frac{6}{16}\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}\cdot\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}$ e o número de casos favoráveis é apenas 1.

Assim, $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow n = 8008.$

Assim, $\sum_{i=0}^{6} \cdot \binom{10}{r}\cdot\binom{6}{6-r} = 8008$

Questão 27

Quantos pares de números inteiros positivos (A,B) existem cujo mínimo múltiplo comum é 126×10^3? Para efeito de contagem, considerar $(A,B)\equiv(B,A)$.

Comentários:

$126\cdot10^3 = 2^4\cdot3^2\cdot5^3\cdot7^2$

Sejam a e b divisores da forma $d=2^x\cdot3^y\cdot5^z\cdot7^w$ com $x\in\{0,1,2,3,4\}$ $y\in\{0,1,2\}$ $z\in\{0,1,2,3\}$ $w\in\{0,1\}$.

Assim é necessário que em cada par (a,b) os expoentes 2^4, 3^2, 5^3 e 7^1 estejam presentes ao menos uma vez.

Dividindo o problema em vários casos:

I) a e b não possuem expoentes iguais.

$$(2^4 \text{ e } 2^x),(3^2 \text{ e } 3^y),(5^3 \text{ e } 5^7),(7^1 \text{ e } 7^w)$$

$$n_1=\frac{4\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2^4}{2}=192 \text{ casos.}$$

II) a e b possuem somente um expoente igual.

$$(2^4 \text{ e } 2^4): n_2=\frac{2\cdot3\cdot1\cdot2^3}{2}=24$$

$$(3^2 \text{ e } 3^2): n_3=\frac{4\cdot3\cdot1\cdot2^3}{2}=48$$

$$(5^3 \text{ e } 5^3): n_4=\frac{4\cdot2\cdot1\cdot2^3}{2}=32$$

$$(7^1 \text{ e } 7^1): n_5=\frac{4\cdot2\cdot3\cdot2^3}{2}=96$$

Totalizando 200 casos.

III) a e b possuem apenas dois expoentes iguais.

$$(2^4 \text{ e } 2^4)(3^2 \text{ e } 3^2): n_6=\frac{3\cdot1\cdot2^2}{2}=\frac{12}{2}=6$$

$$(2^4 \text{ e } 2^4)(5^3 \text{ e } 5^3): n_7=\frac{2\cdot1\cdot2^2}{2}=4$$

$$(2^4 \text{ e } 2^4)(7^1 \text{ e } 7^1): n_8=\frac{2\cdot3\cdot2^2}{2}=12$$

$$(3^2 \text{ e } 3^2)(5^3 \text{ e } 5^3): n_9=\frac{4\cdot1\cdot2^2}{2}=8$$

$$(3^2 \text{ e } 3^2)(7^1 \text{ e } 7^1): n_{10}=\frac{4\cdot3\cdot2^2}{2}=24$$

$$(5^3 \text{ e } 5^3)(7^1 \text{ e } 7^1): n_{11}=\frac{4\cdot2\cdot2^2}{2}=16$$

Totalizando 70 casos.

IV) a e b possuem exatamente três expoentes iguais.

$$(2^4 \text{ e } 2^4)(3^2 \text{ e } 3^2)(5^3 \text{ e } 5^3): n_{12}=\frac{1\cdot2}{2}=1$$

$$(2^4 \text{ e } 2^4)(3^2 \text{ e } 3^2)(7^1 \text{ e } 7^1): n_{13}=\frac{3\cdot2}{2}=3$$

$$(2^4 \text{ e } 2^4)(5^3 \text{ e } 5^3)(7^1 \text{ e } 7^1): n_{14}=\frac{2\cdot2}{2}=2$$

$$(3^2 \text{ e } 3^2)(5^3 \text{ e } 5^3)(7^1 \text{ e } 7^1): n_{15}=\frac{4\cdot2}{2}=4$$

Totalizando outros10 casos.

V) a e b possuem todos os expoentes iguais. Neste caso, $a=b=2^4$, 3^2, 5^3 e 7^1, corresponde a um caso.

O total de pares *(A,B)* nas condições dados é

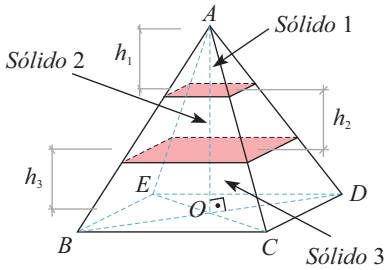
$$192 + 200 + 70 + 10 + 1 = 473.$$

Questão 28

A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2}\text{cm}^2$. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

Comentários:

Considere a figura.



Sendo r o raio da circunferência inscrita na base da pirâmide,

$$\pi r^2 = \frac{25\pi}{2},$$

o que implica $r = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{cm}$. Com isso, cada uma das arestas da base da pirâmide mede $5\sqrt{2}\,\text{cm}$. Isso significa que a metade da diagonal da base é 5 cm.

No triângulo AOD, $OD = 5\text{ cm}$ e $AD = 13\text{ cm}$. Com isso,

$$(AO)^2 + 5^2 = 13^2,$$

o que significa que $AO = 12\text{ cm}$.

A pirâmide correspondente ao sólido 1 é semelhante à original e, com isso,

$$\left(\frac{h_1}{12}\right)^3 = \frac{1}{3},$$

o que implica $h_1 = 4\sqrt[3]{9}\,\text{cm}$. A pirâmide que corresponde aos sólidos 1 e 2 é semelhante à pirâmide original e, desse modo,

$$\left(\frac{h_1 + h_2}{12}\right)^3 = \frac{2}{3},$$

o que implica $h_2 = 4\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\text{cm}$. Considerando que $h_1 + h_2 + h_3 = 12$, conclui-se que

$$h_3 = 4 \cdot \left(3 - \sqrt[3]{18}\right)\text{cm}.$$

Assim, as alturas dos sólidos são $4\sqrt[3]{9}\,\text{cm}$, $4\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)\text{cm}$ e $4 \cdot \left(3 - \sqrt[3]{18}\right)\text{cm}$.

Questão 29

Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

Comentários:

Decompondo $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$, observa-se que 2 é raiz. Aplicando Briot-Ruffini:

2	1	–4	5	–2
	1	–2	1	0

Assim, $x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \equiv (x-2)\cdot(x^2 - 2x + 1)$

$\therefore\ x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \equiv (x-2)\cdot(x-1)^2$.

Também decompondo $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$, observa-se que 1 é raiz.

1	1	–5	8	–4
	1	–4	4	0

Assim, $x^3-5x^2+8x-4\equiv(x-1)\cdot(x^2-4x+4)$

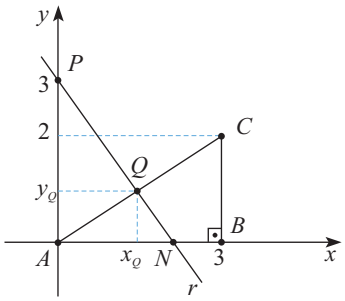
$\therefore\ x^3-5x^2+8x-4\equiv(x-1)\cdot(x-2)^2.$

Para $p(x)$ ser divisível por ambos, deve ter $(x-1)$ e $(x-2)$ como fatores de grau no mínimo 2, cada fator.
O polinômio $p(x)$ de menor grau será da forma $p(x) = k\cdot(x-1)^2\cdot(x-2)^2$
com $k\in\mathbb{R}$.
Portanto, o menor grau possível é 4.

Questão 30

No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0, 3)$ e o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

Comentários:
Considere a figura.



Sendo r a reta que passa por P e por N, sua equação é

$$\frac{x}{x_N}+\frac{y}{3}=1.$$

Considerando que o triângulo ABC tem área 3, o triângulo AQN, sendo Q a intersecção de r com AC, deve ter área igual a $\frac{3}{2}$.

A reta suporte de AC tem equação $y=\frac{2}{3}x$, ou ainda, $x=\frac{3}{2}y$. Substituindo-se $x=\frac{3}{2}y$ em

$$\frac{x}{x_N}+\frac{y}{3}=1$$

obtém-se

$$\frac{3y}{2x_N}+\frac{y}{3}=1,$$

ou ainda,

$$y=\frac{6x_N}{9+2x_N}.$$

Como esta é a ordenada de Q e a área do triângulo AQN deve ser $\frac{3}{2}$, tem-se que

$$\frac{1}{2}\cdot x_N\cdot\frac{6x_N}{9+2x_N}=\frac{3}{2},$$

ou ainda,

$$2x_N^2-2x_N-9=0.$$

Disso,

$$x_N=\frac{1\pm\sqrt{19}}{2}$$

e, como, pela figura, $x_N>0$, conclui-se que

$$x_N=\frac{1+\sqrt{19}}{2}.$$

Assim,

$$N=\left(\frac{1+\sqrt{19}}{2},\ 0\right).$$

Matemática
Lafayette
Mário
Rodolfo
Salviano

Colaboradores
Cirillo Sales

Digitação e Diagramação
Kleuber Umberto
Márcia Santana

Revisor
Celso Faria

Projeto Gráfico/Desenhista
Rodrigo Ramos

Supervisão Editorial
Aline Alkmin
Rodrigo Bernadelli

As escolhas que você fez nessa prova, assim como outras escolhas na vida, dependem de conhecimentos, competências, conhecimentos e habilidades específicos. Esteja preparado.

www.grupoolimpobh.com.br

opirus
EDITORA

olimpo